Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О ПРОЧНОСТИ БЫСТРО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

М. Ш. Микеладзе

(Москва)

§ 1. О возможности чисто пластического состояния длинного сплошного цилиндра при условии несжимаемости материала последнего. Пусть длинный сплошной цилиндр вращается вокруг своей оси. Обозначим через σ_r, σ_θ и σ_z соответственно радиальное, кольцевое и осевое напряжения в теле цилиндра. Будем предполагать, что материал цилиндра полностью перешел в пластическое состояние. Тогда

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2\sigma_s{}^2 \tag{1.1}$$

где σ_s — предел текучести материала. Нетрудно показать, что в силу осевой симметрии и предположения о несжимаемости материала цилиндра дифференциальное уравнение совместности деформаций для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$d \log [r^2\psi (\sigma_\theta - \sigma_r)] = 0 \tag{1.2}$$

(При этом предполагается, что цилиндр находится в плоско-деформированном состоянии.) Откуда

$$r^2\psi (\sigma_\theta - \sigma_r) = C \tag{1.3}$$

где ψ — коэффициент пластичности, а r — радиус.

В силу допущения о несжимаемости материала имеем

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_0) + 3G \frac{\varepsilon_z}{\psi} \tag{1.4}$$

где G обозначает модуль упругости на сдвиг, а ε_z — постоянную осевую деформацию.

При $r = 0$, поскольку при этом выполняется условие $\sigma_r = \sigma_\theta$, соотношения (1.1) и (1.4) дают

$$\left(3G \frac{\varepsilon_z}{\psi}\right)^2 = \sigma_s{}^2 \qquad \text{или} \qquad \psi = \frac{3G\varepsilon_z}{\sigma_s} \tag{1.5}$$

Таким образом, в выражении (1.3) постоянную интегрирования C следует положить равной нулю. Следовательно, соотношение $\sigma_r = \sigma_\theta$ справедливо для всех точек сечения цилиндра; но тогда на основании (1.1) и (1.4) по всему сечению будет справедливым и выражение (1.5). Из постоянства коэффициента пластичности ψ следует, что он равняется единице (значение, принимаемое функцией ψ на внешнем круговом контуре сечения цилиндра). На основании последнего результата следует заключить, что цилиндр деформируется упруго, а это противоречит исходным предположениям.

Таким образом, задача о чисто пластическом состоянии вращающегося сплошного цилиндра содержит противоречия и, следовательно, неразрешима в предположении о несжимаемости материала и плоско-деформированном состоянии.

Это обстоятельство осталось незамеченным А. Надаи, который в своих монографиях [1,2] при рассмотрении данной задачи считал материал цилиндра несжимаемым, а кольцевые и радиальные напряжения полагал равными между собой. Результаты А. Надаи без изменения воспроизведены в недавно опубликованной книге Фройдэнталя [3].

§ 2. Чисто пластическое состояние полого цилиндра. *а) Длинный полый цилиндр, по основаниям которого действует осевая сила.* Рассматриваемая задача является родственной с задачей о равновесии цилиндрической трубы под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений и осевой нагрузки; решение последней задачи дает В. В. Соколовский [4].

Чисто пластическое состояние вращающегося полого цилиндра при допущении о несжимаемости материала последнего описывается системой дифференциальных и функциональных уравнений [1]:

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = -\frac{\gamma\omega^2 b^2}{g}\rho \tag{2.1}$$

$$2\sigma_z = \sigma_r + \sigma_\theta + 6\frac{G\varepsilon_z}{\psi} \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[\rho^2\psi(\sigma_r - \sigma_\theta)\right] = 0 \tag{2.3}$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2kf(\psi)\sqrt{1 - 3\left[\frac{G\varepsilon_z}{k\psi f(\psi)}\right]^2} \tag{2.4}$$

В этих соотношениях $\rho = r/b$ обозначает безразмерный радиус, b — радиус внешнего кругового контура, γ/g — плотность материала цилиндра, ω — угловую скорость вращения, $f(\psi)$ — функцию упрочнения и, наконец, $k = \sigma_s/\sqrt{3}$ — пластическую константу.

