

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
МАЯТНИКА

Ю. Н. Бакаев

(Москва)

Применительно к системам, которые описываются дифференциальным уравнением маятника, решаются три задачи: 1) находится закон движения для случая, когда затухание в системе велико (§ 1); 2) аналитически отыскивается зависимость, определяющая собой бифуркационное значение коэффициента затухания (§ 2); 3) устанавливается закон затухания свободных колебательных движений для случая, когда диссипативные силы в системе малы.

Анализ некоторых схем автоматического регулирования приводит к системе

$$\frac{dv}{dt} = u + \beta, \quad \frac{1}{\alpha^2} \frac{du}{d\tau} = -\sin v - u \quad (0.1)$$

в которой α и β — положительные параметры. Если в системе (0.1) исключить функцию u и положить $\alpha\tau = t$, то она приводится к уравнению

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \alpha \frac{dv}{dt} + \sin v = \beta \quad (0.2)$$

описывающему движение маятника. Это уравнение с качественной стороны хорошо изучено [1, 2, 3].

При $\beta > 1$ ($\alpha > 0$) система допускает только периодические движения; при $\beta < 1$ возможна двоякого рода картина: если $\alpha > \alpha_*$, где $\alpha_* = f(\beta)$ — некоторая функция, существование которой доказано, но вид которой неизвестен точно, то все движения системы сходятся к состоянию устойчивого равновесия $v_0 = \arcsin \beta$. Если $\alpha < \alpha_*$, то в системе в зависимости от начальных условий устанавливается либо периодическое движение, либо равновесное состояние.

Что касается количественных результатов, то уравнение (0.2) приводится к квадратурам лишь в случае $\alpha = 0$. Случай, когда $\alpha > 0$, до сих пор количественно исследован недостаточно.

§ 1. Если $\alpha^2 \gg 1$, то система (0.1), которую удобно представить в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = u + \beta, \quad \mu \frac{du}{d\tau} = -u + \cos \varphi \quad \left(\varphi = v - \frac{3\pi}{2}, \mu = \frac{1}{\alpha^2} \right) \quad (1.1)$$

может быть проинтегрирована по методу малого параметра [4, 5].

Начальные условия возьмем в виде

$$\varphi = \varphi_0, \quad u = u_0 \quad \text{при } \tau = 0$$

Решение $\varphi(\tau, \mu)$ для достаточно малого μ предполагаем в виде

$$\varphi(\tau, \mu) \approx \varphi(\tau, 0) + \mu \frac{\partial \varphi(\tau, 0)}{\partial \mu}$$

Решение $\varphi^0(\tau)$, которое получается, если в (1.1) положить $\mu = 0$, будем далее называть основным в отличие от полного $\varphi(\tau, \mu)$.

Полагая в (1.1) $\mu = 0$, найдем

$$u^\circ(\tau) = \cos \varphi^\circ(\tau), \quad \frac{d\varphi^\circ(\tau)}{d\tau} = \cos \varphi^\circ(\tau) + \beta \quad (1.2)$$

Функция $\partial\varphi^\circ(\tau)/\partial\mu$ находится из следующего дифференциального уравнения: дифференцируем (1.1) по μ и в полученной системе полагаем $\mu = 0$. Таким путем, применяя обозначения $\partial u/\partial\mu = u_\mu$ и $\partial\varphi/\partial\mu = \varphi_\mu$, найдем

$$\frac{d\varphi_\mu^\circ(\tau)}{d\tau} = u_\mu^\circ(\tau), \quad \frac{du^\circ(\tau)}{d\tau} = -u_\mu^\circ(\tau) - \varphi_\mu^\circ(\tau) \sin \varphi^\circ(\tau) \quad (1.3)$$

В работах^[4, 5] доказывается, что при некоторых условиях общего характера, для удовлетворения которых ниже будет указан ряд ограничений, найденные таким способом функции удовлетворяют следующим предельным равенствам:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi(\tau, \mu) = \varphi^\circ(\tau), \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} u(\tau, \mu) = \cos \varphi^\circ(\tau), \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial\varphi(\tau, \mu)}{\partial\mu} = \varphi_\mu^\circ(\tau)$$

где $\varphi_\mu^\circ(\tau)$ — решение системы (1.3), удовлетворяющее начальному условию^[5]

$$[\varphi_\mu^{(0)}(\tau)]_{\tau=0} = \int_{u_0}^{\cos \varphi_0} \frac{u + \beta - (\cos \varphi_0 + \beta)}{-u + \cos \varphi_0} du = -\cos \varphi_0 + u_0$$

Если найденная таким образом функция $\varphi_\mu^\circ(\tau)$ имеет порядок единицы, то основное решение с точностью до членов порядка μ совпадает с полным, и им можно пользоваться для описания процесса.

