

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

К. А. К и т о в е р

(Ленинград)

При решении многих задач теории упругости существенную помощь может оказать возможность использования ряда бигармонических функций, каждая из которых удовлетворяет заданным граничным условиям на значительной части контура тела.

Такие функции, связанные общим законом образования, условимся называть системой функций, соответствующей данным граничным условиям.

Цель данной работы — показать возможность определения в замкнутом виде ряда систем, которые могут быть использованы при решении задач об изгибе тонких плит, плоской и осесимметричной задач теории упругости.

Принципиальная возможность построения указанных систем основывается на следующих соображениях.

Приняв для прямоугольной области, что функции системы определяются выражением

$$\varphi(x, y) = (A \cos kx + B \sin kx + Cx \cos kx + Dx \sin kx) e^{ky} \quad (0.1)$$

и что граничные условия на двух противоположных краях области имеют вид:

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m a_{ij} \frac{\partial^{i+j} \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \quad \sum_{i=0}^{l_1} \sum_{j=0}^{m_1} b_{ij} \frac{\partial^{i+j} \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} = 0 \quad (0.2)$$

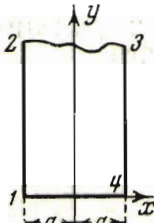
получим возможность составить четыре однородных линейных уравнения относительно A, B, C, D . Приравняв к нулю определитель из коэффициентов при неизвестных, получим трансцендентное уравнение, которое будем называть характеристическим уравнением данной системы. Каждый корень характеристического уравнения дает возможность найти три зависимости между коэффициентами A, B, C, D и, следовательно, определяет с точностью до постоянного множителя одну из функций искомой системы (0.2). Аналогичные выкладки могут быть проведены и для других областей путем выбора соответствующей системы координат.

Ниже приведены основные зависимости ряда систем и показана возможность их использования для решения задач теории упругости при необходимости удовлетворять граничным условиям по всему контуру. Окончательное решение будет приближенным, так как на части контура граничные условия выполняются не вполне точно.

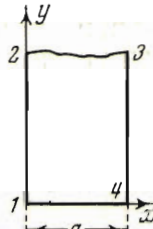
Отметим, что системы функций, соответствующие условию отсутствия напряжений при плоской задаче и условиям жесткого заземления для задачи об изгибе плиты с двумя параллельными краями, были получены П. Ф. Папковичем [1-3]. Для плоской задачи эти функции были табулированы Д. Фаддл [4], который использовал их для определения напряжений в косынках ферм.

§ 1. Основные соотношения. Ниже приводятся характеристические уравнения и соотношения между коэффициентами A, B, C, D , позволяющие определить функции ряда систем, соответствующих наиболее часто встречающимся в практике решения задач теории упругости граничным условиям.

В последующем функции φ отождествляются для плоской и осесимметричной задач теории упругости с соответствующими функциями напряжений, а для задачи об изгибе тонких упругих плит — с прогибами срединной поверхности.



Фиг. 1



Фиг. 2

А. Системы, соответствующие граничным условиям на параллельных кромках. Функции имеют следующий вид.

а) При одинаковых граничных условиях на кромках (фиг. 1)

$$\varphi = \left(A \begin{matrix} \cos kx \\ \sin kx \end{matrix} + B kx \begin{matrix} \sin kx \\ \cos kx \end{matrix} \right) e^{ky} \quad (1.1)$$

б) При различных граничных условиях на кромках (фиг. 2)

$$\varphi = (A \cos kx + B kx \sin kx + C \sin kx + D kx \cos kx) e^{ky} \quad (1.2)$$

В последующем принято $t = ka$.

1. Плоская задача теории упругости

1. Кромки свободны от напряжений (система П. Ф. Папковича [2]):

$$\sin 2t = \mp 2t, \quad A = -Bt \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{ctg} t} \quad (1.3)$$

2. Кромки защемлены (перемещения u, v равны нулю).

а) Плоская деформация (ν — коэффициент Пуассона):

$$\sin 2t = \pm \frac{2t}{3-4\nu}, \quad A = B \left[\mp (1-2\nu) + t \frac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t} \right] \quad (1.4)$$

б) Плоское напряженное состояние:

$$\sin 2t = \pm \frac{2(1+\nu)t}{3-\nu}, \quad A = B \left[\mp \frac{1+\nu}{1-\nu} + t \frac{\operatorname{ctg} t}{\operatorname{tg} t} \right] \quad (1.5)$$

3. Кромка 1—2 свободна от напряжений, а кромка 3—4 защемлена.

