Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О ПОСТРОЕНИИ ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

К. В. Задирака
(Киев)

§ 1. Построение верхних и нижних приближений для решений линейного дифференциального уравнения второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x, \lambda)\, y = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0' \tag{1.2}$$

Положим

$$m^2(\lambda) = \min_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x, \lambda) \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant \min_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x, \lambda) \leqslant \frac{\pi^2}{l^2} \tag{1.3}$$

$$m^2(\lambda) = \frac{\pi^2}{l^2} \qquad \text{при} \quad \min_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x, \lambda) > \frac{\pi^2}{l^2} \tag{1.4}$$

$$m^2(\lambda) = -\min_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x, \lambda) \qquad \text{при} \quad \min_{0 \leqslant x \leqslant l} Q(x, \lambda) < 0 \tag{1.5}$$

и представим дифференциальное уравнение (1.1) в форме:

при выполнении условий (1.3) или (1.4)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + m^2(\lambda)\, y = [m^2(\lambda) - Q(x, \lambda)]\, y \tag{1.6}$$

при выполнении условий (1.5)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - m^2(\lambda)\, y = -[m^2(\lambda) + Q(x, \lambda)]\, y \tag{1.7}$$

Временно предполагая правые части уравнений (1.6) и (1.7) известными функциями переменной x и интегрируя эти уравнения при начальных условиях (1.2), найдем соответственно

$$y(x, \lambda) = y_0 \cos mx + \frac{y_0'}{m} \sin mx + \tag{1.8}$$

$$+ \frac{1}{m} \int_0^x \sin m(x - \xi)\, [m^2(\lambda) - Q(\xi, \lambda)]\, y(\xi, \lambda)\, d\xi$$

$$y(x, \lambda) = y_0 \operatorname{ch} mx + \frac{y_0'}{m} \operatorname{sh} mx - \tag{1.9}$$

$$- \frac{1}{m} \int_0^x \operatorname{sh} m(x - \xi)\, [m^2(\lambda) + Q(\xi, \lambda)]\, y(\xi, \lambda)\, d\xi$$

Таким образом, интегрирование дифференциального уравнения (1.1) при начальных условиях (1.2) эквивалентно решению интегральных уравнений (1.8) и (1.9).

Пользуясь для решения интегральных уравнений (1.8) и (1.9) обычным итерационным процессом, получим для вычисления $m+1$-го приближения

$$y_{m+1}(x, \lambda) = y_0 \cos mx + \frac{y_0'}{m} \sin mx + \tag{1.10}$$

$$+ \frac{1}{m} \int_0^x \sin m(x-\xi)\,[m^2(\lambda) - Q(\xi, \lambda)]\, y_m(\xi, \lambda)\, d\xi$$

$$y_{m+1}(x, \lambda) = y_0 \operatorname{ch} mx + \frac{y_0'}{m} \operatorname{sh} mx - \tag{1.11}$$

$$- \frac{1}{m} \int_0^x \operatorname{sh} m(x-\xi)\,[m^2(\lambda) + Q(\xi, \lambda)]\, y_m(\xi, \lambda)\, d\xi$$

Покажем, что если исходное (первое) приближение является верхним либо нижним приближением для искомой функции $y(x, \lambda)$, то все последующие приближения, вычисленные в соответствии с формулами (1.10) и (1.11), будут представлять собой поочередно то верхние, то нижние приближения.

Действительно, допустим, что

$$y_m(x, \lambda) \leqslant y(x, \lambda) \tag{1.12}$$

В соответствии с неравенствами (1.3), (1.4), (1.5) имеем:

при условиях (1.3) и (1.4)

$$m^2(\lambda) - Q(x, \lambda) \leqslant 0$$

при условии (1.5)

$$m^2(\lambda) + Q(x, \lambda) \geqslant 0$$

В то же время

$$0 \leqslant m(x-\xi) \leqslant \pi, \quad \sin m(x-\xi) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x, \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