Для основного решения при $\beta < 1$ (только этот случай и представляет интерес в автоматическом регулировании) из системы (1.2) находим

$$\frac{d\varphi^\circ}{\beta + \cos \varphi^\circ} = d\tau$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi^\circ}{2} = \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \operatorname{th} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{2} (\tau - \tau_0) = a \operatorname{th} b (\tau - \tau_0) \quad (1.4)$$

где постоянная интегрирования

$$\tau_0 = -\frac{1}{b} \operatorname{argth} \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}$$

В такой форме найденное решение справедливо для области начальных значений $-\pi < \varphi_0 < 0$. Решение для $0 < \varphi_0 < \pi$ найдем заменой β на $-\beta$ [см. уравнение (0.2)].

Для отыскания производной $\varphi_\mu^\circ(\tau)$ исключаем из системы (1.3) функцию $u_\mu^\circ(\tau)$; учитывая соотношение (1.2), получим

$$\frac{d\varphi_\mu^\circ}{d\tau} + \varphi_\mu^\circ \sin \varphi^\circ(\tau) = \sin \varphi^\circ(\tau) [\cos \varphi^\circ(\tau) + \beta]$$

Решение следует отыскивать при начальном условии

$$\varphi_\mu^\circ = u_0 - \cos \varphi_0 \quad \text{при} \quad \tau = 0$$

Хотя квадратуры для $\varphi_\mu^\circ(\tau)$ выполнить не удастся, можно показать, что если u_0 имеет порядок единицы и $\tau_0 < 0$, что соответствует области начальных значений $-1/2\pi < \varphi_0 < 1/2\pi$, то решение (1.4) справедливо при всех $\tau > 0$.

Действительно, общее решение полученного для φ_μ° уравнения имеет вид:

$$\varphi_\mu^\circ(\tau) = e^{-J(\tau)} \left\{ u_0 - \cos \varphi_0 + \int_0^\tau \sin \varphi^\circ(\tau) [\cos \varphi^\circ(\tau) + \beta] e^{J(\tau)} d\tau \right\}$$

где

$$J(\tau) = \int_0^\tau \sin \varphi^\circ(\tau) d\tau$$

Находим

$$e^{-J(\tau)} \int_0^\tau \beta \sin \varphi^\circ(\tau) e^{J(\tau)} d\tau = e^{J(\tau)} \Big|_0^\tau \beta e^{-J(\tau)} = \beta [1 - e^{-J(\tau)}]$$

Далее, учитывая, что при $\tau_0 < 0$ функция $\sin \varphi^\circ(\tau) e^{J(\tau)}$ не меняет знака, на основании первой теоремы о среднем получим

$$e^{-J(\tau)} \int_0^\tau \cos \varphi^\circ(\tau) \sin \varphi^\circ(\tau) e^{J(\tau)} d\tau = e^{J(\tau)} \int_0^\tau \cos \varphi^\circ(\zeta) e^{-J(\tau)} = \cos \varphi^\circ(\zeta) [1 - e^{-J(\tau)}] \quad (0 < \zeta(\tau) < \tau)$$

Наконец, при $\tau_0 < 0$

$$J(\tau) = \int_0^\tau \frac{2a \operatorname{th} b(\tau - \tau_0)}{1 + a^2 \operatorname{th}^2 b(\tau - \tau_0)} d\tau > \frac{2a}{1 + a^2} \int_0^\tau \operatorname{th} b(\tau - \tau_0) d\tau = 2 \ln \frac{\operatorname{ch} b(\tau - \tau_0)}{\operatorname{ch} b\tau_0}$$

Следовательно,

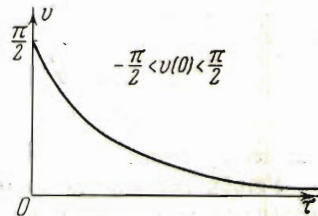
$$e^{-J(\tau)} < \frac{\operatorname{ch}^2 b\tau_0}{\operatorname{ch}^2 b(\tau - \tau_0)} \leq 1$$

Более того, из последнего неравенства следует, что установление $\varphi_\mu^\circ(\tau)$ происходит не медленнее основного решения $\varphi^\circ(\tau)$.

