Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ УСЛОВИЯХ ТИПА КОШИ

И. П. Мысовских

(Ленинград)

В работе изучается сходимость метода Ньютона для уравнения $P(x)=0$, где $P(x)$ — вещественная, дважды дифференцируемая функция, первая производная которой по абсолютной величине ограничена снизу положительным числом в некотором промежутке. Сходимость метода Ньютона при условиях такого типа рассматривалась Коши и А. М. Островским [1].

Теорема 1. Пусть уравнение

$$P(x)=0 \tag{1}$$

имеет решение x^*, причем

$$|x^*-x_0|\leqslant r \tag{2}$$

где x_0 — начальное приближение и $r>0$. Предположим, что

$$P(x_0)P'(x_0)>0 \qquad (P(x_0)P'(x_0)<0)$$

функция $P(x)$ дважды дифференцируема и выполняются неравенства

$$|[P'(x)]^{-1}|\leqslant B, \qquad |P''(x)|\leqslant K \tag{3}$$

для всех точек промежутка

$$\left[x_0-\left(1+\tfrac{1}{2}l\right)r,\ x_0\right] \qquad \left(\left[x_0,\ x_0+\left(1+\tfrac{1}{2}l\right)r\right]\right) \tag{4}$$

При этом постоянные B, K, r подчинены условию

$$l=BKr\leqslant 2 \tag{5}$$

Тогда последовательность Ньютона

$$x_{n+1}=x_n-[P'(x_n)]^{-1}P(x_n) \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{6}$$

сходится к решению x^* уравнения (1), очевидно, единственному в промежутке (4).

Доказательство. Будем предполагать, что $P(x_0)>0$ и $P'(x_0)>0$ (прочие случаи легко сводятся к этому). На основании равенств $P(x^*)=0$ и (6) имеем

$$x_1-x^*=[P'(x_0)]^{-1}[P(x^*)-P(x_0)-P'(x_0)(x^*-x_0)]=$$
$$=[P'(x_0)]^{-1}\tfrac{1}{2}P''(\xi)(x^*-x_0)^2 \qquad (x^*<\xi<x_0)$$

Отсюда, если принять во внимание (2), (3) и (5), получим

$$|x_1-x^*|\leqslant B\tfrac{1}{2}Kr^2=\tfrac{1}{2}lr \tag{7}$$

Из (2) и (7) следует, что

$$|x_1-x_0|\leqslant|x_0-x^*|+|x^*-x_1|\leqslant\left(1+\tfrac{1}{2}l\right)r \tag{8}$$

т. е. x_1 входит в промежуток (4).

Точно так же из соотношения

$$x_2-x^*=[P'(x_1)]^{-1}[P(x^*)-P(x_1)-P'(x_1)(x^*-x_1)]=$$
$$=[P'(x_1)]^{-1}\tfrac{1}{2}P''(\xi_1)(x^*-x_1)^2 \qquad (x_1\leqslant\xi_1\leqslant x^*)$$

на основании (3) и (7) получим

$$|x_2 - x^*| \leqslant B \tfrac{1}{2} K \left(\tfrac{1}{2} l\right)^2 r^2 = \left(\tfrac{1}{2} l\right)^3 r$$

При этом использовано то обстоятельство, что x_1 и ξ_1 принадлежат промежутку (4). Как и выше, убеждаемся в том, что x_2 входит в промежуток (4). Ясно, что, продолжая начатый процесс, получим

$$|x_n - x^*| \leqslant \left(\tfrac{1}{2} l\right)^{2^n - 1} r \qquad \text{для } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

Если $l < 2$, то из (9) следует [1], что $x_n \to x^*$ при $n \to \infty$. Предположим, что $l = 2$. Можем считать, что константы B, K, r суть точные границы, в частности $r = x_0 - x^*$.