а) Плоская деформация:

$$\cos 2t = \frac{(2t)^2}{2(3-4\nu)} - \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu} \quad (1.6)$$

$$A = 0, \quad C = -D, \quad B = D \frac{(1-2\nu) \sin t + t \cos t}{2(1-\nu) \cos t - t \sin t}$$

б) Плоское напряженное состояние:

$$\cos 2t = \frac{1+\nu}{3-\nu} (2t)^2 - \frac{4+(1-\nu)^2}{4-(1-\nu)^2}$$

$$A = 0, \quad C = -D, \quad B = D \frac{(1-\nu) \sin t + (1+\nu)t \cos t}{2 \cos t - (1+\nu)t \sin t} \quad (1.7)$$

II. Задача об изгибе тонкой упругой плиты

1. Кромки свободны от усилий:

$$\sin 2t = \pm \frac{2(1-\nu)t}{3+\nu}, \quad A = B \left(\pm \frac{2}{1-\nu} - t \operatorname{ctg} t \right) \quad (1.8)$$

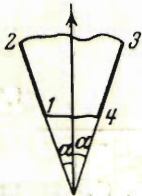
2. Кромки защемлены (система П. Ф. Папковича [3]):

$$\sin 2t = \mp 2t, \quad A = -Bt \operatorname{ctg} t \quad (1.9)$$

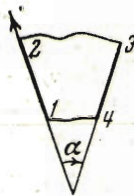
3. Кромка 1-2 защемлена, а кромка 3-4 свободна от усилий:

$$\cos 2t = \frac{(1-\nu)(2t)^2}{2(3+\nu)} - \frac{5+2\nu+\nu^2}{(1-\nu)(3+\nu)} \quad (1.10)$$

$$A = 0, \quad C = -D, \quad B = -D \frac{(1+\nu) \sin t + (1-\nu)t \cos t}{2 \cos t - (1-\nu)t \sin t}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Б. Системы, соответствующие граничным условиям на двух пересекающихся прямых. Функции имеют следующий вид.

а) При одинаковых граничных условиях на кромках 1-2 и 3-4 (фиг. 3)

$$\varphi = \left[A \cos k\theta + B \frac{\cos(k-2)\theta}{\sin(k-2)\theta} \right] r^k \quad (1.11)$$

б) При различных граничных условиях на кромках 1-2 и 3-4 (фиг. 4)

$$\varphi = [A \cos k\theta + B \sin k\theta + C \cos(k-2)\theta + D \sin(k-2)\theta] r^k \quad (1.12)$$

В последующем принято $t = 2(k-1)\alpha$.

I. Плоская задача теории упругости

1. Кромки свободны от напряжений:

$$\sin t = \mp \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} t, \quad A = -B \frac{\cos(k-2)\alpha / \cos k\alpha}{\sin(k-2)\alpha / \sin k\alpha} \quad (1.13)$$

2. Кромки защемлены (перемещения u, v равны нулю).

а) Плоская деформация:

$$\sin t = \pm \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha(3-4\nu)} t, \quad A = -B \frac{k-4+4\nu}{k} \frac{\cos(k-2)\alpha / \cos k\alpha}{\sin(k-2)\alpha / \sin k\alpha} \quad (1.14)$$

б) Плоское напряженное состояние:

$$\sin t = \pm \frac{(1-\nu) \sin 2\alpha}{2\alpha(3-\nu)} t, \quad A = -B \frac{k(1+\nu)-4}{k(1+\nu)} \frac{\cos(k-2)\alpha / \cos k\alpha}{\sin(k-2)\alpha / \sin k\alpha} \quad (1.15)$$

3. Кромка 1-2 свободна от напряжений, а кромка 3-4 защемлена.

а) Плоская деформация:

$$\cos t = \frac{1}{2(3-4\nu)} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} t \right)^2 - \frac{4(1-\nu)^2 + (1-2\nu)^2}{3-4\nu} \quad (1.16)$$

$$A = -C, \quad B = -\frac{k-2}{k} D, \quad C = -D \frac{[k-4(1-\nu)] \sin(k-2)\alpha - (k-2) \sin k\alpha}{[k-4(1-\nu)] \cos(k-2)\alpha - k \cos k\alpha}$$

