Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЗАДАЧАМИ О ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

Д. В. Вайнберг

(Киев)

В заметке показано, что уравнение прогибов круглой пластины переменной толщины и уравнение для функции напряжений в случае плоской деформации при любой нагрузке могут быть записаны в виде одного обобщенного уравнения. Решив последнее, можно получить сразу решение задачи об изгибе пластины переменной толщины и задачи о растяжении пластины, толщина которой меняется по иному, но определенному закону.

Дифференциальному уравнению изгиба тонких пластин можно придать в полярных координатах следующую форму:

$$D\triangle\triangle w+\frac{dD}{d\rho}\left[2\frac{\partial^3 w}{\partial\rho^3}+\frac{2+\nu}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\rho\,\partial\theta^2}-\frac{3}{\rho^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right]+$$
$$+\frac{d^2D}{d\rho^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right]=q(\rho,\theta) \qquad (1)$$

где w — прогиб срединной плоскости пластины, $q(\rho,\theta)$ — интенсивность внешней поперечной нагрузки, $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ — жесткость пластин при изгибе, предполагаемая функцией полярной координаты, h, E, ν — толщина пластины, модуль упругости, коэффициент Пуассона,

$$\triangle w=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)w \qquad (2)$$

Интеграл уравнения (1), удовлетворяющий краевым условиям задачи, дает возможность определить усилия в пластине по известным формулам

$$M_\rho=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}+\nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\right)\right] \qquad (3)$$

$$M_\theta=-D\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\rho^2}\right] \qquad (4)$$

$$M_{\rho\theta}=\quad(1-\nu)D\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\,\partial\theta}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right] \qquad (5)$$

С другой стороны, задача о плоском напряженном состоянии той же пластины переменного сечения приводится к определению функции напряжений $\varphi(\rho,\theta)$ из уравнения (предполагается, что деформация пластины может быть описана приближенно уравнением плоской задачи теории упругости)

$$N\triangle\triangle\varphi+\frac{dN}{d\rho}\left[2\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho^3}+\frac{2-\nu}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\rho\,\partial\theta^2}-\frac{3}{\rho^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right]+$$
$$+\frac{d^2N}{d\rho^2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}-\nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right)\right]=f(\rho,\theta) \qquad (6)$$

где $N=N(\rho)=(Eh)^{-1}$ — величина, обратная жесткости пластины при растяжении, $f(\rho,\theta)$ — функция, зависящая от массовых сил, лежащих в срединной плоскости пластины.

Располагая функцией напряжений, удовлетворяющей уравнению (6) и краевым условиям задачи, нетрудно определить:

нормальное радиальное усилие

$$P_\rho = \sigma_\rho h = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} \tag{7}$$

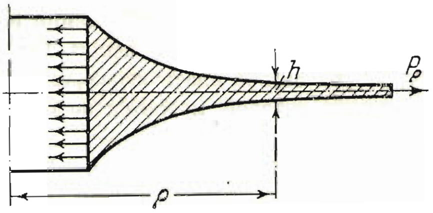
нормальное окружное усилие

$$P_\theta = \sigma_\theta h = \frac{\partial\varphi^2}{\partial\rho^2} \tag{8}$$

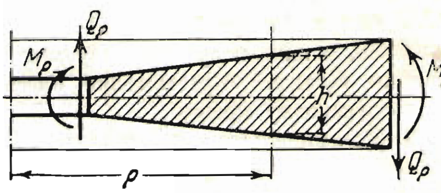
касательное усилие

$$T = \sigma_{\rho\theta} h = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \tag{9}$$

Сравнивая между собой уравнение (1) относительно функции прогибов w и уравнение (6) относительно функции напряжений φ, заключаем, что левые части этих



Фиг. 1



Фиг. 2

уравнений одинаковы по своей структуре и различаются только знаком при коэффициенте Пуассона и природой функций N и D, характеризующих жесткость пластины.

Поэтому обе задачи могут быть объединены в одном уравнении

$$D(\rho)\,\triangle\triangle\,\Phi + \frac{dD(\rho)}{d\rho}\left[2\frac{\partial^3\Phi}{\partial\rho^3} + \frac{2+\varkappa^*}{\rho}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\rho\,\partial\theta^2} - \frac{3}{\rho^3}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right] +$$

$$+ \frac{d^2D(\rho)}{d\rho^2}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \varkappa^*\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right)\right] = \phi(\rho,\,\theta) \tag{10}$$

Здесь введены функция усилий $\Phi(\rho,\theta)$, параметр $\varkappa^*$ и функция жесткости $D(\rho)$. В случае плоского напряженного состояния

$$\Phi(\rho,\,\theta) = \varphi, \qquad \varkappa^* = -\nu, \qquad D(\rho) = (Eh)^{-1}$$

в задаче изгиба пластин

$$\Phi(\rho,\,\theta) = w, \qquad \varkappa^* = \nu, \qquad D(\rho) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}$$

Отыскав интеграл однородного уравнения (10) при определенной функции жесткости $D(\rho)$, мы тем самым получили одновременно функцию φ, характеризующую плоское напряженное состояние кольцевого диска, толщина которого h меняется по закону

$$h = \frac{1}{ED(\rho)} \tag{11}$$

и функцию прогибов w кольцевой или круглой пластины с толщиной, меняющейся по закону

$$h = \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{E}}\,D^{1/3}(\rho) \tag{12}$$

Так, например, функция жесткости

$$D(\rho) = l\rho^2 \tag{13}$$

где l — постоянное число, соответствует в плоской задаче диску, толщина которого убывает к периферии (фиг. 1), а в случае изгиба — пластине, толщина которой возрастает к периферии (фиг. 2).