Отметим, что для расходимости последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы $x_1 = x^* - r$ и $x_2 = x^* + r$. Достаточность этих условий очевидна. Докажем необходимость. Пусть, например, $x_1 \neq x^* - r$. Тогда на основании (9) $|x^* - x_1| < r$. Если x_1 принять за новое начальное приближение, то для него соответствующее число $l_1 = BK\,|x^* - x_1| < 2$ и, значит, по доказанному последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Установим теперь, что не может быть $x_1 = x^* - r$ и $x_2 = x^* + r$. Этим будет доказано, что последовательность $\{x_n\}$ сходится при $l = 2$. Запишем разложение $P(x)$ в окрестности x_0 по формуле Тейлора

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} P''(\xi)(x - x_0)^2 \qquad (x_1 \leqslant x < \xi < x_0) \tag{10}$$

Предположим, что $x_1 = x^* - r$. Так как $r = x_0 - x^*$, то

$$r = \tfrac{1}{2}(x_0 - x_1) = \tfrac{1}{2} P(x_0)\,[P'(x_0)]^{-1}$$

Полагая теперь $x = x^*$ в равенстве (10), получим

$$P(x^*) = 0 = P(x_0) - P'(x_0)\tfrac{1}{2} P(x_0)\,[P'(x_0)]^{-1} + \tfrac{1}{2} P''(\xi)\, r\, \tfrac{1}{2} P(x_0)\,[P'(x_0)]^{-1}$$

или

$$P''(\xi)\,[P'(x_0)]^{-1} r = -2$$

Отсюда в силу (5) вытекает $[P'(x_0)]^{-1} = B$ и

$$P''(\xi) = -K \qquad \text{при } x = x^* \tag{11}$$

Из соотношения (10) и условия (3) получим

$$P(x) \geqslant P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) - \tfrac{1}{2} K (x - x_0)^2 = P_1(x) \qquad (x_1 \leqslant x \leqslant x_0) \tag{12}$$

Применим к разности $P'(x) - P'(x_0)$ формулу конечных приращений и воспользуемся условием (3). Получим

$$P'(x) \leqslant P'(x_0) + K(x_0 - x) = P_1'(x) \qquad (x_1 \leqslant x \leqslant x_0) \tag{13}$$

Из (10) и (11) вытекает, что $P(x^*) = P_1(x^*) = 0$, а тогда на основании (13) $P(x) \leqslant P_1(x)$ для $x^* \leqslant x \leqslant x_0$. Последнее неравенство вместе с (12) дает

$$P(x) = P_1(x) \qquad \text{для } x^* \leqslant x \leqslant x_0$$

[1] Эта часть доказательства переносится без изменений на тот случай, когда $P(x)$ — оператор, переводящий пространство X типа (B) в пространство Y того же типа.

Если воспользоваться условием $x_2 = x^* + r$, то получим

$$P(x) = P_2(x) \qquad \text{для } x_1 \leqslant x \leqslant x^*$$

где

$$P_2(x) = P(x_1) + P'(x_1)(x - x_1) + \tfrac{1}{2} K (x - x_1)^2 \tag{14}$$

при этом $[P'(x_1)]^{-1} = B$ и $P(x_1) = -P(x_0)$. Имеем

$$P(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{при } x^* \leqslant x \leqslant x_0 \\ P_2(x) & \text{при } x_1 \leqslant x \leqslant x^* \end{cases}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ определены соответственно равенствами (12) и (14). Итак, оказывается, что не существует $P''(x)$ при $x = x^*$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана полностью.

Теорема 2. Пусть

$$P(x_0)\, P'(x_0) > 0 \qquad (P(x_0)\, P'(x_0) < 0)$$

Далее, пусть существует $P''(x)$ в промежутке

$$[x_0 - \Lambda, x_0] \qquad ([x_0, x_0 + \Lambda]) \tag{15}$$

и выполнены условия

$$|[P'(x)]^{-1}| \leqslant B \qquad \text{для } x \text{ из промежутка (15)} \tag{16}$$

$$|P(x_0)| \leqslant \eta \tag{17}$$

$$|P''(x)| \leqslant K \qquad \text{для } x \text{ из промежутка (15)} \tag{18}$$

$$h = B^2 K \eta \leqslant 4 \tag{19}$$

(В теореме А. М. Островского [1] требуется выполнение условия $h < 2$.)

