Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

К НАКОПЛЕНИЮ ОШИБОК ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. С. Мухин
(Москва)

При численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

при помощи формул квадратурного типа значения искомой функции получаются обычно с некоторой ошибкой. Появление этой ошибки зависит от нескольких причин: от отбрасывания остаточного члена в формулах, от погрешностей в исходных значениях функции, от ошибок округления, появляющихся в результате вычислений с ограниченным числом знаков, и т. д.

В процессе непрерывных вычислений эти ошибки могут оставаться ограниченной величиной, но могут и значительно возрастать. Как показал М. Р. Шура-Бура [1], рост ошибки существенно зависит от некоторого уравнения в конечных разностях, соответствующего данной формуле интегрирования. Это уравнение в конечных разностях составляется из значений искомой функции, входящей в формулу данного вида. Так, например, формуле [2]

$$y_{n+1} = -y_n + y_{n-2} + y_{n-3} + 3h(f_n + f_{n-2}) + \tfrac{3}{10} h^5 f_{(\xi)}^{\mathrm{IV}}$$

применяемой для решения уравнений первого порядка $y' = f(x, y)$, соответствует разностное уравнение

$$\varphi_{(n+1)} + \varphi_{(n)} - \varphi_{(n-2)} - \varphi_{(n-3)} = 0$$

Если характеристическое уравнение, полученное для уравнения в конечных разностях, соответствующего применяемой формуле, имеет среди своих корней корни, большие единицы, или по модулю равные единице, но кратные, то ошибка быстро растет и формула мало пригодна для интегрирования на большом числе шагов. Это важное обстоятельство не всегда учитывается при численных расчетах. Нагляднее всего можно получить представление о накоплении ошибок, проведя численное решение некоторого конкретного уравнения по формулам различного вида.

Рассмотрим решение уравнения второго порядка

$$y'' = y \tag{1}$$

с начальными условиями $y_{(0)} = 1$, $y_{(0)}' = -1$. Точным решением этого уравнения при данных начальных условиях является $y = e^{-x}$. Проведем численное решение уравнения (1) при помощи различных формул с одним и тем же шагом $h = 0.1$ и проследим за ростом ошибок.

В качестве первого примера будем решать уравнение (1) по распространенным экстраполяционно-интерполяционным формулам Милна [3]

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-2} - y_{n-3} + \tfrac{1}{4} h^2 (5y_n'' + 2y_{n-1}'' + 5y_{n-2}'') + \tfrac{17}{240} h^6 y_{(\xi)}^{\mathrm{VI}} \tag{2}$$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \tfrac{1}{12} h^2 (y_{n+1}'' + 10\, y_n'' + y_{n-1}'') - \tfrac{1}{240} h^6 y_{(\xi)}^{\mathrm{VI}} \tag{3}$$

и по экстраполяционно-интерполяционным формулам [4]

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_{n-1} + \frac{2}{15}h^2(11y_n'' + 5y''_{n-1} - 2hy'''_{n-1} - y''_{n-2}) + \frac{1}{30}h^6 y_{(\xi)}^{VI} \quad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{1}{60}h^2(4y''_{n+1} + 25y_n'' + 7hy'''_n + y''_{n-1}) - \frac{1}{480}h^6 y_{(\xi)}^{VI} \quad (5)$$

$$y'_{n+1} = y'_{n-3} + \frac{4}{3}h(2y_n'' - y''_{n-1} + 2y''_{n-2}) + \frac{14}{45}h^5 y_{(\xi)}^{VI}$$

Остаточные члены формул (2), (3) и (4), (5) одного и того же порядка h^6.