б) Плоское напряженное состояние:

$$\cos t = \frac{1+\nu}{2(3+\nu)} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} t \right)^2 - \frac{4+(1-\nu)^2}{4-(1-\nu)^2} \quad (1.17)$$

$$A = -C, \quad B = -\frac{k-2}{k} D, \quad C = -D \frac{[k(1+\nu)-4] \sin(k-2)\alpha - (k-2)(1+\nu) \sin k\alpha}{[k(1+\nu)-4] \cos(k-2)\alpha - k(1+\nu) \cos k\alpha}$$

II. Задача об изгибе тонкой упругой плиты

1. Кромки свободны от усилий:

$$\sin t = \mp \frac{(1-\nu) \sin 2\alpha}{2\alpha(3+\nu)} t, \quad A = B \frac{4-(1-\nu)k \cos(k-2)\alpha / \cos k\alpha}{(1-\nu)k \sin(k-2)\alpha / \sin k\alpha} \quad (1.18)$$

2. Кромки жестко защемлены:

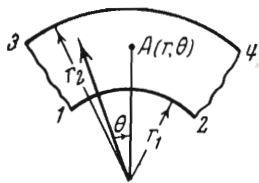
$$\sin t = \mp \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} t, \quad A = -B \frac{\cos(k-2)\alpha / \cos k\alpha}{\sin(k-2)\alpha / \sin k\alpha} \quad (1.19)$$

3. Кромка 1-2 защемлена, а кромка 3-4 свободна от усилий:

$$\cos t = \frac{1-\nu}{2(3+\nu)} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} t \right)^2 - \frac{5+2\nu+\nu^2}{(1-\nu)(3+\nu)} \quad (1.20)$$

$$A = -C, \quad B = -\frac{k-2}{k} D, \quad C = D \frac{(1-\nu)(k-2) \sin k\alpha + [4-(1-\nu)k] \sin(k-2)\alpha}{(1-\nu)k \cos k\alpha + [4-(1-\nu)k] \cos(k-2)\alpha}$$

Заметим, что кососимметричные группы систем (1.8), (1.9), и (1.18), (1.19) можно использовать для расчета плит, у которых одна кромка свободно оперта, а другая защемлена или свободна от усилий.



Фиг. 5

В. Системы, соответствующие граничным условиям на двух [концентрических дугах окружностей. В последующем для сокращения письма вводим следующие обозначения (фиг. 5):

$$\lambda_1 = 1 - \nu, \quad \lambda_2 = 1 + \nu, \quad \mu = \frac{r_2}{r_1}, \quad \eta = \ln \frac{r}{r_1} \quad (1.21)$$

$$\eta_0 = \ln \mu, \quad t = k\eta_0, \quad S_1 = \mu^2 - 1, \quad S_2 = \mu^2 + 1$$

Для данных систем функции имеют вид:

$$\varphi = (A \cos k\eta + B \sin k\eta + Cr^2 \sin k\eta + Dr^2 \cos k\eta) e^{k\eta} \quad (1.22)$$

1. Плоская задача теории упругости

1. Кромки свободны от напряжений:

$$[2k^4 S_1^2 + k^2 (3S_1^2 - S_2^2) - 4\mu^2] + 4\mu^2 (k^2 + 1) \cos 2t = 0$$

$$A = -r_1^2 D, \quad B = -r_1^2 \left(C + \frac{2}{k} D \right), \quad C = -D \frac{k S_2 \sin t - (2 + k^2) S_1 \cos t}{(2\mu^2 + k^2 S_1) \sin t + k S_1 \cos t} \quad (1.23)$$

2. Кромки защемлены (перемещения u и v равны нулю).

а) Плоское напряженное состояние:

$$[2k^2 \lambda_2^2 S_1^2 - 8\lambda_1 S_1^2 - 4(\lambda_1 \mu^2 + 2)(\lambda_1 + 2\mu^2)] + [4(\lambda_1 \mu^2 + 2)(\lambda_1 + 2\mu^2) - 8\lambda_1 S_1^2] \cos 2t = 0$$

$$B = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} r_1^2 C + 2r_1^2 D, \quad A = \frac{4C}{k\lambda_1^2} r_1^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} r_1^2 D \quad (1.24)$$

$$C = -D \frac{k\lambda_2 S_1 \sin t + 2\lambda_1 S_1 \cos t}{2(\lambda_1 \mu^2 + 2) \sin t - k\lambda_2 S_1 \cos t}$$