Каковы бы ни были краевые условия круглой или кольцевой пластины, решение однородного уравнения (10) целесообразно искать в виде ряда

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\rho) \cos n\theta \tag{14}$$

После подстановки (14) в (10) получим

$$DX_n^{\mathrm{IV}} + 2\left(\frac{D}{\rho} + \frac{dD}{d\rho}\right) X_n''' + \left(\frac{d^2D}{d\rho^2} + \frac{2+\varkappa^*}{\rho}\frac{dD}{d\rho} - \frac{1+2n}{\rho^2} D\right) X_n'' +$$
$$+ \left(\frac{\varkappa^*}{\rho}\frac{d^2D}{d\rho^2} - \frac{1+2n^2}{\rho^2}\frac{dD}{d\rho} + \frac{1+2n^2}{\rho^3} D\right) X_n' +$$
$$+ n^2\left(-\frac{\varkappa^*}{\rho^2}\frac{d^2D}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho^3}\frac{dD}{d\rho} + \frac{n^2-4}{\rho^4} D\right) X_n = 0 \tag{15}$$

Решение линейного дифференциального уравнения (14) при любом законе изменения жесткости $D(\rho)$ отсутствует.

Для профилей пластины, определяемых выражением

$$D(\rho) = A\rho^{-m} \tag{16}$$

где A, m — постоянные, уравнение (15) переходит в

$$X_n^{\mathrm{IV}} + \frac{2(1-m)}{\rho} X_n''' - \frac{1+2n^2+m(1+\varkappa^*-m)}{\rho^2} X_n'' +$$
$$+ \frac{(1+m)(1+2n^2+m\varkappa^*)}{\rho^3} X_n' - \frac{n^2[4-n^2+m(3+m\varkappa^*+\varkappa^*)]}{\rho^4} X_n = 0 \tag{17}$$

Введем обозначения

$$\eta = \frac{\rho}{R}, \quad \alpha = 1 + n^2 + 0.5(1+\varkappa^*)m + 0.25m^2$$
$$\beta = \frac{1}{16}(2+m)^4 + \frac{1}{4}(2+m)^2[2n^2 - m(1-\varkappa^*)] +$$
$$+ n^2[n^2 - 2 - m - (1+m)(2+m\varkappa^*)] \tag{18}$$
$$a^2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2-\beta}, \qquad b^2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2-\beta}$$
$$c^2 = 3 + 0.5m, \qquad \delta = \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\beta}}{2}}, \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\beta}}{2}}$$

Тогда решение уравнения (17) может быть представлено в виде:

если $\alpha^2 > \beta = 0$

$$X_n(\eta) = B_1\eta^{a+c-2} + B_2\eta^{-a+c-2} + B_3\eta^{b+c-2} + B_4\eta^{-b+c-2} \tag{19}$$

если $\alpha^2 - \beta < 0$

$$X_n(\eta) = \eta^{1+1.5m}\{\eta^{\delta}[B_1\cos(\varepsilon\log\eta) + B_2\sin(\varepsilon\log\eta)] +$$
$$+ \eta^{-\delta}[B_3\cos(\varepsilon\log\eta) + B_4\sin(\varepsilon\log\eta)] \tag{20}$$

К решению (19) или (20) должен быть присоединен частный интеграл уравнения (10), зависящий от структуры его правой части.

Выражения (19) и (20) определяют с точностью до постоянных интегрирования $B_1, B_2, \ldots$ функцию усилий $\Phi(\rho, \theta)$ в задачах изгиба или растяжения круглых пластин профиля (16).

Соответствие формы решения (19) или (20) конкретной задаче теории упругости зависит, как видно, от знака выражения

$$\alpha^2 - \beta = (m+2)(3\varkappa^* + 2)n^2 + 0.25(1-\varkappa^*)^2 m^2 \tag{21}$$

Для ориентации приводим некоторые критерии.

Решение (19) относится к случаю изгиба пластин, когда

1) $m \geqslant 0$

2) $-\frac{2}{3} < m < 0$

3) $-\frac{2}{3}\nu^{-1} < m < -\frac{2}{3}$ при $n < 0.375(1-\nu)m$

и к плоской задаче, если

2) $0 < m \leqslant \frac{2}{3}\nu^{-1}$

3) $-\frac{2}{3} < m < 0$ при больших n

Решение (20) относится к случаю изгиба пластин, когда

$$-2 < m < -\frac{2}{3} \text{ при больших } n$$

и к плоской задаче, если

$$-\frac{2}{3} > m > \frac{2}{3}\nu^{-1}$$

В заключение заметим, что известные решения частных задач об изгибе, растяжении и колебании [1—3] круглых пластин «гиперболического» профиля заключаются как частные случаи в решении (19).

Поступила 22 I 1952

Институт строительной механики
Академии Наук УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин А. В. Расчет на статический изгиб и на вибрацию дисков гиперболического профиля. ЖТФ. 1937. Т. VII. Вып. 17.
2. Уманский Э. С. Изгиб диска гиперболического профиля контурной нагрузкой, обладающей циклической симметрией. Труды Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. № 15.
3. Итенберг Б. З. Напряженное состояние диска гиперболического профиля под действием несимметричной нагрузки. Труды Ин-та строит. механики АН УССР. 1950. № 13.