Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

Ошибочна

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРЕДЕЛА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Н. К. Куликов
(Москва)

Качественные методы теории дифференциальных уравнений позволяют во многих случаях установить факт существования предела общего решения нелинейного дифференциального уравнения и исследовать свойства его, связанные с устойчивостью движения. В настоящей работе показано, как найти точную количественную связь между перемещением и временем для установившихся вынужденных колебаний некоторых нелинейных систем.

1. Постановка задачи. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + F(x) = M \sin pt \tag{1.1}$$

где t — время, x — перемещение, M, p — постоянные параметры, $F(x)$ — непрерывная функция с непрерывной первой производной, причем

$$0 < h \leqslant \frac{dF}{dx} = F_x < \infty \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что для уравнения (1.1) существует периодическое соотношение

$$\Phi(x_\infty, \tau) = 0 \qquad \left(0 \leqslant \tau \leqslant \frac{2\pi}{p} = \Theta\right) \tag{1.3}$$

заключенное в некоторой полосе $x = x'$, $x = x''$ плоскости xt, к которому приближаются при $t \to \infty$ все частные решения уравнения (1.1), выходящие из точек указанной полосы. Другими словами, предполагается, что движение, описываемое уравнением (1.1), имеет предельный, установившийся режим.

В дальнейшем предельное периодическое соотношение (1.3) будем называть пределом общего решения заданного уравнения (1.1).

Задача состоит в том, чтобы разработать метод нахождения предела общего решения заданного уравнения, определить выражение функции $\Phi(x_\infty, \tau) = 0$ через M, p, $F(x)$ и τ. Поставленная задача решается следующей теоремой.

Теорема. Если дифференциальное уравнение (1.1) имеет предел общего решения и если выполнено условие (1.2), то

$$\frac{F_\infty}{F_{x\infty}} = \frac{M(F_{x\infty} \sin p\tau - p\cos p\tau)}{p^2 + F_{x\infty}^2} \tag{1.4}$$

будет выражением для предела общего решения.

Для доказательства теоремы исследуем некоторые свойства общего решения заданного уравнения.

2. Общее решение уравнения. Будем искать общее решение уравнения (1.1) в виде

$$\frac{F}{F_x} = A^* e^{-F_x t} + \frac{M(F_x \sin pt - p\cos pt)}{p^2 + F_x^2} \tag{2.1}$$

где A^* — некоторая функция, которую будем называть функцией интегрирования.

Для того чтобы соотношение (2.1) было общим решением уравнения (1.1), необходимо и достаточно, чтобы функция A^* удовлетворяла дифференциальному уравнению (первого порядка), которое получится, если продифференцировать соотношение (2.1) по времени и затем исключить из найденного выражения и уравнения (1.1) величину $\dot{x}$. Получившееся уравнение $f(A^*, x, t) = 0$ определяет A^* как функцию времени и постоянной интегрирования.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} + kx = M \sin pt, \qquad k = \text{const} > 0 \tag{2.2}$$

Соотношение (2.1) запишется в виде

$$x = Ae^{-kt} + \frac{M(k \sin pt - p \cos pt)}{p^2 + k^2} \tag{2.3}$$

т. е. в виде обычного общего решения линейного уравнения; функция интегрирования A^* для данного случая совпадает с постоянной интегрирования $A^* = A \equiv \text{const}$.

Пример 2. Разберем случай

$$F(x) = x + x^3, \quad F_x = 1 + 3x^2 > 0, \quad M = 0$$

т. е. свободные колебания системы

$$\dot{x} + x + x^3 = 0 \tag{2.4}$$

Соотношение (2.1) — общее решение уравнения (2.4) — примет вид:

$$\frac{x + x^3}{1 + 3x^2} = A^* e^{-(1+3x^2)t} \tag{2.5}$$

Так как интегрирование уравнения (2.4) дает

$$x = \pm \sqrt{\frac{Ae^{-2t}}{1 - Ae^{-2t}}} \tag{2.6}$$

где $A = \text{const}$ — постоянная интегрирования, то функции интегрирования будет

$$A^* = \pm \frac{\sqrt{Ae^{-2t}}}{(1 + 2Ae^{-2t})\sqrt{1 - Ae^{-2t}}} \exp\left(-\frac{1 + 3Ae^{-2t}}{1 - Ae^{-2t}}\right) \tag{2.7}$$

Пример 3. Разберем случай

$$F(x) = kx + \alpha x^3, \quad k > 0, \quad \alpha > 0, \quad F_x = k + 3\alpha x^2 > 0$$

Исходное уравнение (1.1) будет

$$\dot{x} + kx + \alpha x^3 = M \sin pt \tag{2.8}$$

и его общее решение согласно формуле (2.1)

$$\frac{kx + \alpha x^3}{k + 3\alpha x^2} = A^* e^{-(k+3\alpha x^2)t} + \frac{M[(k + 3\alpha x^2) \sin pt - p \cos pt]}{p^2 + (k + 3\alpha x^2)^2} \tag{2.9}$$

где A^* — неизвестная функция.

