

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ОТ ЗВУЧАЩЕГО ДИСКА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

С. С. Войт

(Москва)

Л. Н. Сретенским^[1] был рассмотрен вопрос о распространении волн от звучащего круглого диска. Д. Н. Четаев^[2] обобщил эту задачу на случай диска произвольной формы. В настоящей работе решается задача о распространении волн от звучащего диска, находящегося в поступательно движущемся потоке жидкости. Решение задачи исследуется методами асимптотических разложений и указываются области приложимости этих разложений.

§ 1. Рассмотрим источник гармонических звуковых волн, находящийся в безграничном потоке жидкости, движущейся с постоянной скоростью U в направлении оси x прямоугольной системы координат с началом, совпадающим с источником. Известно, что потенциал скоростей звуковых волн в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = c^2 \Delta \Phi \quad (1.1)$$

Общее выражение для потенциала источника в движущейся среде имеется в литературе, например^[3,4]. Поскольку в дальнейшем этот потенциал будет использован, дадим непосредственный вывод его из уравнения (1.1).

Так как движение периодическое с частотой σ , то можно положить

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{i\sigma t} \varphi_1(x, y, z) \quad (1.2)$$

Введем цилиндрическую систему координат x, r, θ с осью симметрии x . В силу симметрии задачи относительно этой оси потенциал скоростей от угловой координаты θ зависеть не будет. Преобразуя уравнение (1.1) при помощи (1.2), а также переходя от потенциала $\varphi_1(x, y, z)$ в декартовой системе координат к потенциалу $\varphi(x, r)$ в цилиндрической системе, будем иметь

$$-\frac{\sigma^2}{c^2} \varphi + 2i\beta \frac{\sigma}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (1.3)$$

где через β обозначено отношение $\beta = U/c$. Отыскивая решение этого уравнения в виде $\varphi = J_0(kr)X(x)$, где $J_0(kr)$ — бесселева функция нулевого порядка, получим

$$\varphi = J_0(kr) \exp \left[\left(i \frac{\sigma \beta}{c(1-\beta^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{k^2 - \frac{\sigma^2}{c^2(1-\beta^2)}} \right) x \right] \quad (1.4)$$

Умножая это решение на некоторую пока еще неопределенную функцию $F(k)$ и интегрируя его по k от 0 до ∞ , получим вновь решение уравнения (1.3). Пользуясь известной формулой

$$\int_0^{\infty} J_0(kr) \frac{k}{\sqrt{k^2 - m^2}} \exp(-p\sqrt{k^2 - m^2}) dk = \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}} \exp(-im\sqrt{r^2 + p^2}) \quad (1.5)$$

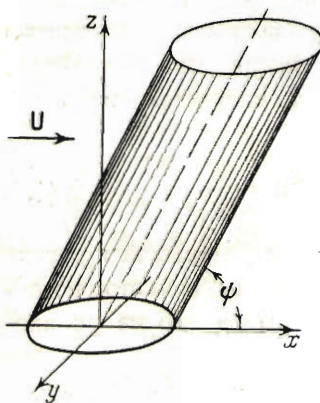
и принимая

$$F(k) = \frac{k}{\sqrt{k^2 - m^2}}, \quad m^2 = \frac{\sigma^2}{c^2(1 - \beta^2)}$$

получим, вводя вновь множитель, зависящий от времени:

$$\Phi = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{r^2(1 - \beta^2) + x^2}} \exp\left[i\sigma\left(\frac{\beta x}{(1 - \beta^2)c} - \frac{1}{(1 - \beta^2)c}\sqrt{r^2(1 - \beta^2) + x^2} + t\right)\right] \quad (1.6)$$

Это выражение представляет собой потенциал источника в движущейся среде. Оно удовлетворяет уравнению (1.1), обладает необходимой особенностью в начале координат, при $\beta = 0$ обращается в обычный потенциал источника.



Фиг. 1

Сформулируем теперь следующую задачу: рассмотрим полупространство $z > 0$, заполненное идеальной жидкостью, движущейся с постоянной скоростью U в направлении оси x . В отверстии S жесткой стенки $z = 0$ колеблется по гармоническому закону

$$\dot{z} = ve^{i\sigma t}$$

круглый диск. Требуется изучить получающееся от этих колебаний акустическое поле в полупространстве $z > 0$ (фиг. 1).