Учитывая граничное условие $\psi = f(\psi) = 1$ при $\rho = 1$, на основании соотношений (2.3) и (2.4) можем написать

$$\psi f(\psi) = \frac{\sqrt{1 - 3\delta^2(1-\rho^4)}}{\rho^2} \qquad \left(\delta = \frac{G\varepsilon_z}{k}\right) \tag{2.5}$$

Пусть материал цилиндра за пределами упругости подчиняется линейному закону упрочнения. Тогда, как известно [4], между функциями ψ и $f(\psi)$ существует зависимость

$$f(\psi) = \frac{G - G_1}{G - G_1\psi} \tag{2.6}$$

В последней формуле через G_1 обозначается половина углового коэффициента прямой упрочнения. Формулы (2.5) и (2.6) дают

$$\psi = \frac{\sqrt{1 - 3\delta^2(1-\rho^4)}}{\rho^2 - \left[\rho^2 - \sqrt{1 - 3\delta^2(1-\rho^4)}\right]G_1/G} \tag{2.7}$$

Имея выражения для ψ и $f(\psi)$, на основании соотношения (2.4), можем написать

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2k\sqrt{1-3\delta^2}\left[\frac{1 - G_1/G}{\sqrt{1 - 3\delta^2(1-\rho^4)}} + \frac{G_1/G}{\rho^2}\right] \tag{2.8}$$

В результате подстановки выражения (2.8) в дифференциальное уравнение (2.1) и интегрирования последнего, при условии $\sigma_r = n^2\omega^2$, при $\rho = 1$ получим

$$\sigma_r = \omega^2\left[n^2 + \frac{\gamma b^2}{2g}(1-\rho^2)\right] + \frac{G_1}{G}k\sqrt{1-3\delta^2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \\ + k\left(1 - \frac{G_1}{G}\right)\log\frac{(1+\sqrt{1-3\delta^2})\left(\sqrt{1-3\delta^2(1-\rho^4)} - \sqrt{1-3\delta^2}\right)}{3\delta^2\rho^2} \tag{2.9}$$

[1] Эта система уравнений полностью совпадает с таковой для трубы [4]. Исключение составляет первое уравнение равновесия, в котором появляется член $(-\gamma\omega^2 b^2\rho/g)$, обусловленный наличием инерционной нагрузки.

Граничное условие на внутреннем круговом контуре барабана

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha = \frac{a}{b}$$

позволяет найти значение квадрата угловой скорости ω^2 с точностью до параметра δ^2. Имеем

$$\omega^2 = -\frac{k}{n^2 + \gamma b^2 (1 - \alpha^2)/2g} \left[\frac{G_1}{G} \sqrt{1 - 3\delta^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{G_1}{G}\right) \log \frac{(1 + \sqrt{1 - 3\delta^2})(\sqrt{1 - 3\delta^2 (1 - \alpha^4)} - \sqrt{1 - 3\delta^2})}{3\delta^2 \alpha^2} \right] \tag{2.10}$$

Для определения параметра δ^2 пользуемся условием

$$2\pi b^2 \int_1^\alpha \sigma_z \rho \, d\rho = P(\omega^2) \tag{2.11}$$

которое получено в результате приравнивания главного вектора усилий, действующих в поперечном сечении полого цилиндра, заданной осевой нагрузке $P(\omega^2)$.

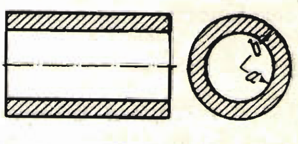
Напряжение σ_z, стоящее под знаком интеграла в формуле (2.11), на основании соотношений (2.2), (2.7), (2.8) и (2.9) определяется следующим образом:

$$\sigma_z = \omega^2 \left[n^2 + \frac{\gamma b^2}{2g} (1 - \rho^2) \right] + \frac{k (1 - G_1/G)}{\sqrt{1 - 3\delta^2 (1 - \rho^4)}} \left[\sqrt{1 - 3\delta^2} + 3\delta\rho^2 \right] +$$

$$+ k \left(1 - \frac{G_1}{G}\right) \log \frac{(1 + \sqrt{1 - 3\delta^2})(\sqrt{1 - 3\delta^2 (1 - \rho^4)} - \sqrt{1 - 3\delta^2})}{3\delta^2 \rho^2} +$$