3. Предел общего решения заданного уравнения. Предел общего решения заданного уравнения получится из общего решения (2.1), если положить там $t \to \infty$ Будем обозначать в дальнейшем через x_∞, F_∞ и $F_{x\infty}$ величины x, F и F_x, соответствующие бесконечно большим моментам времени t; кроме того, введем новую переменную τ, связанную с t соотношением

$$t = \theta l + \tau \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.1}$$

Тогда предел общего решения будет

$$\frac{F_\infty}{F_{x\infty}} = \lim_{t \to \infty} R^* + \frac{M(F_{x\infty} \sin p\tau - p \cos p\tau)}{p^2 + F_{x\infty}{}^2} \tag{3.2}$$

Здесь

$$R^* = A^* e^{-F_x t} \tag{3.3}$$

Если предел функции R^* равен нулю, то из (3.2) сразу же получится точный предел общего решения уравнения (1.1).

Так, рассматривая примеры предыдущего раздела, будем иметь следующее.

В случае примера 1, когда $A^* = A \equiv \mathrm{const}$:

$$\lim_{t\to\infty} R^* = \lim_{t\to\infty} Ae^{-kt} = 0$$

Поэтому предел общего решения уравнения (2.3) будет иметь вид:

$$x_\infty = \frac{M\,(k \sin p\tau - p \cos p\tau)}{p^2 + k^2} \tag{3.4}$$

В случае примера 2

$$R^* = A^* e^{-(1+3x^2)t}$$

Или согласно (2.6) и (2.7)

$$R^* = \pm \frac{\sqrt{Ae^{-2t}}}{(1 + 2Ae^{-2t})\sqrt{1 - Ae^{-2t}}}$$

Следовательно, $\lim R^* = 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, предел общего решения уравнения (2.4) будет

$$\frac{x_\infty + x_\infty{}^3}{1 + 3x_\infty{}^2} = 0 \qquad \text{или} \qquad x_\infty = 0$$

т. е. положение равновесия (особая точка системы).

В случае примера 3

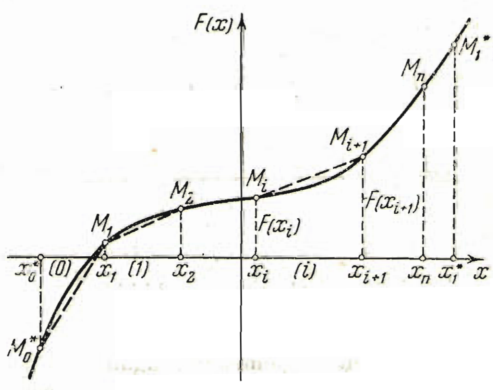
$$R^* = A^* e^{-(k+3\alpha x^2)t}$$

Если предел R^* равен нулю (далее показано, что это так), то следующая формула дает предел общего решения уравнения (2.8):

$$\frac{kx_\infty + \alpha x_\infty{}^3}{k + 3\alpha x_\infty{}^2} = \frac{M\,[(k + 3\alpha x_\infty{}^2) \sin p\tau - p \cos p\tau]}{p^2 + (k + 3\alpha x_\infty{}^2)^2} \tag{3.5}$$

4. Первое свойство общего решения. Рассмотрим отрезок кривой $F(x)$, представленной на фиг. 1, соответствующий участку $x_0{}^* x_1{}^*$. Предполагаем, что $x_0{}^*$ и $x_1{}^*$ — начальное и конечное перемещения, соответствующие моментам времени $t_0{}^*$ и $t_1{}^*$.

Попытаемся решить уравнение (1.1) приближенно, заменив кривую линию $M_0{}^* M_1{}^*$ ломаной линией $M_0{}^* M_1 M_2 \ldots M_n M_1{}^*$. Для некоторого участка $M_i M_{i+1}$ вместо уравнения (1.1) имеем линейное уравнение



Фиг. 1

$$\dot{x} + F(x_i) + k_i (x - x_i) = M \sin pt \tag{4.1}$$

Здесь

$$k_i = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.2}$$

причем $F(x_i)$ — ордината точки M_i, $F(x_{i+1})$ — ордината точки M_{i+1}.