Решение задачи получится, если по поверхности диска распределить источники, потенциал которых для движущейся среды известен:

$$\varphi = \frac{v}{2\pi} \exp\left[i\frac{\sigma\beta x}{c(1 - \beta^2)}\right] \iint_S \frac{1}{\Omega} \exp\left[-i\frac{\sigma}{c(1 - \beta^2)}(\beta\xi + \Omega)\right] ds \quad (1.7)$$

Здесь

$$\Omega = \sqrt{[(y - \eta)^2 + z^2](1 - \beta^2) + (x - \xi)^2}$$

При этом x, y, z — координаты точки P , в которой находится значение потенциала, ξ и η — переменные интегрирования, временной множитель опущен.

Пользуясь формулой разрыва нормальной производной потенциала простого слоя, можно показать, что максимальная нормальная скорость частиц жидкости, прилегающих к диску, определяемая формулой (1.7), есть действительно v .

§ 2. Формула (1.7) дает решение поставленной задачи. Однако на основании нее нельзя ничего сказать о характере процесса. Некоторые его особенности удастся выяснить, применяя для исследования решения методы асимптотических разложений в предположении, что частота колебаний так велика, что $\omega = \sigma a / c$ — большое число (a — радиус диска).

Вводя в формуле (1.7) безразмерные величины x/a , y/a , z/a , ξ/a , η/a , а также обозначая

$$\begin{aligned} \omega(\xi, \eta) &= \frac{1}{\beta^2 - 1} \left\{ \beta \xi + \sqrt{[(y - \eta)^2 + z^2] (1 - \beta^2) + (x - \xi)^2} \right\} \\ F(\xi, \eta) &= \frac{1}{V[(y - \eta)^2 + z^2] (1 - \beta^2) + (x - \xi)^2} \\ A(x) &= \frac{av}{2\pi} \exp \left[i\omega \frac{\beta x}{1 - \beta^2} \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

получим

$$\varphi = A(x) \iint_S F(\xi, \eta) e^{i\omega w(\xi, \eta)} d\xi d\eta \quad (2.2)$$

Здесь S — круг единичного радиуса, а величины, приведенные к безразмерным, обозначены прежними буквами.

Для асимптотической оценки двойного интеграла вида (2.2) воспользуемся методом перевала, обобщенным на двойные интегралы. Идеи этого обобщения имеются в работе Пуанкаре [5]. Развитие этого метода приведено в статье М. И. Конторовича и Ю. К. Муравьева [6]. Воспользуемся их формулой

$$\begin{aligned} & \iint_S F(\xi, \eta) e^{i\omega w(\xi, \eta)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{i}{\omega} \left[\pm \frac{2\pi}{V(\omega_{\xi\xi} \omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2)_{00}} F(\xi_0, \eta_0) e^{i\omega w(\xi_0, \eta_0)} - \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} \frac{F(\xi, \eta) e^{i\omega w(\xi, \eta)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \text{grad } w} dl \right] + \frac{1}{\omega} O\left(\frac{1}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ξ_0, η_0 — точка внутри контура, в которой функция $w(\xi, \eta)$ достигает минимума или максимума (в первом случае следует взять верхний знак, а во втором — нижний); индексы 00 указывают на то, что значение берется в точке ξ_0, η_0 . Контур Γ заключает область интегрирования S , а \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к этому контуру, \mathbf{q} — некоторый вектор, за который можно, например, взять вектор $\text{grad } w$. Тогда интеграл в правой части уравнения (2.3) можно записать в виде

$$J = \int_{\Gamma} \frac{F(\xi, \eta) e^{i\omega w(\xi, \eta)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{q} \cdot \text{grad } w} dl = \int_{\Gamma} \frac{F(\xi, \eta) e^{i\omega w(\xi, \eta)} (\frac{\partial w}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial w}{\partial \eta} d\xi)}{|\text{grad } w|^2} \quad (2.4)$$

Этот интеграл можно оценить уже обычным методом перевала, для чего надо найти максимум и минимум функции $w(\xi, \eta)$ на контуре интегрирования. Порядок этого интеграла получится при этом $\omega^{-1/2}$. Если же на всем контуре или на его части функция $w(\xi, \eta)$ будет сохранять постоянное значение, то $e^{i\omega w(\xi, \eta)}$ на этой части контура можно вынести

за знак интеграла и оставшийся интеграл от ω не будет зависеть вообще. Таким образом, асимптотическое значение интеграла (2.3) при больших ω будет определяться значением подинтегральной функции в точках максимума или минимума функции $w(\xi, \eta)$ внутри контура интегрирования (будем называть эти точки точками первого рода) и максимума и минимума функции $w(\xi, \eta)$ на контуре, ограничивающем область интегрирования S (будем эти точки называть точками второго рода). Случай, когда функция $w(\xi, \eta)$ на контуре или его части есть постоянное, рассматривается особо.