б) Плоская деформация:

$$\begin{aligned} & \{-4[(1-2\nu)\mu^2 + 2\lambda_1][(1-2\nu) + 2\lambda_1\mu^2] + 2k^2S_1^2 - 8(1-2\nu)\lambda_1S_1^2\} + \\ & + \{4[(1-2\nu)\mu^2 + 2\lambda_1][2\lambda_1\mu^2 + (1-2\nu)] - 8(1-2\nu)\lambda_1S_1^2\} \cos 2t = 0 \\ & A = \frac{4\lambda_1C - kD}{\lambda_1k} r_1^2, \quad B = \frac{2(1-2\nu)D - kC}{\lambda_1k} r_1^2, \quad (1.25) \\ & C = -D \frac{S_1[k \sin t + 2(1-2\nu) \cos t]}{[2(1-2\nu)\mu^2 + 4\lambda_1] \sin t - kS_1 \cos t} \end{aligned}$$

3. Кромка 1-2 свободна от усилий, а кромка 3-4 закреплена.

а) Плоское напряженное состояние:

$$\begin{aligned} \cos 2t &= \frac{(\mu^2\lambda_2 - \lambda_1)^2}{2\lambda_1\mu^2(2 + \lambda_1)} k^2 + \frac{\lambda_1 - 2 - 4\mu^2}{2 + \lambda_1} \quad (1.26) \\ A &= -Dr_1^2, \quad B = -r_1^2 \left(C + \frac{2}{k} D \right) \\ C &= -D \frac{k(\lambda_2\mu^2 - \lambda_1) \sin t + 2\lambda_1S_2 \cos t}{2\lambda_1\mu^2 \sin t - k(\lambda_2\mu^2 - \lambda_1) \cos t} \end{aligned}$$

б) Плоская деформация:

$$\begin{aligned} \cos 2t &= \frac{(\mu^2 - \lambda_1)^2 k^2}{2\lambda_1\mu^2(3 - 4\nu)} - \frac{4\mu^2(1 - 2\nu) + 1}{3 - 4\nu} \quad (1.27) \\ A &= -r_1^2 D, \quad B = -r_1^2 \left(C + \frac{2}{k} D \right) \\ C &= -D \frac{k(\mu^2 - \lambda_1) \sin t + 2[\mu^2(1 - 2\nu) + \lambda_1] \cos t}{2(1 - 2\nu)\mu^2 \sin t - k(\mu^2 - \lambda_1) \cos t} \end{aligned}$$

II. Задача об изгибе тонкой упругой плиты

1. Кромки плиты жестко закреплены:

$$\begin{aligned} \sin t &= \pm \frac{S_1}{2\mu\eta_0} t \\ A &= -Dr_1^2, \quad B = -r_1^2 \left(\frac{2D}{k} + C \right), \quad C = \left(\frac{2}{kS_1} - \operatorname{ctg} t \right) D \quad (1.28) \end{aligned}$$

2. Плита свободна опира по дуговым кромкам:

$$\begin{aligned} k^2 \left[8 + \frac{S_1^2 \lambda_1 (4 - \lambda_1)}{\mu^2} \right] + 2(2 - \lambda_1)^2 - 2[4k^2 + 2(2 - \lambda_1)^2] \cos 2t &= 0 \\ A &= -Dr_1^2, \quad B = \frac{2(2 - \lambda_1)D + (4 - \lambda_1)kC}{k\lambda_1} r_1^2 \quad (1.29) \\ C &= -D \left[\frac{\lambda_1 S_1 \operatorname{ctg} t}{4 + \lambda_1 S_1} + \frac{2(2 - \lambda_1)}{k(4 + \lambda_1 S_1)} \right] \end{aligned}$$

3. Кромка 1-2 закреплена, а кромка 3-4 свободна опира:

$$\begin{aligned} k^2 \left(4S_1 - \frac{\lambda_1}{\mu^2} S_1^2 \right) - 2(2 - \lambda_1)(1 - \cos 2t) - 4k \sin 2t &= 0 \\ A &= -Dr_1^2, \quad B = -r_1^2 \frac{2D + kC}{k}, \quad C = D \left(\frac{2}{kS_1} - \operatorname{ctg} t \right) \quad (1.30) \end{aligned}$$

