Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

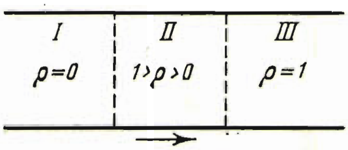
ДВИЖЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СМЕСИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А. М. Пирвердян

(Баку)

1. Будем рассматривать одноразмерное движение двухфазной несжимаемой смеси при следующих предположениях.

В начальный момент времени эксплуатации полосообразной залежи последнюю можно разбить на три зоны (фиг. 1): в зоне *I* пористое пространство заполнено водой; *III* — нефтью; промежуточная зона *II* заполнена смесью воды и нефти. На правом согласно фиг. 1 конце залежи расположен ряд скважин, замененный вследствие тесноты этого ряда галереей. Опыт показывает, что в процессе вытеснения одной фазы другой длина зоны *II* изменяется. Нефтенасыщенность этой зоны не является постоянной вдоль ее длины. Для частиц, расположенных в хвостовой части, нефтенасыщенность ρ близка к нулю, причем у самой границы водораздела $\rho = 0$. Наоборот, головная часть этого участка сильно насыщена нефтью, причем для самых передних частиц $\rho = 1$.



Фиг. 1

Здесь необходимо, однако, сделать несколько разъяснений по вопросу о предельных значениях ρ. Описанная картина вытеснения справедлива при отсутствии смачивающей способности обеих жидкостей к зернам грунта. Если пески, из которых вытесняется нефть, гидрофобны, то в хвостовой части зоны вытеснения нефтенасыщенность никогда не достигает нуля. В случае гидрофильных песков, т. е. при наличии погребенной воды, образовавшей прочный слой на поверхности песчинок и отчасти заполнившей поры, максимальное значение ρ в головной части нефтеводяной зоны будет равно единице за вычетом относительного содержания погребенной воды.

Такова, строго говоря, реальная картина распределения фаз в зоне вытеснения. Однако мы наш анализ ограничим идеальным случаем полного вытеснения нефти водой, хотя следует отметить, что применение изложенного метода решения к реальному случаю вытеснения не встречает принципиальных затруднений.

Для решения задачи необходимо составить дифференциальное уравнение движения двухфазной несжимаемой смеси. Полагая, что для движения этой смеси можно написать такого же типа уравнения фильтрации, как и для газированной жидкости [1], мы получим сразу искомые дифференциальные уравнения из уравнений движения газожидкостной смеси, если примем в последних газ несжимаемым и коэффициент растворимости равным нулю.

Уравнения при этом будут иметь (в наших обозначениях) следующий вид:

$$f_{\text{н}}'(\rho)(\nabla p)\cdot(\nabla \rho) + f_{\text{н}}(\rho)\nabla^2 p = \frac{m\mu_{\text{н}}}{k}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$[f_{\text{н}}'(\rho) + \mu_0 f_{\text{в}}'(\rho)](\nabla p)\cdot(\nabla \rho) + [f_{\text{н}}(\rho) + \mu_0 f_{\text{в}}(\rho)]\nabla^2 p = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь m — пористость грунта, $\mu_н$, $\mu_в$ — вязкость нефти и воды, через ∇ обозначен обычный векторный оператор:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

Далее $f_н(\rho)$ и $f_в(\rho)$ означают функции, входящие в выражения скоростей фильтрации нефти и воды [2]

$$u_н = -\frac{k}{\mu_н} f_н(\rho) \operatorname{grad} p, \qquad u_в = -\frac{k}{\mu_в} f_в(\rho) \operatorname{grad} p \tag{1.2}$$

Для рассматриваемой одноразмерной задачи имеем из (1.1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k}{\mu_н} f_н(\rho) \frac{\partial p}{\partial x}\right] = m \frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{k}{\mu_н} f_н(\rho) + \frac{k}{\mu_в} f_в(\rho)\right] \frac{\partial p}{\partial x}\right\} = 0 \tag{1.3}$$

Из второго уравнения системы (1.3) следует, что

$$-\left[\frac{k}{\mu_н} f_н(\rho) + \frac{k}{\mu_в} f_в(\rho)\right] \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{q(t)}{S} \tag{1.4}$$

где $q(t)$ — дебит галереи, S — площадь сечения пласта.