Применим этот способ для асимптотической оценки интеграла (2.2). Точка первого рода определяется условиями

$$\eta = y, \quad \xi = x - \beta z \quad (2.5)$$

Откуда видно, что она попадает внутрь области интегрирования в том случае, если точка $P(x, y, z)$, для которой находится значение потенциала, лежит внутри наклонного цилиндра с образующими параллельными плоскости xz , наклоненными к оси x под углом ψ , определяемым из условия $\operatorname{tg} \psi = \beta^{-1}$. Основанием этого цилиндра служит диск.

Проведем для простоты исследование потенциала в точках плоскости xz . Производя все вычисления по указанной схеме, получаем, что часть потенциала, определяемая точкой первого рода, будет

$$\varphi_1 = -\frac{iav}{\omega} e^{-i\omega z}$$

Вводя временной множитель и отделяя действительную часть, получим

$$\Phi_1 = \frac{av}{\omega} \sin(\omega t - \omega z) \quad (2.6)$$

Перейдем к нахождению части асимптотического значения потенциала происходящей от точек второго рода. Введем полярную систему координат

$$\xi = r \cos \vartheta, \quad \eta = r \sin \vartheta \quad (2.7)$$

Полагая на контуре $r = 1$, найдем производную $\partial w / \partial \vartheta$ и приравняем ее нулю; имеем

$$\frac{\sin \vartheta}{\beta^2 - 1} \left(-\beta + \frac{x - \beta^2 \cos \vartheta}{\sqrt{z^2(1 - \beta^2) - \beta^2 \sin^2 \vartheta - 2x \cos \vartheta + x^2 + 1}} \right) = 0 \quad (2.8)$$

Откуда находим два значения угла $\vartheta_1 = 0$ и $\vartheta_2 = \pi$. Круглая скобка может обращаться в нуль только в точках гиперболы $x^2 = \beta^2 z^2 + \beta^2$. Асимптотическую оценку интеграла для этих точек рассмотрим особо. Можно убедиться в том, что при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$ функция $w(\vartheta)$ имеет соответственно максимум и минимум.

Как известно¹, асимптотическое значение интеграла

$$J = \int_a^b f(\zeta) e^{i\omega u(\zeta)} d\zeta \quad (2.9)$$

¹ См., например, [7], стр. 70.

определяемое точкой $\zeta = \alpha$, в которой функция $u(\zeta)$ достигает максимум или минимум, есть

$$J = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega |u''(\alpha)|}} e^{i\omega u(\alpha)} f(\alpha) e^{\pm 1/4 i\pi} \quad (2.10)$$

Пользуясь формулой (2.10) для асимптотической оценки интеграла (2.4), получим

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & -\frac{ia\nu\sqrt{1-\beta^2}}{V2\pi} \left\{ \frac{\sqrt{R_1} \exp(-1/4 i\pi)}{\sqrt{x-\beta R_1-\beta^2(x-1-\beta R_1)}} \exp\left[i\omega\left(\frac{\beta(x-1)}{1-\beta^2} - \frac{R_1}{1-\beta^2}\right)\right] + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{R_2} \exp(1/4 i\pi)}{\sqrt{x-\beta R_2+\beta^2(x+1-\beta R_2)}} \exp\left[i\omega\left(\frac{\beta(x+1)}{1-\beta^2} - \frac{R_2}{1-\beta^2}\right)\right] \right\} \frac{1}{\omega V\omega} \quad (2.11) \end{aligned}$$

где

$$R_1 = \sqrt{z^2(1-\beta^2) + (x-1)^2}, \quad R_2 = \sqrt{z^2(1-\beta^2) + (x+1)^2} \quad (2.12)$$