Если же

$$\tau_0 > 0 \quad (1/2 \pi < v_0 < 3/2 \pi)$$

то аналогичным способом можно показать, что решением (1.4) можно пользоваться, только начиная с момента $\tau > 2\tau_0$. В этом случае решение (1.4) не описывает при $\tau < 2\tau_0$ движения системы, но может быть использовано для оценки длительности процесса. Характер установления при $\tau_0 < 0$ имеет вид, показанный на фиг. 1.



Фиг. 1

§ 2. Займемся отысканием зависимости $\alpha_* = f(\beta)$. Подстановка $dv/dt = z$ приводит уравнение (0.2) к виду

$$\frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{dv} = \beta - \sin v - \alpha z \tag{2.1}$$

Обозначим через $x(v)$ функцию $x(v) = 1/2 z^2 - \cos v$, которая определяет собой полную энергию системы. Тогда уравнение (2.1) приведет к виду

$$\frac{dx}{dv} = \alpha F(v, x) \quad (\alpha F(v, x) = \alpha \sqrt{2x + 2 \cos v} + \beta) \tag{2.2}$$

относящемуся к классу уравнений, рассмотренных в работе Н. Н. Боголюбова [6].

Усредним правую часть уравнения (2.2) по явно входящей независимой переменной v :

$$\begin{aligned} \alpha F_0(x) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(v, x) dv = \\ &= \beta + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2x+2-4\sin^2 \frac{1}{2}v} dv \end{aligned}$$

В случае, если изображающая точка описывает траектории, охватывающие фазовый цилиндр, $x+1 > 2$. Пользуясь этим для приведения эллиптического интеграла к канонической форме, найдем

$$\alpha F_0(x) = \beta + 2 \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{2x+2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - \frac{4}{2x+2} \sin^2 \frac{v}{2}} \frac{dv}{2}$$

Используя далее замену

$$\frac{4}{2x+2} = w^2$$

получим

$$\frac{dw}{dv} = \frac{w^2}{4} \left[-\beta w + \frac{4\alpha}{\pi} E(w) \right] \quad (2.3)$$

где $E(w)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, а w — его модуль.

Уравнение (2.3) допускает квазистатическое решение w_0 , соответствующее периодическому решению уравнения (2.1), если может быть удовлетворено уравнение

$$\frac{4\alpha}{\pi} E(w) - \beta w = 0$$

Последнее возможно только, если

$$\alpha < \frac{1}{4} \pi \beta$$

(фиг. 2), и не выполнимо, если

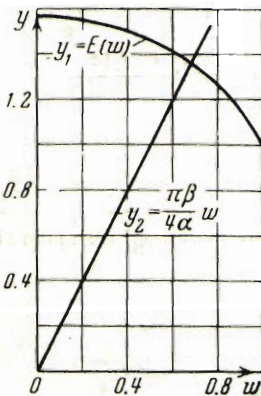
$$\alpha > \frac{1}{4} \pi \beta$$

Уравнение

$$\alpha = \frac{1}{4} \pi \beta$$

есть искомая зависимость $\alpha_* = f(\beta)$. Случай

$$w^2 = 0$$



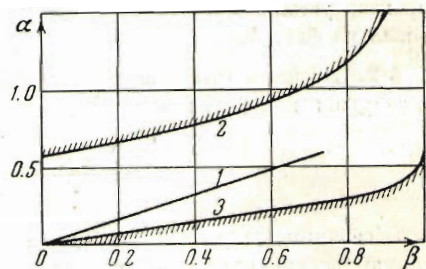
Фиг. 2

соответствует движению со скоростью $z \rightarrow \infty$.

Устойчивость найденного квазистатического решения легко может быть установлена непосредственно на фиг. 2.

Если α и β достаточно малы, то уравнение (2.3) удовлетворяет условиям теоремы IV (гл. I) работы Н. Н. Боголюбова [6], откуда следует, что уравнение (2.3) дает (после замены w на z) приближенное решение уравнения (2.1), причем модуль разности точного и приближенного решений экспоненциально стремится к нулю с возрастанием v . Самый характер зависимости z от v не представляет, однако, особого интереса, и мы не будем более заниматься квадратурой уравнения (2.3).

Зависимость $\alpha_* = \frac{1}{4} \pi \beta$ приведена на фиг. 3. На том же графике приведены оценки для этой функции (кривые 2 и 3), полученные в работе [2].



Фиг. 3

§ 3. Изложенные в работе Н. Н. Боголюбова [6] методы осреднения не являются единственно возможными и не во всех случаях наиболее просты. Для инженерной практики значительный интерес представляет вариант метода осреднения, изложенный в работе Я. С. Ицхоки [7].