4. Кромка 1-2 закреплена, а кромка 3-4 свободна от усилий:

$$\begin{aligned} \left[\frac{4\lambda_1^2}{\mu^2} + 16(2 - \lambda_1) + k^2(a^2 + b^2 - 4\lambda_1^2 \frac{S_1^2}{\mu^2}) - 2\lambda_1^2 \frac{S_1^2}{\mu^2} k^4 \right] + \\ + \left[k^2(a^2 - b^2) + \frac{4\lambda_1(4 - \lambda_1)}{\mu^2} \right] \cos 2t &= 0 \quad (1.31) \\ A &= -Dr_1^2, \quad B = -r_1^2 \frac{2D + kC}{k} \\ C &= D \frac{(4\mu^2 + \lambda_1 S_1 k^2 - 2\lambda_1) \sin t + k(4\mu^2 - \lambda_1 S_1) \cos t}{(4\mu^2 + \lambda_1 S_1 k^2) \cos t - k(4\mu^2 - \lambda_1 S_1) \sin t} \end{aligned}$$

5. Кромка 1—2 свободна оперта, а кромка 3—4 свободна от усилий:

$$\left\{ (2 - \lambda_1) (4\mu^2 - \lambda_1) + \left(\frac{k}{\mu} \right)^2 \left[\frac{1}{2} (4 + \lambda_1)^2 (\mu^4 - 1) - 8 - 2\lambda_1^2 (2\mu^2 - 3) - \lambda_1 S_1^2 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \lambda_1 k^4 \frac{S_1}{\mu^2} (4 + \lambda_1 S_1) \right\} + (4 - \lambda_1) [(2 - \lambda_1) + 2k^2 (3 - \lambda_1)] \cos 2t - \\ - 2(4 - \lambda_1) k (1 + k^2) \sin 2t = 0 \quad (1.32)$$

$$A = -Dr_1^2, \quad B = \frac{2(2 - \lambda_1)D + (4 - \lambda_1)kC}{k\lambda_1} r_1^2$$

$$C = -D \frac{[4 - \lambda_1 (2 + k^2)] S_1 \cos t - k(4 - \lambda_1) S_2 \sin t}{[4(\mu^2 - k^2) - \lambda_1 (2\mu^2 + k^2 S_1)] \sin t + k(4 - \lambda_1) S_1 \cos t}$$

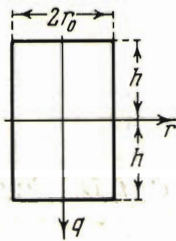
6. Обе кромки свободны от усилий:

$$\left\{ [8(2 - \lambda_1) + k^2(4 - \lambda_1)^2] \left(\mu^2 + \frac{1}{\mu^2} \right) - \lambda_1^2 \frac{S_1^2}{\mu^2} k^2 (2 + k^2) + 2\lambda_1^2 \right\} - \\ - 2(4 - \lambda_1)^2 (1 + k^2) \cos 2t = 0 \quad (1.33)$$

$$A = \frac{r_1^2}{k\lambda_1} (4C - \lambda_1 k D), \quad B = \frac{r_1^2}{k\lambda_1} [2(2 - \lambda_1)D - \lambda_1 k C]$$

$$C = -D \frac{[4 - \lambda_1 (2 + k^2)] S_1 \cos t - k(4 - \lambda_1) S_2 \sin t}{[4S_1 - \lambda_1 (2\mu^2 + k^2 S_1)] \sin t + k(4 - \lambda_1) S_1 \cos t} \quad (1.34)$$

очевидно, что для рассматриваемых систем функций совмещение начала отсчета переменной η с наружной кромкой 3—4 повлечет за собой изменение знака η_0 и замену величины μ на μ^{-1} . Если при этом поменять местами граничные условия на кромках, то все соотношения (1.21) — (1.34) останутся в силе.



Фиг. 6

Естественно, что характеристические уравнения (1.23), (1.24), (1.28), (1.29) и (1.33), соответствующие одинаковым граничным устройствам на дуговых кромках, инвариантны относительно подобного изменения начала отсчета.

Г. Системы, соответствующие граничным условиям на боковой поверхности или торцах кругового цилиндра. Для осесимметричной деформации круглого цилиндра могут быть определены следующие системы функций.

1. Боковая поверхность цилиндра (фиг. 6) свободна от напряжений:

$$\varphi = [AJ_0(kr) + BkrJ_1(kr)] \frac{\operatorname{ch} kr}{\operatorname{sh} kr} \quad (1.35)$$

Вводя обозначение $kr_0 = t$, найдем

$$f(t) = J_0(t) - \beta J_1(t) = 0, \quad A = -B \frac{(2\nu - 1) J_0(t) + t J_1(t)}{J_0(t) - t^{-1} J_1(t)} \quad (1.36)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{2(1 - \nu)}{t^2} - 1} \quad (1.37)$$

Аналогичная система функций для тонкостенного полого цилиндра была рассмотрена В. К. Прокоповым [5].

