Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ДВУХРАЗМЕРНЫЙ УДАР В МАЛОСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Г. И. Копзон

(Ленинград)

§ 1. Рассмотрим явление двухразмерного удара в малосжимаемой жидкости; полагая ее баротропной, в качестве уравнения состояния можно принять с достаточной степенью точности следующее линейное соотношение:

$$\Delta p = E\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \tag{1.1}$$

где $\Delta p = p - p_0$, $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ — соответственно приращения величин давления p и плотности ρ, причем здесь и в дальнейшем индекс 0 указывает, что величины относятся к невозмущенной жидкости, E — модуль объемной упругости жидкости.

Ограничиваясь рассмотрением идеальной жидкости (отсутствие сил трения), будем считать, что при ударе возникают лишь продольные волны и вихри отсутствуют. Тогда рассматриваемое движение имеет потенциал скоростей $\varphi = \varphi(x_0, y_0, t_0)$.

Пользуясь (1.1) и условием малой сжимаемости нашей жидкости, пренебрегая малыми выше второго порядка малости относительно $\Delta\rho / \rho_0 \ll 1$, имеем

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{dp}{\rho} = \frac{E}{\rho_0}\log\frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{E}{\rho_0}\log\left(1-\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \approx a^2 - a_0^2 \qquad \left(a^2 = \frac{E}{\rho}\right)$$

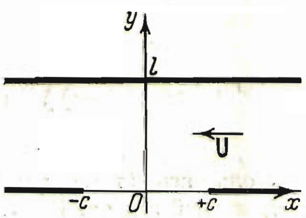
Таким образом, кроме соотношения (1.1), получим интеграл Лагранжа-Коши в виде

$$\frac{v^2}{2} + a^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = a_0^2 \tag{1.2}$$

Уравнение для потенциала скоростей в предположении, что в волновом движении, складывающемся с основным движением жидкости, имеющим скорость $\mathbf{u}$ (постоянную и направленную по отрицательной оси x), скорости и ускорения малы [1], имеет вид:

$$a_0^2\,\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t_0^2} = 0 \tag{1.3}$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2}\right)$$



Фиг. 1

Заметим, что (1.3) написано в системе координат, движущейся вместе с потоком со скоростью $\mathbf{u}$. Очевидно к неподвижной системе координат (x_1, y_1) можно перейти по формулам $x_1 = x - ut$, $y_1 = y$.

§ 2. Пользуясь уравнениями (1.2) и (1.3), рассмотрим следующую задачу.

Поток малосжимаемой жидкости двигается со скоростью $\mathbf{u}$ по направлению отрицательной оси x (фиг. 1). Плоскости $y = 0$ и $y = l$ являются твердыми стенками.

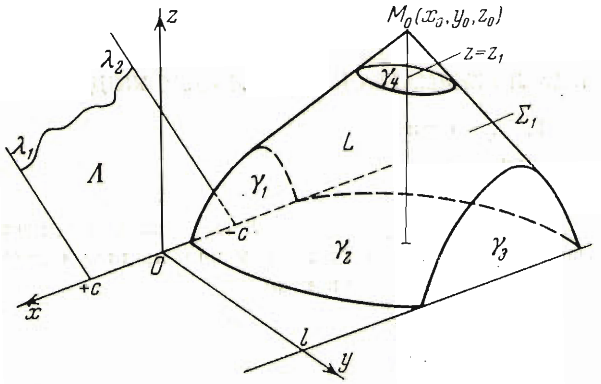
Внезапно на отрезке $[-c, +c]$ под действием приложенных усилий возникает направленная по оси y вверх скорость

$$v_n = 0 \quad \text{при } t \leqslant 0, \qquad v_n = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = f(x, t) \quad \text{при } t > 0,\ |x| \leqslant c \tag{2.1}$$

Кроме того, на стенках, очевидно, должны выполняться условия

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \qquad (|x| > c), \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=l} = 0 \tag{2.2}$$

Требуется найти давление в полосе $0 \leqslant y \leqslant l$ как функцию времени[1].



Фиг. 2

Для решения задачи переходим к системе координат x, y, $z = at$. Вместо уравнения (1.3) в новой системе получим

$$L[\varphi] = \tag{2.3}$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

Отрезку $|x| \leqslant c$ при $y = 0$, указанному в задаче, в пространстве xyz соответствует некоторая полоса Λ, ограниченная лучами λ_1 и λ_2 (фиг. 2), исходящими из точек ($x = \pm c$, $y = 0$, $z = 0$) в плоскости $y = 0$ с наклоном

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{M} \qquad \left(x = x_1 + ut = x_1 + Mz, \ M = \frac{u}{a}\right)$$

Очевидно,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{\text{на }\Lambda} = f\left(x, \frac{z}{a}\right), \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0, \text{ вне }\Lambda} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=l} = 0 \tag{2.4}$$

В работе [3] приведено выражение для потенциала скоростей в случае, когда из трех граничных условий (2.4) последнее отсутствует. В этом случае

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\gamma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{d\gamma}{\sqrt{(z-z_0)^2 - r}} \qquad (r^2 = (x-x_0)^2 + y_0^2, \ d\gamma = dxdy) \tag{2.5}$$

Точка (x_0, y_0, $z_0 = at_0$), в которой ищется решение, на фиг. 2 является вершиной характеристического конуса L с углом раствора $^1/_2\,\pi$, вырезающего на плоскости $y = 0$ площадку интегрирования γ_1.