Решение уравнения (4.1) будет

$$x = A_i e^{-k_i t} + \frac{k_i x_i + F(x_i)}{k_i} + \frac{M\,(k_i \sin pt - p \cos pt)}{p^2 + k^2_i} \tag{4.3}$$

где A_i — постоянная интегрирования.

Аналогичные уравнения и решения будем иметь для всех участков ломаной. Используя начальное условие $t = t_0{}^*$, $x = x_0{}^*$, находим из уравнения (4.3), положив $i=0$, значение A_0. Найдя затем время $t=t_1$, при котором $x=x_1$, перейдем с нулевого на первый участок ломаной линии и, беря конечные условия для нулевого участка в качестве начальных условий для первого участка, найдем значение A_1. Действуя аналогично, определим значения постоянных интегрирования для всех участков и найдем время t_{n+1}, соответствующее перемещению $x=x_1^*$.

Очевидно, время t_{n+1}, соответствующее движению по ломаной линии, не будет равно в общем случае времени движения t_1^* по заданной кривой линии.

Если длины участков неограниченно уменьшаются, то величины $x-x_i$ также уменьшаются и в пределе при бесконечно большом количестве участков $x-x_i\to 0$ и $k_i(x-x_i)\to 0$. Таким образом, соотношение (4.1) стремится к выражению (1.1), написанному для момента $t=t_i$, $x=x_i$. С другой стороны, если величина $x-x_i\to 0$, то соотношение (4.3) стремится к выражению

$$\frac{F(x_i)}{F_{xi}}=A_ie^{-F_{xi}t_i}+\frac{M(F_{xi}\sin pt_i-p\cos pt_i)}{p^2+F_{xi}^2} \tag{4.4}$$

Сравнив формулу общего решения (2.1) и формулу (4.4), убеждаемся, что они совпадают, если обозначить A_i через A^* и опустить индекс i. Следовательно, установив закон изменения постоянных интегрирования для различных участков ломаной линии и неограниченно увеличивая число участков, найдем в пределе закон изменения функции интегрирования A^* для общего решения (2.1) нелинейного уравнения. Эта задача и решается в двух следующих разделах.

5. Второе свойство общего решения. Для нахождения связи между постоянными интегрирования на двух соседних участках ломаной линии $M_0^*M_1M_2\ldots M_nM_1^*$ рассмотрим место стыка участков i и $i+1$.

Напишем уравнение (4.3) для участка i и положим в нем для конца этого участка $t=t_{i+1}$ и $x=x_{i+1}$; затем напишем уравнение (4.3) для участка $i+1$ и положим в нем для начала участка $t=t_{i+1}$, $x=x_{i+1}$. Сравнивая результаты, получим рекуррентную формулу

$$A_{i+1}=A_i\frac{k_i}{k_{i+1}}\exp(k_{i+1}t_{i+1}-k_it_{i+1})+\frac{\Delta u_{i+1}}{k_{i+1}}\exp(k_{i+1}t_{i+1}) \tag{5.1}$$

где

$$\Delta u_{i+1}=\frac{M(k_i\sin pt_{i+1}-p\cos pt_{i+1})}{p^2+k_i^2}-\frac{M(k_{i+1}\sin pt_{i+1}-p\cos pt_{i+1})}{p^2+k_{i+1}^2} \tag{5.2}$$

Полагая в этой формуле последовательно $i=0,1,2,\ldots$, найдем связь между A_0 и A_1, A_1 и A_2, A_2 и $A_3,\ldots$, A_{n-1} и A_n. Исключив затем из полученных соотношений последовательно величины $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_{n-1}$, установим зависимость

$$A_n=\left[A_0\frac{k_0}{k_n}e^{(-k_0t_0^*+\sigma_0)}+\frac{\Delta u_1}{k_n}e^{\sigma_1}+\frac{\Delta u_2}{k_n}e^{\sigma_2}+\cdots+\frac{\Delta u_n}{k_n}e^{\sigma_n}\right]e^{k_nt_n} \tag{5.3}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_0&=-[k_0(t_1-t_0^*)+k_1(t_2-t_1)+k_2(t_3-t_2)+\cdots+k_{n-1}(t_n-t_{n-1})]<0\\
\sigma_1&=-[k_1(t_2-t_1)+k_2(t_3-t_2)+k_3(t_4-t_3)+\cdots+k_{n-1}(t_n-t_{n-1})]<0\\
\sigma_2&=-[k_2(t_3-t_2)+k_3(t_4-t_3)+k_4(t_5-t_4)+\cdots+k_{n-1}(t_n-t_{n-1})]<0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma_{n-1}&=-[k_{n-1}(t_n-t_{n-1})]<0,\qquad \sigma_n=0
\end{aligned}$$