2. Торцы цилиндра свободны от напряжений (фиг. 4):

$$\varphi = \left[A \frac{\sin kx}{\cos kx} + Bkx \frac{\cos kx}{\sin kx} \right] J_0(ikr) \quad (1.38)$$

Обозначив $kh = t$, получим

$$\sin 2t = \mp 2t, \quad A = \mp B \left[(2\nu - 1) \mp t \operatorname{ctg} t \right] \quad (1.39)$$

§ 2. Определение корней характеристических уравнений. Из приведенных выше характеристических уравнений различных систем наиболее часто повторяются уравнения вида

$$\sin z = az, \quad \cos z = bz^2 + c \tag{2.1}$$

где a, b, c — вещественные числа. Уравнения (2.1) являются частными случаями уравнения

$$u_0 + u_1 \sin z + u_2 \cos z = 0 \tag{2.2}$$

где через u_0, u_1, u_2 обозначены степенные полиномы от переменной z .

Кроме перечисленных уравнений, следует рассмотреть характеристическое уравнение системы (1.35).

А. Уравнение $\sin z = az$. Частный случай такого уравнения при $a = \pm 1$ был рассмотрен П. Ф. Папковичем [2,3] и рядом других авторов. Если $|a| < 1$, то уравнение имеет один или несколько вещественных корней; равным образом, если $|a| > 1$, то рассматриваемое уравнение имеет один чисто мнимый корень. Наибольшее значение имеют комплексные корни, число которых при любом a бесконечно.

Обозначив

$$z = p + iq, \quad \delta = \sqrt{1 - \left(\frac{aq}{\operatorname{ch} q}\right)^2} \tag{2.3}$$

найдем

$$\sin \frac{\delta \operatorname{ch} q}{a} = \pm \delta \tag{2.4}$$

Обе части равенства (2.4) зависят от вещественной переменной q . Вид графиков этих функций для системы (1.8) при $\nu = 0.25$ показан на фиг. 7. Корням рассматриваемого уравнения отвечают точки пересечения кривых, отмеченные на чертеже кружками; число таких пересечений при любом a бесконечно.

Аналитическое определение корней проще всего может быть произведено по следующим формулам:

Первое приближение (плюс или минус в зависимости от знака a)

$$p_j' = \frac{\pi}{2} (4j \pm 1), \quad q_j' = \operatorname{arc} \operatorname{ch} \frac{ap_j'}{\sin p_j'} \quad (j = 1, 2, \dots) \tag{2.5}$$

второе приближение

$$p_j'' = p_j' - \operatorname{arc} \sin \frac{aq_j'}{\operatorname{sh} q_j'}, \quad q_j'' = \operatorname{arc} \operatorname{ch} \frac{ap_j''}{\sin p_j''} \tag{2.6}$$

Аналогично определяются последующие приближения. Ниже приводятся первые 10 значений параметра t для системы (1.8) при $\nu = 0.25$, вычисленные по этим формулам:

j	Симметричная группа	Кососимметричная группа
1	$3.8345 + 0.5966 i$,	$2.2422 + 0.1757 i$
2	$6.9996 + 0.9255 i$,	$5.4190 + 0.7904 i$
3	$10.1542 + 1.1162 i$,	$8.5777 + 1.0303 i$
4	$13.3042 + 1.2530 i$,	$11.7296 + 1.1894 i$
5	$16.4519 + 1.3598 i$,	$14.8782 + 1.3092 i$

В. Уравнение $\cos z = bz^2 + c$. Вещественные корни данного уравнения определяются пересечением косинусоиды и параболы. Число таких корней ограничено и для рассмотренных выше систем равно единице. Число комплексных корней бесконечно, что может быть показано следующим образом. Обозначив

$$z = p + iq$$

$$\xi = b(p^2 - q^2) + c = -\frac{2q^2 \operatorname{cth}^2 q}{6} + \sqrt{4q^2 \operatorname{cth}^2 q \left[q^2 \left(\frac{\operatorname{cth}^2 q}{b^2} - 1 \right) + \frac{c}{b} \right] + \operatorname{ch}^2 q} \quad (2.7)$$

найдем

$$\cos p = \frac{\xi}{\operatorname{ch} q} \quad (2.8)$$

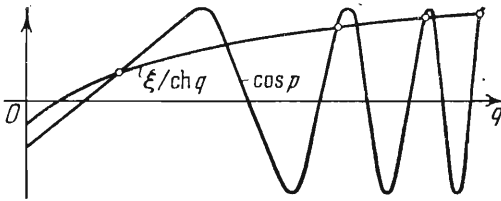
Вид графиков частей этого равенства показан на фиг. 8 для системы уравнений (1.10) при $\nu = 0.25$.