Обобщая решение (2.5) на случай, когда полоса Λ, оставаясь параллельной плоскости xz, отнесена по оси y на расстояние $y_n = \pm nl$, получим

$$y_n = \pm nl,$$

$$\varphi_n^{(\pm)}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{d\gamma}{\sqrt{(z-z_0)^2 - (x-x_0)^2 - (nl \pm y_0^2)}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

где $\partial\varphi / \partial y$ берется из условий (2.4), годных для полосы Λ в ее новом положении.

Пользуясь этими решениями для полупространств, построим решение рассматриваемой задачи. Введем в рассмотрение $\tau = l / a$ — время, потребное для прохождения нашей волной кратчайшего расстояния l по оси y от одной отражающей стенки до другой[2]. При помощи многократного применения способа отражения

---

[1] Аналогичная задача для полуплоскости ($l = \infty$) таким же методом решалась Л. А. Галиным для случая, когда поверхность $y = 0$ является свободной [2].

[2] Формулы (2.6) показывают, что фронт волны перемещается в соответствии с волновым принципом Гюйгенса. Например, в случае точечного источника на линии (x_1, nl, $z > 0$) уравнение фронта волны будет

$$(z - z_0)^2 = [a(t - t_0)]^2 = (x_1 - x_0)^2 + (nl - y_0)^2$$

путем наложения друг на друга добавочных (отраженных) потенциалов [4] решение задачи можно получить в виде конечных сумм следующего вида:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_0^{(+)} - \varphi_2^{(-)} + \cdots + \varphi_{2n-2}^{(+)} - \varphi_{2n}^{(-)} && \text{при } (2n-1)\,\tau \leqslant t < 2n\tau \\
\varphi &= \varphi_0^{(+)} - \varphi_2^{(-)} + \cdots - \varphi_{2n}^{(-)} + \varphi_{2n}^{(+)} && \text{при } 2n\tau \leqslant t < (2n+1)\,\tau
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Легко убедиться, что в решениях (2.7) выполнены условия (2.4).

Можно достаточно просто показать единственность решения (2.7) и его непрерывность в переходные моменты $t_m = m\tau$. При этом оказывается, что найденное решение будет годиться всюду, кроме, быть может, изолированных точек $z_m = ml$, где некоторые вторые частные производные добавочных потенциалов обращаются в бесконечность. Физически это будет указывать на наличие мгновенного удара, вследствие которого ускорение в начальный момент неограниченно растет ($\partial^2\varphi / \partial z^2 = \infty$), а производная от нормальной скорости v_y по y имеет скачок.

§ 3. Пользуясь формулами (2.3), можно вычислить потенциал φ в случае элементарного источника возмущений с интенсивностью c_0, находящегося в плоскости $y_n = nl$ на расстоянии $x = s$ от начала, т. е. $(\partial\varphi / \partial n) \triangle s = v_n \triangle s = c_0$ при $y = nl$, $s \leqslant x \leqslant s + \triangle s$. В этом случае полоса Λ вырождается в луч, лежащий в плоскости $y = nl$, уравнением которого будет

$$x = z \operatorname{ctg} \alpha + s \qquad \left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx} = \frac{1}{M}\right)$$

Интегрируя по соответствующему отрезку луча, отсекаемому характеристическим конусом, после несложных преобразований получим

$$\frac{\pi}{c_0} \varphi(x_0, y_0, z_0) = \int_1^{z_0/r_n} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} = \operatorname{Arch} \frac{z_0}{r_n} \qquad (r_n^2 = (s - x_0)^2 + (nl - y_0)^2) \tag{3.1}$$

Далее легко вычисляются основные гидродинамические элементы течения

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \frac{c_0}{\pi} \frac{z_0 (s - x_0)}{r_n^2 \sqrt{z_0^2 - r_n^2}}, \qquad & v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{c_0}{\pi} \frac{z_0}{r_n \sqrt{z_0^2 - r_n^2}} \\
v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} = \frac{c_0}{\pi} \frac{z_0 (nl - y_0)}{r_n^2 \sqrt{z_0^2 - r_n^2}}, \qquad & \frac{1}{a} \frac{\partial\varphi}{\partial t_0} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z_0} = \frac{c_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 - r_n^2}}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Пользуясь (1.1) и (1.2), получим для приращения давления Δp формулу

$$\Delta p = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \rho_0 a \frac{\partial\varphi}{\partial z_0} \tag{3.3}$$