Допустим, что зависимость $q(t)$ задана. Подставляя значение $\partial p / \partial x$ из (1.4) в первое уравнение системы (1.3), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{q(t)}{mS} \chi(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.5}$$

где через $\chi(\rho)$ обозначено

$$\chi(\rho) = \frac{f_н'(\rho) f_в(\rho) - f_в'(\rho) f_н(\rho)}{[f_н(\rho) + \mu_0 f_в(\rho)]^2} \mu_0, \qquad \left(\mu_0 = \frac{\mu_н}{\mu_в}\right) \tag{1.6}$$

Уравнению (1.5) отвечает система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{mS\,dx}{q(t)\,\chi(\rho)} = dt, \qquad d\rho = 0$$

Откуда общее решение уравнения (1.5) будет

$$\rho = F\left[x - \frac{\chi(\rho)}{mS} \int q(t)\, dt\right] \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) можно переписать так:

$$x = f(\rho) + \frac{\chi(\rho)}{mS} \int_0^t q(\tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

Вид функции $f(\rho)$ определится из начального условия.

Эта функция представляет собой характер изменения ρ в водонефтяной зоне в начальный момент времени (при условии, что эта зона при $t = 0$ существует).

При определенном виде фазовых функций $f_н(\rho)$, $f_в(\rho)$ и значении μ_0, входящих в обобщенную фазовую функцию $\chi(\rho)$, эта водонефтяная зона будет расти. При достаточно больших t второй член в уравнении (1.8) становится во много раз больше первого, характеризующего начальное «возмущение», и тогда закономерность роста зоны контакта практически перестает зависеть от начальных условий. Опыты по вытеснению жидкостей из вертикальных колонок, заполненных песком, показывают, что, несмотря на все меры, призванные предотвратить образование начальных возмущений, водонефтяные зоны все же образуются. Однако замечательно то, что при неоднократном повторении опыта получается удивительная воспроизводимость одних и тех же закономерностей. Это служит показателем того, что начальные возмущения — обстоятельства, в существенной степени случайные — при принятых в опытах длинах колонок перестают влиять сколько-нибудь значительно на характер роста водонефтяной зоны.

Учтя сказанное, имеем закономерность движения водонефтяной зоны в виде:

$$x = \frac{\chi(\rho)}{mS} \int_0^t q(\tau)\, d\tau \tag{1.9}$$

2. Рассмотрим более общий случай (но, повидимому, не самый общий), когда скорости фильтрации $u_\text{н}$ и $u_\text{в}$ зависят от поверхностного натяжения σ на границе двух фаз. В этом случае, чтобы установить зависимость между скоростями фильтрации и величинами, определяющими их, можно воспользоваться теорией размерностей, которая также может быть применена в некоторых случаях при интегрировании дифференциальных уравнений [3, 4] [1].

Применяя теорию размерностей к рассматриваемой задаче, имеем:

$$\frac{\mu_\text{н} u_\text{н}}{k \operatorname{grad} p} = f_1\left(\rho,\ \frac{\mu_\text{н} u_\text{н}}{\sigma},\ \mu_0\right) \tag{2.1}$$

$$\frac{\mu_\text{в} u_\text{в}}{k \operatorname{grad} p} = f_2\left(\rho,\ \frac{\mu_\text{в} u_\text{в}}{\sigma},\ \mu_0\right) \tag{2.2}$$

Рассмотрим одноразмерное движение. Допустим, что уравнения (2.1) и (2.2) могут быть разрешены в явной форме:

$$u_\text{н} = f_\text{н}\left(\rho,\ \frac{\partial p}{\partial x}\right), \qquad u_\text{в} = f_\text{в}\left(\rho,\ \frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{2.3}$$