$$+ k \frac{G_1}{G} (\sqrt{1 - 3\delta^2} + 3\delta) \tag{2.12}$$

б) *Свободно вращающийся барабан, стенки и боковая поверхность которого свободны от напряжений* (фиг. 1). Поскольку в рассматриваемой задаче напряжение σ_z есть функция только радиуса, то очевидно, что при отсутствии какой-либо осевой нагрузки по торцам барабана, $\sigma_z \equiv 0$ в любом поперечном сечении последнего. Таким образом, как деформированное, так и напряженное состояния барабана являются плоскими. Нетрудно показать, что условие пластичности (2.4) при помощи соотношения (2.2), где осевое напряжение σ_z положено равным нулю, переходит в известное для плоско-напряженного состояния условие пластичности



Фиг. 1

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = f^2(\psi) \sigma_s^2 \tag{2.13}$$

Следовательно, рассматриваемая задача является частным случаем предыдущей. Положив в формуле (2.12) $\sigma_z = n^2 = 0$ и $\rho = 1$, получим

$$\sqrt{1 - 3\delta^2} + 3\delta = 0 \qquad \text{или} \qquad \delta^2 = \frac{1}{12} \tag{2.14}$$

Обозначив через $u_0 = \sqrt{g\sigma_s/\gamma}$ скорость, при которой вращающееся тонкое кольцо переходит в пластическое состояние, на основании выражений (2.10) и (2.14) получим формулу для определения той предельной окружной скорости $u = \omega b$, которой соответствует чисто пластическое состояние барабана:

$$u = u_0 \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} \frac{G_1}{G} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1 - G_1/G}{\alpha^2 - 1} \log \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3 + \alpha^4} - \sqrt{3})}{\alpha^2}} \tag{2.15}$$

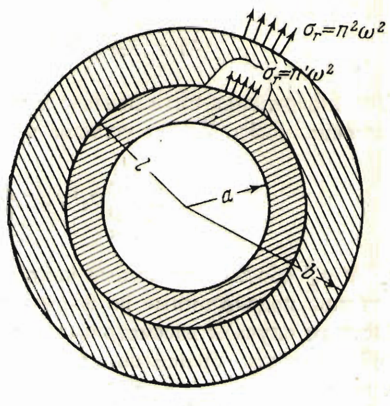
Здесь приводится табл. 1 значений предельной окружной скорости u при различных значениях α и G_1 / G.

Таблица 1

$\frac{u}{u_0}$		G_1/G			
		0.0	0.1	0.2	0.3
α	0.9	1.07	1.08	1.08	1.09
	0.8	1.14	1.15	1.17	1.18
	0.7	1.22	1.24	1.26	1.28

Таблица 2

$\frac{u}{v}$		G_1/G			
		0.0	0.1	0.2	0.3
α	0.9	1.05	1.06	1.06	1.07
	0.8	1.11	1.12	1.13	1.14
	0.7	1.16	1.18	1.20	1.22



Фиг. 2

§ 3. Упруго-пластическое состояние вращающегося цилиндра. Пусть в пределах кольцевой зоны $a \leqslant r \leqslant l$ материал цилиндра полностью перешел в пластическое состояние (фиг. 2). Если через ω обозначить ту угловую скорость, при которой достигается рассматриваемое состояние цилиндра, то согласно формуле (2.10) можем написать

$$\omega^2 = -\frac{k}{n'^2+\gamma l^2(1-\alpha'^2)/2g}\left[\frac{G_1}{G}\sqrt{1-3\delta^2}\left(1-\frac{1}{\alpha'^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{G_1}{G}\right)\log\frac{(1+\sqrt{1-3\delta^2})(\sqrt{1-3\delta^2(1-\alpha'^4)}-\sqrt{1-3\delta^2})}{3\delta^2\alpha'^2}\right] \tag{3.1}$$

Здесь $\alpha' = a / l$ обозначает отношение внутреннего радиуса цилиндра к радиусу границы, а неизвестный параметр n'^2 характеризует собой радиальное напряжение σ_r на границе между упругой и пластической зонами ($\sigma_r = n'^2 \cdot \omega^2$).