Рассмотрим, наряду с величинами A_i, функции

$$R_i=A_ie^{-k_it_i}\qquad (i=0,1,\ldots,n) \tag{5.4}$$

Пользуясь формулой (5.3), легко получить

$$R_n=R_0\frac{k_0}{k_n}e^{\sigma_0}+\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{n}e^{\sigma_i}\Delta u_i \tag{5.5}$$

Пусть количество участков n неограниченно возрастает, а величина каждого участка уменьшается, при этом согласно (5.2) величины Δu_i также неограниченно уменьшаются. Очевидно, для $n \to \infty$ имеем

$$t_n \to t_{n+1} \to t_1^*,\ k_i \to F_{xi},\ k_n \to k_1^* = F_{x1}^*,\ k_0 \to F_{x0}^*$$

$$R_n \to R_1^* = A_1^* \exp(-F_{x1}^* t_1^*),\ R_0 \to R_0^* = A_0^* \exp(-F_{x0}^* t_0^*)$$

$$\lim \sigma_0 = -\int_{t_0^*}^{t_1^*} F_x dt, \qquad \lim \sum_{i=1}^{n} e^{\sigma_i} \Delta u_i = \int_{u_0^*}^{u_1^*} e^{\sigma^*} du$$

где σ^* обозначает предел соответствующей величины σ_i.

Поэтому в пределе формула (5.5) примет вид:

$$R_1^* = R_0^* \frac{F_{x0}^*}{F_{x1}^*} \exp\left(-\int_{t_0^*}^{t_1^*} F_x dt\right) + \frac{1}{F_{x1}^*} \int_{u_0^*}^{u_1^*} e^{\sigma^*} du \tag{5.6}$$

Так как согласно условию $F_x \geqslant h > 0$, то

$$-\int_{t_0^*}^{t_1^*} F_x dt \leqslant -h(t_1^* - t_0^*)$$

Кроме того, так как все величины σ^* отрицательны и одна из них равна нулю, то $e^{\sigma^*} \leqslant 1$ и

$$\left|\int_{u_0^*}^{u_1^*} e^{\sigma^*} du\right| \leqslant |u_1^* - u_0^*|$$

Поэтому из соотношения (5.6) имеем

$$|R_1^*| \leqslant |R_0^*| \frac{F_{x0}^*}{F_{x1}^*} e^{-h(t_1^* - t_0^*)} + \frac{|u_1^* - u_0^*|}{F_{x1}^*} \tag{5.7}$$

6. Третье свойство общего решения. Будем рассматривать момент времени t_1^* сдвинутым по сравнению с начальным моментом t_0^* на период $\theta = t_1^* - t_0^*$; Тогда формула (5.7) примет вид:

$$|R_1^*| \leqslant |R_0^*| \frac{F_{x0}^*}{F_{x1}^*} e^{-\alpha} + \frac{\Delta u_1^*}{F_{x1}^*} \tag{6.1}$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi}{p} h = \theta h > 0, \qquad \Delta u_1^* = |u_1^* - u_0^*|$$

Формула (6.1) связывает величины $|R_1^*|$ и $|R_0^*|$ для конца и начала первого периода. Найдя связь между $|R_2^*|$ и $|R_1^*|$, $|R_3^*|$ и $|R_2^*|, \ldots, |R_m^*|$ и $|R_{m-1}^*|$ и исключив последовательно из полученных соотношений величины $|R_1^*|$, $|R_2^*|$, $|R_3^*|, \ldots, |R_{m-1}^*|$, найдем связь между $|R_m^*|$ и $|R_0^*|$;

$$|R_m^*| \leqslant |R_0^*| \frac{F_{x0}^*}{F_{xm}^*} e^{-m\alpha} + \frac{1}{F_{xm}^*} \sum_{i=1}^{m} e^{-(m-i)\alpha} \Delta u_i^* \tag{6.2}$$

Если согласно условию система (1.1) стремится при $t \to \infty$ к некоторому установившемуся периодическому движению, то при достаточно больших значениях m величина последнего члена Δu_m^* может быть сделана меньше любой наперед заданной малой величины ε, при этом неравенство $\Delta_m^* < \varepsilon$ будет сохраняться при $m + r > m$ $(r = 1, 2, 3, \ldots,)$.