Таким образом, если имеет место неравенство (1.12), то согласно (1.10) и (1.11)

$$y_{m+1}(x, \lambda) \geqslant y_0 \cos mx + \frac{y_0'}{m} \sin mx + \tag{1.13}$$

$$+ \frac{1}{m} \int_0^x \sin m(x-\xi)\,[m^2(\lambda) - Q(\xi, \lambda)]\, y(\xi, \lambda)\, d\xi = y(x, \lambda)$$

$$y_{m+1}(x, \lambda) \geqslant y_0 \operatorname{ch} mx + \frac{y_0'}{m} \operatorname{sh} mx - \tag{1.14}$$

$$- \frac{1}{m} \int_0^x \operatorname{sh} m(x-\xi)\,[m^2(\lambda) + Q(\xi, \lambda)]\, y(\xi, \lambda)\, d\xi = y(x, \lambda)$$

Итак, если y_m представляет собой нижнее приближение к искомой функции $y(x, \lambda)$, то y_{m+1} будет верхним приближением к искомому решению уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2).

Аналогичные рассуждения показывают, что в том случае, когда y_m представляет собой верхнее приближение к $y(x, \lambda)$, то следующее приближение будет нижним приближением к искомой функции.

Итак, задаваясь в качестве исходного приближения функцией верхней либо нижней по отношению к искомому решению дифференциального уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) и вычисляя далее последовательные приближения в соответствии с рекуррентными соотношениями (1.10) и (1.11), будем получать поочередно то верхние, то нижние приближения к искомой функции. Как известно, используемый итерационный процесс для решения интегральных уравнений Вольтерра (1.8) и (1.9) является сходящимся при любом конечном значении переменной [1].

Следовательно, последовательность верхних и нижних приближений, построенных в соответствии с изложенным выше приемом, сходится к искомому решению дифференциального уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2).

§ 2. Построение верхних и нижних приближений к собственным значениям краевой задачи Штурма-Лиувилля. Уравнение для этой задачи возьмем в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [\lambda\rho(x) - q(x)]\, y = 0 \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$y(0) = y(l) = 0 \tag{2.2}$$

Обозначим через $y(x, \lambda)$ решение дифференциального уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x, \lambda) = 0, \qquad \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x} = 1 \qquad \text{при} \quad x = 0 \tag{2.3}$$

Последовательность собственных значений рассматриваемой краевой задачи определяется уравнением

$$y(l, \lambda) = 0 \tag{2.4}$$

Пусть $y_m(x, \lambda)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — последовательность приближений, построенных для функции y в соответствии с рекуррентными соотношениями (1.10) и (1.11).

Предположим для определенности, что функция $y_1(x, \lambda)$ является верхним приближением к функции $y(x, \lambda)$. Тогда, как показано в § 1, функции $y_1(x, \lambda)$, $y_3(x, \lambda)$, $y_5(x, \lambda), \ldots$ образуют последовательность верхних приближений к решению $y(x, \lambda)$, уравнения (2.1), а функции $y_2(x, \lambda)$, $y_4(x, \lambda)$, $y_6(x, \lambda) \ldots$ — последовательность нижних приближений к этому решению.

Сопоставим уравнению (2.4), определяющему собственные числа рассматриваемой краевой задачи, два уравнения:

$$y_{2k}(l, \lambda) = 0, \qquad y_{2k-1}(l, \lambda) = 0 \tag{2.5}$$

При любом $k \geqslant 1$ будут иметь место неравенства

$$y_{2k}(l, \lambda) \leqslant y(l, \lambda) \leqslant y_{2k-1}(l, \lambda) \tag{2.6}$$

В то же время две последовательности функций $y_{2k}(l, \lambda)$ и $y_{2k-1}(l, \lambda)$ $(k=1, 2, \ldots)$ сходятся к функции $y(l, \lambda)$.

Таким образом, решая уравнения (2.5), начиная с некоторого достаточно большого k, можно получить последовательность верхних и нижних приближений к собственным значениям рассматриваемой краевой задачи.

