Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КРЫЛА

Г. Е. Кузмак

(Москва)

§ 1. Как известно, циркуляция крыла $\Gamma(\theta)$ определяется интегро-дифференциальным уравнением:

$$\Gamma(\theta) = b(\theta)\left[\alpha(\theta) - c\int_0^\pi \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\theta}\frac{d\Gamma}{d\vartheta}\,d\vartheta\right] \tag{1.1}$$

где $b(\theta)$ — функция, пропорциональная хорде крыла, $\alpha(\theta)$ — геометрический угол атаки, c — положительная постоянная.

Положим

$$\Gamma(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\theta \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) получим

$$\frac{\Gamma(\theta)}{b(\theta)} = \alpha(\theta) - \frac{c\pi}{\sin\theta}\sum_{k=1}^{\infty} kA_k \sin k\theta \tag{1.3}$$

Умножим обе части равенства (1.3) на $\sin\theta / nc\pi$, где n — целое число, и к тому, что получится, прибавим равенство (1.2). Получим

$$\Gamma(\theta)\left(1 + \frac{\sin\theta}{nc\pi b(\theta)}\right) = \frac{\alpha(\theta)\sin\theta}{nc\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{k}{n}\right)A_k \sin k\theta \tag{1.4}$$

Умножим обе части равенства (1.4) на $\sin n\theta$ и проинтегрируем от 0 до π. Имеем

$$\int_0^\pi \Gamma(\theta)\,\chi_n(\theta)\,d\theta = \gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

Здесь

$$\chi_n(\theta) = \left(1 + \frac{\sin\theta}{nc\pi b(\theta)}\right)\sin n\theta$$
$$\gamma_n = \frac{1}{nc\pi}\int_0^\pi \alpha(\theta)\sin\theta\sin n\theta\,d\theta \tag{1.6}$$

Далее проортонормируем систему функций $\{\chi_n(\theta)\}$

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_{11}\chi_1\\
v_2 &= \alpha_{21}\chi_1 + \alpha_{22}\chi_2\\
v_3 &= \alpha_{31}\chi_1 + \alpha_{32}\chi_2 + \alpha_{33}\chi_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_k &= \alpha_{k1} + \alpha_{k2}\chi_2 + \cdots + \alpha_{kk}\chi_k
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Введем обозначения

$$(f_1 f_2) = \int_0^\pi f_1(\theta) f_2(\theta)\, d\theta, \qquad N[f] = \int_0^\pi f^2\, d\theta \tag{1.8}$$

Рассмотрим систему

$$v_1 = \frac{\chi_1}{\sqrt{N\chi_1}}$$

$$v_2 = \frac{[\chi_2 - (v_1\chi_2)\, v_1]}{\sqrt{N[\chi_2 - (v_1\chi_2) v_1]}} \tag{1.9}$$

. . . .

$$v_{k+1} = \frac{[\chi_{k+1} - (v_1\chi_{k+1})\, v_1 - \cdots - (v_k\chi_{k+1})\, v_k]}{\sqrt{[N\chi_{k+1} - (v_1\chi_{k+1})\, v_1 - \cdots - (v_k\chi_{k+1})\, v_k]}}$$

Легко доказать, что эта система обладает свойством ортонормированности[1].

Для того чтобы получить ортонормированную систему в форме (1.7), необходимо последовательно заменять функции $v_1, v_2, \ldots, v_k$ в правой части $k+1$-го равенства их выражениями из 1, 2, . . . , k равенств.

Величины α_{ik} будут выражаться через скалярные произведения $(\chi_n \chi_m)$. Отметим, что если $n+m$ нечетно, то $(\chi_n \chi_m) = 0$ (при доказательстве надо воспользоваться тем, что $b(\theta) = b(\pi - \theta)$). Это сильно облегчает процесс вычисления коэффициентов α_{ik}. Отметим, что выписать явные выражения для коэффициентов первых четырех-пяти функций можно без особого труда.

Далее, легко видеть, представление для циркуляции $\Gamma(\theta)$ получится в виде

$$\Gamma(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(\theta) \tag{1.10}$$

где

$$a_k = \int_0^\pi \Gamma(\theta)\, v_k(\theta)\, d\theta = \int_0^\pi \Gamma(\theta) \sum_{i \leqslant k} \alpha_{ki}\chi_i(\theta)\, d\theta = \sum_{i \leqslant k} \alpha_{ki}\gamma_i$$

Особенно просто выглядит ряд для $\Gamma(\theta)$, когда $\alpha(\theta) = \mathrm{const}$:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{2c}, \qquad 0 = \gamma_2 = \gamma_3 = \cdots$$