Далее нетрудно определить напряжения в пластической части цилиндра с точностью до двух параметров n'^2 и δ^2. Так, например, осевое напряжение σ_z внутри пластической зоны, согласно формуле (2.12), выражается следующим образом:

$$\sigma_z = \omega^2\left[n'^2+\frac{\gamma}{2g}(l^2-r^2)\right]+\frac{k(1-G_1/G)}{\sqrt{1-3\delta^2[1-(r/l)^4]}}[\sqrt{1-3\delta^2}+3\delta(r/l)^2]+$$

$$+k\left(1-\frac{G_1}{G}\right)\log\frac{(1+\sqrt{1-3\delta^2})(\sqrt{1-3\delta^2[1-(r/l)^4]}-\sqrt{1-3\delta^2})}{3\delta^2(r/l)^2}+$$

$$+k\frac{G_1}{G}(\sqrt{1-3\delta^2}+3\delta) \tag{3.2}$$

Для упругой кольцевой зоны $l \leqslant r \leqslant b$ напряжения σ_r, σ_θ и σ_z выражаются формулами, известными из теории упругости:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = C_1 \mp \frac{C_2}{r^2} - \frac{2(1+\nu)\pm(1-\nu)}{8}\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 \tag{3.3}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r+\sigma_\theta)+2(1+\nu)k\delta$$

На внешней и внутренней круговых границах упругой зоны соответственно имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= n^2\omega^2 \qquad &\text{при} \quad r = b \\ \sigma_r &= n'^2\omega^2 \qquad &\text{при} \quad r = l \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = 6k^2$$

Для определения пяти неизвестных параметров ω^2, n'^2, C_1, C_2 и δ имеем четыре соотношения (3.1), (3.4) и условие на торцах цилиндра

$$2\pi\left[\int_a^l \sigma_z{}^p\, rdr + \int_l^b \sigma_z{}^l\, rdr\right] = P(\omega^2) \tag{3.5}$$

где σ_z^p и σ_z^e обозначают осевые напряжения в пластической и упругой зонах, соответственно подсчитанные по формулам (3.2) и (3.3).

Частным случаем рассматриваемой задачи является задача об определении той угловой скорости вращения, при которой возникают пластические деформации вдоль внутреннего кругового контура полого цилиндра.

Для решения этой задачи следует в выражениях (3.4) и (3.5) положить $l = a$ и $n'^2 = 0$. При этом напряжения σ_r, σ_θ и σ_z определяются по формулам (3.3).

В частности, как нетрудно в этом убедиться, для вращающегося барабана, стенки и боковые поверхности которого свободны от напряжений, окружная скорость v, при которой появляется пластическая деформация, определяется по формуле

$$v = \frac{2u_0}{\sqrt{3 + \nu + (1-\nu)\,\alpha^2}} \tag{3.6}$$

На основании формул (3.6) и (2.15) можно написать

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2}\sqrt{[3 + \nu + (1-\nu)\,\alpha^2]\left[\frac{1}{\alpha^2}\frac{G_1}{G} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1 - G_1/G}{\alpha^2 - 1}\log\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3+\alpha^4} - \sqrt{3})}{\alpha^2}\right]} \tag{3.7}$$

В табл. 2 мы приводим значения u/v для различных значений α и G_1/G. При этом коэффициент Пуассона ν принимается равным 0.3.

В расчетной практике вращающиеся барабаны рассматривают как свободные тонкие кольца [5]. Как это следует из табл. 1 и 2, в результате такого подхода к задаче значения предельных скоростей значительно искажаются, правда, в запас прочности конструкции.

Поступила 4 VII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность. ОНТИ. М.—Л. 1936.
2. Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw Hill Book Company. New York. Toronto. London. 1950.
3. Freudenthal, Alfred M. The inelastic behaviour of engineering materials and structures. New York. I. Willey. London. Chapman Hall. 1950.
4. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат. М.—Л. 1950.
5. Жирицкий Г. С. Авиационные газовые турбины. Оборонгиз. 1950.