Следует отметить, что исходные значения искомой функции берутся с ошибкой, так как они имеют только четыре значащих цифры. Таким образом, в накоплении ошибок при решении данного дифференциального уравнения большую роль будет играть поведение решения разностного уравнения, соответствующего применяемой формуле. Кроме того, как показал М. Р. Шура-Бура [1], формулы Милна (2), (3) имеют дисперсию ошибки, вызванной округлением при вычислении правой части уравнения, порядка D_π^2 / h^2, а формулы (4), (5) — порядка D_π^2 / h (D_π^2 — наибольшая из заданных величин дисперсии ошибок округления при вычислениях правой части уравнения). При экстраполяционно-интерполяционном методе решения определяющими, в смысле накопления ошибок, являются интерполяционные формулы.

Для интерполяционной формулы Милна (3) характеристическое уравнение $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$ имеет корни $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$, т. е. корень 1 кратности два.

Для интерполяционной формулы (5) характеристическое уравнение $\alpha - 1 = 0$ имеет только один корень $\alpha = 1$, т. е. не имеет кратных корней и корней, больших единицы. Поэтому следует предположить, что формулы Милна (2), (3) дадут большое накопление ошибок, а при использовании формул (4), (5) ошибка останется ограниченной величиной. Действительно, результаты вычислений, приведенные в табл. 1, (столбцы 2 и 3), показывают, что при решении по формулам Милна значение y отличается от верного уже при $x = 0.8$. Значение y при $x = 3.8$, полученное по формулам Милна, не имеет ни одной верной значащей цифры.

В то же время решение по формулам (4), (5) дает верные значения для y в пределах точности в четыре десятичных знака до $x = 5.2$.

Насколько важным является свойство тех или иных формул не накапливать ошибок в процессе вычислений, показывает следующий пример. Решается уравнение (1) по формулам Милна (2), (3) и экстраполяционно-интерполяционным формулам

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy_n' - \frac{1}{3}h^2(y''_{n-1} - y_n'') + \frac{1}{6}h^4 y_{(\xi)}^{IV} \quad (6)$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_{n+1} - \frac{2}{3}h^2(2y_n'' + y''_{n+1}) + \frac{2}{45}h^5 y_{(\xi)}^{V} \quad (7)$$

$$y'_{n+1} = y'_{n-3} + \frac{4}{3}h(2y_n'' - y''_{n-1} + 2y''_{n-2}) + \frac{14}{45}h^5 y_{(\xi)}^{V}$$

Формулы (6) и (7) получаются при замене правой части уравнения $y'' = f(x, y, y')$ интерполяционным полиномом

$$P_{(x)} = -\frac{(x - x_n)}{h} f_{n-1} + \frac{(x - x_{n-1})}{h} f_n + \frac{f''_{(\xi)}}{2!}(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

с последующим двукратным интегрированием уравнения

$$y'' = -\frac{(x - x_n)}{h} f_{n-1} + \frac{(x - x_{n-1})}{h} f_n + \frac{f''_{(\xi)}}{2!}(x - x_{n-1})(x - x_n) \quad (8)$$

Для нахождения формулы (6) уравнение (8) интегрируется в пределах от x_n до x и от x_{n-1} до x_{n+1}. Формула (7) получается при помощи интегрирования уравнения (8) в пределах от x_n до x и от x_{n-2} до x_n.

Интерполяционной формуле (7), определяющей накопление ошибок, соответствует характеристическое уравнение $\alpha^2 - 1 = 0$.