Очевидно, член $^1/_2\, \rho_0 v^2$ представляет собой скоростной напор, а член $\rho_0 a \partial\varphi / \partial z_0$, порожденный нестационарностью процесса, определяет величину ударного давления. Пренебрегая величиной скоростного напора в формуле (3.3) и пользуясь (3.2), для $d\Delta p$ получим, заменив $\triangle s$ на ds и Δp на $d\Delta p$ (как малую величину):

$$d\Delta p \approx \frac{ds}{\pi \sqrt{(at_0)^2 - (s - x_0)^2 - (nl - y_0)^2}} \rho_0 a v_n \tag{3.4}$$

Распределив элементарные источники возмущений с интенсивностями $v_n ds$ ($v_n = \mathrm{const}$) на отрезке $[-c, +c]$ оси x плоскости $y = nl$ и интегрируя соответственно (3.4) по s от $-c$ до $+c$, окончательно придем к выражению

$$\Delta p = \frac{1}{\pi} \int_{-(\nu+\mu)}^{\nu-\mu} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \rho_0 a v_n = H(\nu, \mu)\, \rho_0 a v_n \tag{3.5}$$

где

$$\nu = \frac{c}{\sqrt{(at_0)^2 - (nl - y_0)^2}}, \qquad \mu = \frac{x_0}{\sqrt{(at_0)^2 - (nl - y_0)^2}}$$

$$H = H(\nu, \mu) = \frac{1}{\pi} [\arcsin(\nu + \mu) - \arcsin(\mu - \nu)] \tag{3.6}$$

Наибольшее значение коэффициента $H = H(\nu, \mu)$ при $\nu + \mu = 1$, $\mu - \nu = -1$ (соответственно $x = 0$ $c \geqslant \sqrt{(at_0)^2 - (nl - y_0)^2}$) равно единице и достигается при достаточной ширине щели в ее центре. При этом получим известную формулу Н. Е. Жуковского [5]

$$\Delta p = \rho_0 a v_n$$

§ 4. Если граничное условие для точечного источника задано в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = A \sin\frac{\omega z}{a} \qquad (z = at,\ A = v_n ds)$$

то для коэффициента H получим выражение

$$H = \frac{1}{\pi}\left[\sin 2\frac{\omega z_0}{a}\int\limits_{c}^{+c}\frac{ds}{\sqrt{(z-z_0)^2 + r_n^2}} + \frac{\omega}{a}\int\limits_{1}^{z_0/r_n} d\lambda \int\limits_{-c}^{+c}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}\cos\frac{r_n\omega}{a}\left(\lambda + \frac{z_0}{r_n}\right)ds\right]$$

Кроме того, можем написать выражение для потенциала

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{A}{\pi}\left[\cos\frac{\omega z_0}{a}\int\limits_{1}^{z_0/r_n}\sin\frac{\omega r_n}{a}\lambda\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}} + \sin\frac{\omega z_0}{a}\int\limits_{1}^{z_0/r_n}\cos\frac{\omega r_n}{a}\lambda\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right]$$

Для больших значений z_0 / r_n и $\omega r_n / a$, пользуясь функциями Бесселя и Неймана нулевого порядка от аргумента $\xi = \omega r_n / a$ и их асимптотическими разложениями при больших ξ, получим после несложных преобразований

$$\varphi = \varphi(r_n, z_0) = A\sqrt{\frac{a}{2\pi\omega r_n}}\left\{\cos\left[\frac{\omega}{a}\left(r_n - z_0 - \frac{\pi}{4}\right)\right] + O\left(\frac{a}{\omega r_n}\right)\right\} \tag{4.1}$$

Сравнивая (4.1) с решениями, получающимися в задаче о распространении сейсмических волн [6], видим, что потенциал (4.1) аналогичен продольной волне сжатия, распространяющейся в земной коре при землетрясениях. Отсутствие в нашем случае поверхностных и поперечных волн обусловлено наличием твердой стенки и допущением об идеальности жидкости (отсутствие сил трения).

В заключение отметим, что если граничное условие для точечного источника задано в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = a_n' t^n = a_n z^n \tag{4.2}$$

то для потенциала φ найдется следующее выражение:

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{a_n r^n}{\pi}\sum_{k=0}^{n} C_n^k S_k(\lambda)\left(\frac{z_0}{r}\right)^{n-k} \tag{4.3}$$

где

$$S_k(\lambda) = \int^{\lambda}\frac{\lambda^k d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}} = \frac{\lambda^{k-1}\sqrt{\lambda^2-1}}{k} + \frac{k-1}{k}S_{k-2}(\lambda)$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}, \qquad \lambda = \frac{z-z_0}{r}$$

Поступила 4 XI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович Е. и Франкль Ф. Газодинамика тонких тел. ГИТТЛ. 1948.
2. Галин Л. А. Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.
3. Фалькович С. В. О подъемной силе крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 1.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III. Ч. 2. § 55. ГИТТЛ. 1949.
5. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе. Избранные сочинения. Т. II. ГИТТЛ. 1948.
6. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. § 170. ГИТТЛ. 1947.