Для собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ каждое из уравнений (2.5) будет попеременно определять то верхнее, то нижнее приближение. В качестве первого верхнего приближения к решению уравнения (2.1) при начальных условиях (2.2) и (2.3) в случаях (1.3) и (1.4) может быть взято решение уравнения

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + m^2 y_1 = 0$$

Действительно, решение этого уравнения

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{m}\sin mx$$

будучи подставлено вместо y в уравнение (2.1), дает

$$\psi(x, \lambda) = [\lambda\rho(x) - q(x) - m^2]\,\frac{\sin mx}{m} \geqslant 0$$

Отсюда, согласно дифференциальным неравенствам С. А. Чаплыгина [2], следует, что $y_1(x, \lambda) \geqslant y(x, \lambda)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$. В случае же (1.5) за исходное верхнее приближение может быть взято решение уравнения

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - m^2 y_1 = 0 \qquad \left(y_1(0) = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 1\right)$$

Подстановка решения этого уравнения

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{m}\operatorname{sh} mx$$

вместо y в уравнение (2.1) дает

$$\psi(x, \lambda) = [\lambda\rho(x) - q(x) + m^2]\, y_1 \geqslant 0$$

В качестве примера рассмотрим вычисление первого собственного значения краевой задачи

$$y'' + \lambda(1 + x)\, y = 0$$

с граничными условиями $y(0) = y(1) = 0$. Здесь

$$m^2 = \min_{0 \leqslant x \leqslant 1} Q(x, \lambda) = \lambda \quad \text{при } \lambda < \pi^2, \qquad m^2 = \pi^2 \quad \text{при } \lambda > \pi^2$$

Будем искать решение этого уравнения при начальных условиях

$$y(x, \lambda) = 0, \qquad \frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x} = 1 \qquad \text{при} \quad x = 0$$

В качестве первого верхнего приближения возьмем функцию

$$y_1(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

Удовлетворяя второму граничному условию $y(1) = 0$, получаем для верхнего приближения к первому собственному значению

$$\sin \sqrt{\lambda} = 0, \qquad \lambda_1^{(1)} = 9.87$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (1.10), вычисляем нижнее приближение

$$y_2(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x - \int_0^x \xi \sin \sqrt{\lambda}(x - \xi) \sin \sqrt{\lambda}\, \xi\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4 - x}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x + x^2 \cos \sqrt{\lambda}\, x\right)$$

Подчиняя $y_2(x, \lambda)$ второму краевому условию задачи, получаем

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{3}, \qquad \lambda_1^{(2)} = 6.03$$

Из того же рекуррентного соотношения (1.10) получаем

$$y_3(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x - \frac{\lambda}{4\sqrt{\lambda}} \int_0^x \xi \sin \sqrt{\lambda}(x - \xi) \left[\frac{4 - \xi}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, \xi + \xi^2 \cos \sqrt{\lambda}\, \xi\right] d\xi =$$

$$= \left(\frac{5x^2}{32\sqrt{\lambda}} - \frac{\sqrt{\lambda}\, x^4}{32} - \frac{5}{32\lambda\sqrt{\lambda}} - \frac{x}{4\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \sin \sqrt{\lambda}\, x + \left(\frac{5x}{32\lambda} + \frac{x^2}{4} - \frac{5x^3}{48}\right) \cos \sqrt{\lambda}\, x$$

Подчиняя $y_3(x, \lambda)$ второму краевому условию задачи, получаем уравнение

$$\left(\frac{29\lambda - 5}{4\lambda\sqrt{\lambda}} - \frac{\sqrt{\lambda}}{4}\right) \sin \sqrt{\lambda} + \left(\frac{5}{4\lambda} + \frac{7}{6}\right) \cos \sqrt{\lambda} = 0$$

Отсюда $\lambda_1^{(3)} = 6.60$ и т. д. (в рассматриваемом примере $\lambda_1 = 6.55$).

Заметим в заключение, что, как и в рассмотренном выше примере, верхние и нижние приближения к функции $y(x, \lambda)$ будут элементарными функциями в случае полиномиальных коэффициентов $q(x)$ и $\rho(x)$ уравнения (2.1).

В этом случае вычисление верхних и нижних приближений к собственным значениям сводится к решению элементарных трансцендентных уравнений.

Практически в большинстве случаев функции $q(x)$ и $\rho(x)$ задаются приближенно, и, апроксимируя их полиномами, можно получить простую схему для вычислений верхних и нижних приближений к собственным значениям.

Поступила 30 V 1952

Институт математики
Академии наук УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I. 1951.
2. Чаплыгин С. А. Собрание сочинений. Т. I. Гостехтеоретиздат. 1948.