и, следовательно,

$$\Gamma(\theta) = \frac{\alpha}{2c}\left[(\alpha_{11}{}^2 + \alpha_{21}{}^2 + \alpha_{31}{}^2 + \cdots)\, \chi_1(\theta) + (\alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} + \cdots)\, \chi_2(\theta) + \right.$$
$$\left. + (\alpha_{31}\alpha_{33} + \cdots)\, \chi_3(\theta) + \cdots\right]$$

§ 2. Чтобы доказать законность представления (1.10), покажем полноту системы функций $\chi_n(\theta)$, определенных согласно (1.6). Этот вопрос решим при помощи теоремы, доказанной Н. К. Бари[2]. Предварительно укажем, что:

1) система $\{\chi_n(\theta)\}$ называется квадратически близкой к системе $\{\psi_n(\theta)\}$ на интервале (a, b), если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (\chi_n - \psi_n)^2\, d\theta$$

2) система функций $\{\chi_n(\theta)\}$ называется минимальной, если ни одну из ее функций нельзя приблизить в среднем как угодно точно при помощи линейной комбинации из остальных функций той же системы.

Теорема. Если $\{\psi_n(\theta)\}$ полная ортогональная система функций и $\{\chi_n(\theta)\}$ минимальная система, квадратически близкая к ней, то $\{\chi_n(\theta)\}$ также обладает свойством полноты.

В данном случае $\{\psi_n\}$ есть система $\{\sin n\theta\}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}(\chi_n - \sin n\theta)^2\, d\theta \tag{2.1}$$

Согласно (1.6) имеем

$$\chi_n - \sin n\theta = \frac{\sin\theta}{n\pi c b(\theta)}\sin n\theta$$

Так как

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{\pi c b(\theta)}\sin n\theta\right)^2 d\theta \leqslant M$$

то ряд (2.1) сходится быстрее, чем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$$

Таким образом, система $\{\chi_n(\theta)\}$ квадратически близка к системе $\{\sin n\theta\}$.

Далее выведем условие, налагаемое на хорду крыла $b(\theta)$, выполнение которого гарантирует минимальность системы $\{\chi_n(\theta)\}$.

Нетрудно видеть, что минимальность системы $\{\chi_n(\theta)\}$ сразу следует из линейной независимости любого конечного числа функций системы. Докажем следующее утверждение.

Любая конечная группа функций системы $\{\chi_n(\theta)\}$ линейно независима, если для $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\chi_n^2(\theta)\, d\theta < 2\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\chi_n(\theta)\sin n\theta\, d\theta\right)^2 \tag{2.2}$$

Предположим противное, а именно линейную зависимость функций $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N$, т. е. предположим, что

$$\sum_{n=1}^{N} c_n\chi_n(\theta) = 0 \tag{2.3}$$

Разложим $\chi_n(\theta)$ в ряд Фурье

$$\chi_n = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{kn}\sin k\theta, \qquad \alpha_{kn} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\chi_n(\theta)\sin k\theta\, d\theta \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} c_n\alpha_{kn}\sin k\theta = 0$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{N} c_n\alpha_{kn} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.5}$$

Рассмотрим матрицу, элементы которой суть величины α_{kn}:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots \alpha_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \ldots \alpha_{NN} \\ \alpha_{N+1,1} & \alpha_{N+2,2} & \ldots \alpha_{N+1,N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

Для опровержения сделанного предположения достаточно показать, что ранг матрицы равен N.

Для этого докажем, что в случае выполнения неравенства (2.2) определитель, состоящий из первых N строк, не равен нулю. Воспользуется тем, что определитель есть объем, построенный на векторах

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{N1} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{N2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_N = \begin{pmatrix} \alpha_{1N} \\ \vdots \\ \alpha_{NN} \end{pmatrix}$$

Ясно, что если каждый вектор лежит внутри конуса, ось которого совпадает с координатной осью, имеющей номер вектора, а угол раствора его равен $\frac{1}{2}\pi$, то объем, построенный на векторах $A_1, A_2, \ldots, A_N$, не равен нулю. Это условие аналитически представляется в виде неравенства

$$\sum_{k=1\,(k\neq n)}^{N} \alpha_{kn}^2 < \alpha_{nn}^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots N) \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) будет заведомо выполняться, если выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kn}^2 < 2\alpha_{nn}^2 \tag{2.7}$$

Пользуясь известным условием полноты, можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kn}^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \chi_n^2(\theta)\, d\theta \tag{2.8}$$

Используя (2.7) и (2.8), получим то, что и требовалось доказать:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \chi_n^2(\theta)\, d\theta < 2\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \chi_n(\theta)\sin n\theta\, d\theta\right)^2$$

Отметим также, что доказанное утверждение гарантирует возможность ортогонализации системы функций $\{\chi_n(\theta)\}$.

Поступила 26 VII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I. Стр. 43—44. Гостехтеоретиздат. 1933.

2. Бари Н. К. Об устойчивости свойства полноты системы функций. ДАН СССР. 1942. Т. XXXVII. Стр. 99—103.