Таблица 1

x	y по формулам Милна (2), (3)	y верные	y по формулам (4), (5)	y по формулам (6), (7)	x	y по формулам Милна (2,) (3)	y верные	y по формулам (4), (5)	y по формулам (6), (7)
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	2.6	0.0752	0.0743	0.0743	0.0742
0.1	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	2.7	0.0682	0.0672	0.0672	0.0672
0.2	0.8187	0.8187	0.8187	0.8187	2.8	0.0619	0.0608	0.0608	0.0608
0.3	0.7408	0.7408	0.7408	0.7408	2.9	0.0562	0.0550	0.0550	0.0550
0.4	0.6703	0.6703	0.6703	0.6703	3.0	0.0511	0.0498	0.0498	0.0498
0.5	0.6065	0.6065	0.6065	0.6065	3.1	0.0465	0.0450	0.0450	0.0450
0.6	0.5488	0.5488	0.5488	0.5488	3.2	0.0424	0.0408	0.0408	0.0408
0.7	0.4966	0.4966	0.4966	0.4966	3.3	0.0387	0.0369	0.0369	0.0369
0.8	0.4494	0.4493	0.4493	0.4493	3.4	0.0354	0.0334	0.0334	0.0334
0.9	0.4067	0.4066	0.4066	0.4066	3.5	0.0325	0.0302	0.0302	0.0302
1.0	0.3681	0.3679	0.3679	0.3679	3.6	0.0299	0.0273	0.0273	0.0274
1.1	0.3332	0.3329	0.3329	0.3329	3.7	0.0276	0.0247	0.0247	0.0247
1.2	0.3016	0.3012	0.3012	0.3012	3.8	0.0256	0.0224	0.0224	0.0224
1.3	0.2730	0.2725	0.2725	0.2725	3.9	0.0238	0.0202	0.0202	0.0202
1.4	0.2471	0.2466	0.2466	0.2466	4.0	0.0224	0.0183	0.0183	0.0183
1.5	0.2237	0.2231	0.2231	0.2231	4.1	0.0211	0.0166	0.0166	0.0165
1.6	0.2025	0.2019	0.2019	0.2019	4.2	0.0200	0.0150	0.0150	0.0150
1.7	0.1833	0.1827	0.1827	0.1827	4.3	0.0191	0.0136	0.0136	—
1.8	0.1659	0.1653	0.1653	0.1653	4.4	0.0184	0.0123	0.0123	—
1.9	0.1502	0.1496	0.1496	0.1496	4.5	0.0179	0.0111	0.0111	—
2.0	0.1360	0.1353	0.1353	0.1353	4.6	0.0176	0.0100	0.0100	—
2.1	0.1232	0.1225	0.1225	0.1225	4.7	0.0175	0.0091	0.0091	—
2.2	0.1116	0.1108	0.1108	0.1108	4.8	0.0176	0.0082	0.0082	—
2.3	0.1011	0.1003	0.1003	0.1003	4.9	0.0175	0.0074	0.0074	—
2.4	0.0916	0.0907	0.0907	0.0907	5.0	0.0176	0.0067	0.0067	—
2.5	0.0830	0.0821	0.0821	0.0821	5.1	0.0175	0.0061	0.0061	—
					5.2	0.0176	0.0055	0.0055	—

Его корнями являются $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = -1$. Следовательно, характеристическое уравнение для формулы (7) не имеет кратных корней и корней, больших единицы

Результаты вычислений по формулам (6), (7) с тем же шагом $h = 0.1$ приведены также в табл. 1 (столбцы 4 и 5). Сравнение этих резултатов с вычислениями по формулам Милна показывает, что хотя интерполяционная формула Милна имеет остаточный член порядка h^6, а формула (7) — порядка h^5, формулы (6), (7) дают верные значения y в пределах требуемой точности до значения $x = 4.2$. В то же время формулы Милна дают значения y с ошибкой, начиная с $x = 0.8$, а при $x = 4.2$ ошибка достигает 0.05.

Из всего сказанного следует, что формулы Милна для решения уравнения $y'' = \psi(x, y)$ в ряде случаев могут давать значительное накопление ошибок; поэтому их применение не всегда целесообразно.

Поступила 29 IV 1952

Институт точной механики и вычислительной техники АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Шура-Бура М. Р. Оценки ошибок численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 5. Стр. 575—588.
2. Микеладзе Ш. Е. Обобщение метода численного интегрирования. Труды Тбилисского матем. ин-та. 1940. Т. VII.
3. Милн В. Э. Численный анализ. Изд. иностр. литературы. 1951. Стр. 113.
4. Мухин И. С. Применение интерполяционных полиномов Маркова-Эрмита для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 2.