В качестве первого приближения для вещественной части корней уравнения целесообразно принять

$$p_1' = \frac{3}{2} \pi, \quad p_j' = 2\pi j \quad (j = 2, 3, \dots) \quad (2.9)$$

Мнимая часть корня в первом приближении находится из трансцендентных уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} q_1' &= 3\pi b q_1' \\ \operatorname{ch} q_j' + (q_j')^2 &= b(2\pi j)^2 - c \end{aligned} \quad (2.10)$$



Фиг. 8

Второе приближение находим по формуле

$$z'' = z' + \frac{\cos z' - b(z_1')^2 - c}{(\sin z' + 2bz')} \quad (2.11)$$

Последующие приближения берутся аналогично. Приведем некоторые корни системы (1.10), вычисленные при $\nu = 0.25$:

$$t_1 = 2.5019 + 0.5401 i, \quad t_3 = 9.1765 + 2.1774 i$$

$$t_2 = 5.9619 + 1.7298 i, \quad t_4 = 12.3611 + 2.4817 i$$

$$t_5 = 15.5319 + 2.7084 i$$

С. Уравнение $u_0 + u_1 \sin z + u_2 \cos z = 0$. Для рассмотренных выше уравнений было показано наличие бесчисленного множества комплексных корней. Подобное заключение весьма вероятно и для рассматриваемого уравнения. В самом деле, левая часть уравнения, рассматриваемая как функция от комплексной переменной z , имеет одну существенно особую точку $z = \infty$ и, следовательно, на основании теоремы Пикара принимает в окрестности этой точки любое значение (за исключением быть может одного) бесчисленное число раз. Поэтому для рассматриваемого уравнения целесообразно, не проводя исследования, непосредственно определять корни в предположении, что последние существуют. Для нахождения корней удобно пользоваться методом последовательных приближений Ньютона. Для первого приближения назначаем следующие значения вещественной части корня:

а) степень u_1 больше степени u_2 :

$$p_j' = \frac{1}{2} \pi (4j \pm 1) \quad (2.12)$$

где плюс, если u_0 и u_1 имеют разные знаки;

б) степень u_2 больше степени u_1 :

$$p_j' = \pi(2j - 1) \quad \text{или} \quad p_j' = 2\pi j \tag{2.13}$$

причем первое, если u_0 и u_2 имеют одинаковые знаки.

Мнимая часть корней в первом приближении находится из соответствующих трансцендентных уравнений. Заметим, что для некоторых из рассматриваемых выше систем член u_0 с ростом z меняет знак. Подобное явление обычно ведет к потере одного корня в окрестности точки, соответствующей нулевому значению u_0 .

Многочисленные примеры определения корней для частных значений рассматриваемых систем показали эффективность применения формул (2.12) и (2.13).

D. Уравнение системы (1.35). Заметив, что с ростом t коэффициент β (1.37) в уравнении (1.36) стремится к значению $\pm i$, можно в первом приближении рассматривать уравнение

$$F = J_0(t) \pm iJ_1(t) = 0 \tag{2.14}$$

Пользуясь таблицами функций $J_0(t)$ и $J_1(t)$ для комплексных значений t и построив два семейства кривых $\text{Re } F = 0$, $\text{Im } F = 0$, найдем графически в первом приближении значения корней уравнения (2.14). Приняв их за отправные точки для уравнения (1.36) и используя метод Ньютона, можно определить корни уравнения (1.36) с любой степенью точности. Приводим первые три корня уравнения (2.14) и соответствующие им значения $J_0(t)$ и $J_1(t)$:

j	t	$J_0(t)$	$J_1(t)$
1	$2.6967 + 1.3632 i$	$-0.46646 - 0.72581 i$	$0.72226 - 0.54248 i$
2	$6.0512 + 1.6381 i$	$0.52040 + 0.61884 i$	$-0.62393 + 0.53537 i$
3	$9.2616 + 1.8289 i$	$-0.53607 - 0.59800 i$	$0.60090 - 0.54222 i$

§ 3. Применение функций φ_j к решению задач теории упругости. В качестве примера рассмотрим клин (фиг. 9) с жестко защемленной дуговой кромкой, находящийся в плоском напряженном состоянии под действием пары сил, приложенной к вершине.