Рассмотрим этим способом задачу о движении маятника в среде с затуханием при $\beta = 0$.

Будем рассматривать (в отличие от § 2) движения, при которых изображающая точка не охватывает более фазового цилиндра, что соответствует запасу энергии в системе, меньшему двух (в безразмерной форме).

При $\alpha = 0$ маятник совершает незатухающие колебания.

Если $\alpha \neq 0$, но достаточно мало, то маятник совершает колебания, по форме близкие к колебаниям маятника в среде без затухания, но со слабо затухающей амплитудой. Используем это обстоятельство следующим образом.

Обозначим через φ° среднее за период значение амплитуды и полагаем φ° неизменной за период T , вычислим ее приращение за тот же промежуток времени. Принимая во внимание, что $\beta = 0$ и что за период $\Delta\varphi = 0$, найдем

$$\begin{aligned} \sin \varphi^\circ \Delta\varphi^\circ &= -\alpha \int_{\varphi(t)}^{\varphi(t+T)} \dot{\varphi}(\varphi) d\varphi = \\ &= -4\alpha \int_0^{\varphi^\circ} 2 \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi^\circ - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} d\varphi = -16\alpha \sin^2 \frac{1}{2} \varphi^\circ B(\sin \frac{1}{2} \varphi^\circ) \end{aligned}$$

где B — полный эллиптический интеграл, определяемый через полные эллиптические интегралы первого и второго рода соотношением $E = Kk^2 + k^2B$, а $\sin \frac{1}{2} \varphi^\circ$ — его модуль.

Иными словами, поскольку затухание мало, потери на трение в течение одного периода можно вычислить, отождествляя реальное движение с движением незатухающего маятника, имеющего в течение рассматриваемого одного периода амплитуду φ° .

Отнесем далее вычисленное изменение амплитуды к периоду колебаний

$$T = 4K(\sin \frac{1}{2} \varphi^\circ)$$

где K обозначает полный эллиптический интеграл первого рода, и положим

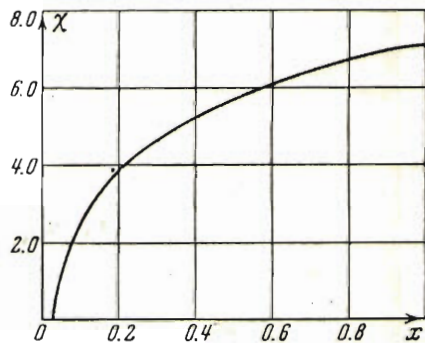
$$\frac{\Delta\varphi^\circ}{T} = \frac{d\varphi^\circ}{dt}$$

Это даст

$$\sin \varphi^\circ \frac{d\varphi^\circ}{dt} = -4\alpha \sin \frac{1}{2} \varphi^\circ \frac{B(\sin \frac{1}{2} \varphi^\circ)}{K(\sin \frac{1}{2} \varphi^\circ)}$$

Вводя $x = \sin \frac{1}{2} \varphi^\circ$, найдем

$$X(x) = \int_{x_0}^x \frac{K(x)}{xB(x)} dx = -\alpha t + C$$



Фиг. 4

При малых отклонениях маятника $K(x)/B(x) \approx 2$ и, кроме того, $\sin \frac{1}{2} \varphi^\circ \approx \frac{1}{2} \varphi^\circ$, что дает известный закон затухания малых колебаний

$$\varphi^\circ(t) = \varphi^\circ(0) e^{-\frac{1}{2} \alpha t}$$

Функция $X(x)$, построенная численным интегрированием при $x_0 = 0.03$, представлена на фиг. 4.

Если описанным методом определить закон затухания для системы $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x = 0$, для которой известно точное решение, то построенная приближенным методом функция совпадает с точным решением, а решение, найденное, вообще говоря, лишь при $\alpha \rightarrow 0$, остается справедливым на всем отрезке $\alpha [0, 2]$.

Поступила 5 V 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний. ОНТИ. 1937.
2. Tricomi F. Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica. Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa. 1933. Ser. II. Vol. II.
3. Ельшин М. И. О фазовых траекториях движения маятника. Успехи математических наук. 1951. Т. VI. Вып. 4 (44).
4. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Математический сборник. 1948. Т. 22 (64). № 2.
5. Васильева А. Б. О дифференцировании решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. ДАН СССР. 1948. Т. 62. № 4.
6. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН УССР. 1945
7. Ицхоки Я. С. Установление напряжения на конденсаторе, питаемом выпрямленным напряжением. Электричество. 1937. № 17—18.