Если $\Lambda \geqslant B\eta$, то уравнение (1) имеет единственное решение x^* и к нему сходится последовательность (6).

Доказательство. Считаем, что $P(x_0) > 0$ и $P'(x_0) > 0$. Из неравенства $\Lambda \geqslant B\eta$ и условия (16) следует, что в промежутке (15) существует решение x^* уравнения (1). Предположим сначала, что $x_1 < x^* < x_0$. Здесь возможны два случая:

$$\text{(а)}\ r_0 = x_0 - x^* \leqslant \tfrac{1}{2}(x_0 - x_1), \qquad \text{(б)}\ r_1 = x^* - x_1 \leqslant \tfrac{1}{2}(x_0 - x_1)$$

Легко проверить, что в случае (а) для уравнения (1) и начального приближения x_0 выполнены все условия теоремы 1 с константами B, K, $r_0 = x_0 - x^*$. Проверим, например, выполнение условия (5). Так как

$$x_0 - x_1 = [P'(x_0)]^{-1} P(x_0)$$

то

$$r_0 \leqslant \tfrac{1}{2}(x_0 - x_1) \leqslant \tfrac{1}{2} B\eta, \qquad l = BKr_0 \leqslant \tfrac{1}{2} B^2 K \eta \leqslant 2$$

На основании теоремы 1 последовательность (6) сходится.

В случае (б) заключение о сходимости последовательности (6) делается также на основании теоремы 1, только здесь в качестве начального приближения надо взять x_1.

Рассмотрим общий случай. Очевидно

$$x_{n+1} - x_n = -[P'(x_n)]^{-1} P(x_n) \leqslant 0$$

при $P(x_n) \geqslant 0$. Если $P(x_n) \geqslant 0$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, то последовательность $\{x_n\}$ убывает и, так как она ограничена, имеет предел, совпадающий с x^*. Пусть имеются такие n, при которых $P(x_n) < 0$. Обозначим через N наименьший из таких номеров. Очевидно, $x_N < x^* < x_{N-1}$, и мы находимся в условиях разобранного выше случая. Теорема доказана.

Теорема 2 точна в том смысле, что в условии $h \leqslant 4$ число 4 нельзя заменить бóльшим. Введем обозначения

$$S_m(x) = 1 - x^2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1\cdot 3 \ldots (2k-3)}{k\cdot 2\cdot 4 \ldots (2k-2)} (1-x^2)^k \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$P_m(x) = \int_0^x S_m(t)\,dt \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

Обозначим через $x_0^{(m)}$ положительный корень уравнения

$$P_m(x) = 2xP_m'(x) \tag{20}$$

Имеем

$$S_m(x) \to 2(1 - |x|), \qquad P_m(x) \to 2x - x^2 \operatorname{sign} x \quad \text{при } m \to \infty$$

причем равномерно на промежутке $[-1, 1]$. Отсюда следует, что

$$x_0^{(m)} \to \frac{2}{3} \qquad \text{при } m \to \infty$$

Возьмем в качестве $P(x)$ и x_0 соответственно $P_m(x)$, $x_0^{(m)}$ и $[-x_0^{(m)}, x_0^{(m)}]$ в качестве промежутка (15). Тогда для $P_m(x)$ и $x_0^{(m)}$ выполнены все условия теоремы 2, кроме условия (19), причем если взять границы B_m, K_m, η_m точными, то $h_m = B_m^2 K_m \eta_m$ при достаточно большом m будет как угодно близко к 4 (так как $B_m \to {}^3/_2$, $\eta_m \to {}^8/_9$ при $m \to \infty$ и $K_m < 2$ при всех m). В то же время последовательность Ньютона, начинающаяся с $x_0^{(m)}$, расходится, как это следует из (20).

Поступила 18 VI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский А. М. Об одном случае сходимости алгоритма Ньютона. Математический сборник. 1938. Т. 3 (45). Вып. 2. Стр. 253—258.