Взяв функцию напряжений в следующем виде

$$\varphi_0 = \frac{\mu_0 (\sin 2\alpha - 2\theta \cos \alpha)}{2 (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)} \tag{3.1}$$

мы удовлетворим граничным условиям на радиальных кромках клина.

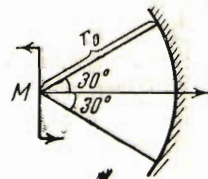
Чтобы приблизить к нулю смещения точек дуговой кромки, прибавим к (3.1) линейную комбинацию функций системы (1.13). Новая функция напряжений

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^n (b_j \varphi_j + \bar{b}_j \bar{\varphi}_j) \tag{3.2}$$

где φ_j обозначает кососимметричную функцию (1.11), соответствующую j -му корню уравнения (1.13), также удовлетворяет условию отсутствия напряжений на радиальных кромках и дает возможность путем соответствующего подбора коэффициентов b_j приблизить к нулю смещения u и v дуговой кромки.

Каждый корень характеристического уравнения любой системы дает возможность определить четыре функции напряжений, а именно: $\varphi(t)$, $\varphi(\bar{t})$, $\varphi(-t)$ и $\varphi(-\bar{t})$. В данном случае функции, соответствующие отрицательным значениям t , неприменимы, так как дают у вершины клина бесконечно большие напряжения (уничтоженные смещения дуговой кромки не может вызывать бесконечно больших напряжений у вершины). Вместо комплексных функций φ_j можно пользоваться чисто вещественными функциями

$$\text{Re}(\varphi_j) = \frac{1}{2} (\varphi_j + \bar{\varphi}_j), \quad \text{Im}(\varphi_j) = \frac{1}{2} i (\bar{\varphi}_j - \varphi_j) \tag{3.3}$$



Фиг. 9

что дает возможность записать (3.2) в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^n [c_j \operatorname{Re}(\varphi_j) + d_j \operatorname{Im}(\varphi_j)] \quad (3.4)$$

В рассматриваемом примере, приняв $n = 1$, получим следующие параметры функции φ_1 :

$$k_1 = 6.184 + 2.456 i, \quad A_1 = 1.006 - 0.530 i, \quad B_1 = 1$$

Заметим, что для уничтожения смещений клина как твердого тела наложены следующие связи на перемещения:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad \theta = 0$$

Функция φ_1 дает возможность наложить дополнительные связи на перемещения дуговой кромки. Полагая

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad \theta = \pm 24^\circ$$

и определив значения c_1 и d_1 в (3.4), найдем первое приближение для поставленной задачи. Аналогичным образом могут быть использованы для последующих приближений функции φ_2 , φ_3 и т. д.

Как видно из рассмотренного примера, решение любой конкретной задачи сводится к следующим операциям.

а) Определения частного решения, удовлетворяющего заданным граничным условиям на двух кромках рассматриваемой области.

б) Выбора соответствующей системы функций, удовлетворяющей граничным условиям на тех же кромках, и определения параметров двух-трех функций данной системы.

в) Подбора коэффициентов c_j , d_j в равенстве (3.4) таким образом, чтобы наилучшим образом удовлетворить граничные условия на остальной части контура рассматриваемого тела.

Для получения удовлетворительного по точности решения задачи при небольшом числе функций необходимо выполнение следующих условий.

1. Часть контура, на которой граничные условия выполняются точно, должна охватывать возможно большую часть контура тела.

2. Частное решение должно включать в себя все особенности нагрузки (сосредоточенные силы, скачки в интенсивности распределенных сил и т. д.), где бы они ни располагались.

При выполнении этих условий можно считать достаточным для получения решения, удовлетворяющего практическим целям, применение двух-трех функций.

Определение коэффициентов c_j , d_j в равенстве (3.4) связано по сути с максимальным приближением к нулю на части контура тела двух производных функций от φ (3.4). Последнее может быть осуществлено разными методами. Наиболее эффективным следует признать метод среднеквадратичного приближения.

Поступила 4 IV 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Папко́вич П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.
2. Папко́вич П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для плоской полосы. ДАН СССР. 1949. Т. XXVII. № 4.
3. Папко́вич П. Ф. Строительная механика корабля. Ч. II. Судпромгиз. 1941 (стр. 634).
4. Faddle J. Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe. Ing. Archiv. 1940. Bd. XI. Heft 2.
5. Проко́пов В. К. Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстого цилиндра. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 2.