Напишем формулу (6.2) несколько по-иному:

$$|R_m^*| \leqslant |R_0^*| \frac{F_{x0}^*}{F_{xm}^*} e^{-m\alpha} + \frac{1}{F_{xm}^*} \sum_{i=1}^{m-1} e^{-(m-i)\alpha} \Delta u_i^* + \frac{\Delta u_m^*}{F_{xm}^*}$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{m-1} e^{-(m-i)\alpha} \Delta u_i^* < \Delta u^{**} \int_0^{m-1} e^{-\alpha z}\, dz = \frac{\Delta u^{**}}{\alpha} [1 - e^{-(m-1)\alpha}] < \frac{\Delta u^{**}}{\alpha}$$

где Δu^{**} — наибольшее значение из Δu_i^*, то

$$|R_m^*| < |R_0^*| \frac{F_{x0}^*}{F_{xm}^*} e^{-m\alpha} + \frac{\Delta u^{**}}{\alpha F_{xm}^*} + \frac{\Delta u_m^*}{F_{xm}^*} \tag{6.3}$$

Соответственно формулам (6.1) и (6.3) имеем

$$|R_{m+r}^*| < |R_0^*| \frac{F_{x0}^*}{F_{x(m+r)}^*} e^{-(m+r)\alpha} + \frac{\Delta u^{**}}{\alpha F_{x(m+r)}} e^{-r\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{F_{x(m+r)}} [e^{-r\alpha} \Delta u_m^* + e^{-(r-1)\alpha} \Delta u_{m+1}^* + e^{-(r-2)\alpha} \Delta u_{m+2}^* + \cdots +$$

$$+ e^{-\alpha} \Delta u_{m+r-1}^* + \Delta u_{m+r}^*] \tag{6.4}$$

Так как все величины Δu_{m+i}^* меньше наперед заданной сколь угодно малой величины ε и так как $F_{x(m+r)} \geqslant h > 0$, то

$$\frac{1}{F_{x(m+r)}} [e^{-r\alpha} \Delta u_m^* + e^{-(r-1)\alpha} \Delta u_{m+1}^* + e^{-(r-2)\alpha} \Delta u_{m+2}^* + \cdots + \Delta u_{m+r}^*] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{h} \int_{-1}^{r} e^{-\alpha z}\, dz = \frac{\varepsilon}{\alpha h} (e^{\alpha} - e^{-\alpha r}) < \frac{e^{\alpha} \varepsilon}{\alpha h} = \frac{2\pi e^{\alpha}}{\alpha^2 p} \varepsilon \tag{6.5}$$

Поэтому неравенство (6.4) можно заменить другим:

$$|R_{m+r}^*| < |R_0^*| \frac{F_{x0}^*}{h} e^{-(m+r)\alpha} + \frac{\Delta u^{**}}{\alpha h} e^{-r\alpha} + \frac{2\pi e^{\alpha}}{\alpha^2 p} \varepsilon \tag{6.6}$$

Если время t стремится к бесконечности, то r также стремится к бесконечности. Поэтому первые два члена в последнем неравенстве стремятся к нулю и при достаточно большом r будет выполняться неравенство

$$|R_0^*| \frac{F_{x0}^*}{h} e^{-(m+r)\alpha} + \frac{\Delta u^{**}}{\alpha h} e^{-r\alpha} < \varepsilon \left(1 - \frac{2\pi e^{\alpha}}{\alpha^2 p}\right)$$

В таком случае из неравенства (6.6) имеем

$$|R_{m+r}^*| < \varepsilon \left(1 - \frac{2\pi e^{\alpha}}{\alpha^2 p}\right) + \frac{2\pi e^{\alpha}}{\alpha^2 p} \varepsilon = \varepsilon \quad \text{или} \quad \lim_{t \to \infty} |R^*| = 0 \tag{6.7}$$

Из трех свойств общего решения заданного уравнения и следует теорема.

Отметим, что изложенное доказательство теоремы применимо к системе

$$\dot{x} + F(x) = \sum_{j=0}^{n} M_j \sin(p_j t - \delta_j) \tag{6.8}$$

где p_j — соизмеримые числа, n — конечное целое число, и может быть распространено на дифференциальные уравнения высших порядков. Выражение для предела общего решения уравнения (6.8) при условии (1.2) будет

$$\frac{F_\infty}{F_{x\infty}} = \sum_{j=0}^{n} \frac{M_j [F_{x\infty} \sin(p_j t - \delta_j) - p_j \cos(p_j t - \delta_j)]}{p_j^2 + F_{x\infty}^2} \tag{6.9}$$

Поступила 5 IV 1952