Уравнение неразрывности для обеих фаз при этом будут

$$\frac{\partial u_\text{н}}{\partial x} + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad u_\text{н} + u_\text{в} = \frac{q(t)}{S} \tag{2.4}$$

Подставляя в (2.4) значения $u_\text{н}$ и $u_\text{в}$ из (2.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\text{н}\left(\rho,\ \frac{\partial p}{\partial x}\right) + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.5}$$

$$f_\text{н}\left(\rho,\ \frac{\partial p}{\partial x}\right) + f_\text{в}\left(\rho,\ \frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{q(t)}{S} \tag{2.6}$$

Всегда возможно подобрать вид функций $f_\text{н}$ и $f_\text{в}$ в (2.6) так, чтобы

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varphi\left(\rho,\ \frac{q(t)}{S}\right) \tag{2.7}$$

Подставляя $\partial p / \partial x$ из (2.7) в (2.5), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\text{н}\left\{\rho,\ \varphi\left[\rho,\ \frac{q(t)}{S}\right]\right\} + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi\left[\rho,\ \frac{q(t)}{S}\right] + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) можно переписать еще так:

$$\chi\left[\rho,\ \frac{q(t)}{S}\right]\frac{\partial \rho}{\partial x} + m\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \left(\chi\left[\rho,\ \frac{q(t)}{S}\right] = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) \tag{2.9}$$

Интегралу уравнения (2.9) отвечает система обыкновенных уравнений:

$$d\rho = 0, \qquad \frac{m\,dx}{\chi(\rho,\ q(t)/S)} = dt$$

---

[1] Пользуюсь случаем отметить, что в работе [4] перед подстановкой $v^{-2}z^{-1}$ должен быть знак минус, отсутствие которого, однако, не повлияло на окончательный результат.

Отсюда $\rho = C_1$, следовательно, учтя постоянство ρ, имеем

$$x = \frac{1}{m}\int \chi\left[\rho, \frac{q(t)}{S}\right] dt + C_2$$

Интеграл (2.9) при этом будет $C_2 = f(C_1)$ или

$$x = f(\rho) + \frac{1}{m}\int_0^t \chi\left[\rho, \frac{q(\tau)}{S}\right] d\tau \qquad (2.10)$$

где $f(\rho)$ определяется из начального условия.

3. Рассмотрим радиальную задачу вытеснения. Предполагая, что скорости фаз $u_\text{н}$ и $u_\text{в}$ определяются формулами (1.2) и (1.3), получим для этого случая следующие два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{k}{\mu_\text{н}} f_\text{н}(\rho)\frac{\partial p}{\partial r} r\right] = mr\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (3.1)$$

$$-\left[\frac{k}{\mu_\text{н}} f_\text{н}(\rho)\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{k}{\mu_\text{в}} f_\text{в}(\rho)\frac{\partial p}{\partial r}\right] = \frac{q(t)}{2\pi rh} \qquad (3.2)$$

где h — мощность пласта.

Подставляя значение $\partial p / \partial r$ из (3.2) в уравнение (3.1), получим

$$\frac{q(t)}{2\pi rhm}\chi(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (3.3)$$

где $\chi(\rho)$ определяется из формулы (1.6).

Интеграл уравнения (3.3) будет

$$\rho = F\left[\pi r^2 - \frac{1}{hm}\chi(\rho)\int q(t)\, dt\right] \qquad (3.4)$$

или

$$\pi(r^2 - r_0^2) = f(\rho) + \frac{1}{hm}\chi(\rho)\int_0^t q(\tau)\, d\tau \qquad (3.5)$$

где r_0 — радиус скважины, а $f(\rho)$ — попрежнему функция распределения нефтенасыщенности в начальный момент времени.

Автор приносит благодарность Л. А. Галину за ценное обсуждение результатов этой работы.

Поступила 30 IV 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористых средах. ОГИЗ. Гостехиздат. М. — Л. 1947.
2. Щелкачев В. Н. и Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостехиздат. М. — Л. 1947.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат. М. 1951.
4. Пирвердян А. М. Движение капельной сжимаемой жидкости в пористой среде при турбулентном законе. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 1.