Вводя множитель, зависящий от времени, и отделяя действительную часть, получим асимптотическое значение части потенциала, определяемой точками второго рода:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & -\frac{a\nu\sqrt{1-\beta^2}}{V2\pi} \frac{1}{\omega V\omega} \times \\ & \times \left\{ \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{x-\beta R_1-\beta^2(x-1-\beta R_1)}} \cos\left[\sigma t + \frac{\omega\beta}{1-\beta^2}(x-1) - \frac{\omega R_1}{1-\beta^2} + \frac{\pi}{4}\right] - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{x-\beta R_2+\beta^2(x+1-\beta R_2)}} \cos\left[\sigma t + \frac{\omega\beta}{1-\beta^2}(x+1) - \frac{\omega R_2}{1-\beta^2} - \frac{\pi}{4}\right] \right\} \quad (2.13) \end{aligned}$$

Наконец если рассмотреть интеграл (2.4) в точках гиперболы $x^2 = \beta^2 z^2 + \beta^2$, получим тот особый случай асимптотической оценки, когда $w(\xi, \eta)$ постоянно на контуре интегрирования и, следовательно, выражение (2.4) примет вид:

$$J = e^{i\omega w(\xi, \eta)} \int_{\Gamma} \frac{F(\xi, \eta)}{|\text{grad } w|^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial w}{\partial \eta} d\xi \right) \quad (2.14)$$

Продельвая все вычисления, получим

$$\Phi_3 = -a\nu \sin(\sigma t - \omega \sqrt{1+z^2}) \frac{1}{\omega} \quad (2.15)$$

Можно показать, что это же выражение для части потенциала, исходящей от контурного интеграла, справедливо в малой окрестности гиперболы, такой, что в ней $x^2 = \beta^2 z^2 + \beta^2 \pm \beta^2 \epsilon$, где ϵ — малое число.

Для выяснения границ приложимости асимптотических разложений необходимо провести дополнительное исследование. При вычислении асимптотического значения интеграла по контуру Γ использовалось выражение, в знаменателе которого множителем стояла вторая производная функции w в экстремальной точке контура. Асимптотическое выражение имеет смысл в том случае, если эта производная по абсолютной величине больше некоторого положительного числа. Причем чем меньше это число, тем при больших значениях ω асимптотическое выражение вступает в силу.

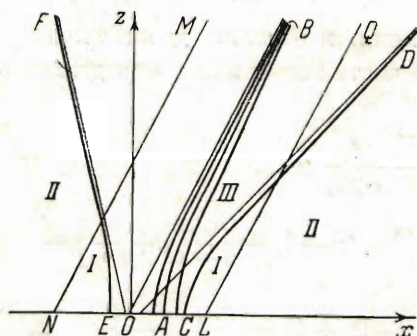
Вторые производные функции $\omega(\vartheta)$ в точках ϑ_1 и ϑ_2 имеют вид:

$$\begin{aligned}\omega''(\vartheta_1) &= \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(-\beta + \frac{x - \beta^2}{\sqrt{z^2(1 - \beta^2) + (x - 1)^2}} \right) \\ \omega''(\vartheta_2) &= -\frac{1}{\beta^2 - 1} \left(-\beta + \frac{x + \beta^2}{\sqrt{z^2(1 - \beta^2) + (x + 1)^2}} \right)\end{aligned}\quad (2.16)$$

Эти выражения обращаются в нуль на ветви AB гиперболы (фиг. 2):

$$\frac{x^2}{\beta^2} - z^2 = 1 \quad (2.17)$$

Так как точки ϑ_1 и ϑ_2 являются точками максимума и минимума функции $\omega(\vartheta)$ на контуре, то круглые скобки в выражениях (2.16)



Фиг. 2

должны быть одного знака. Справа от гиперболы AB они положительны, а слева отрицательны. Условие приложимости асимптотического выражения Φ_2 справа от гиперболы AB запишется в виде

$$\begin{aligned}-\beta + \frac{x - \beta^2}{R_1} &> \eta \\ -\beta + \frac{x + \beta^2}{R_2} &> \eta\end{aligned}\quad (2.18)$$

где число η таково, что $\eta\omega$ достаточно велико для практической точности асимптотического выражения. Условие приложимости асимптотического выражения Φ_2 слева от гиперболы AB запишется в виде

$$\beta - \frac{x - \beta^2}{R_1} > \eta, \quad \beta - \frac{x + \beta^2}{R_2} > \eta \quad (2.19)$$

Решая системы неравенств (2.18) и (2.19), получим, что система (2.18) удовлетворяется вправо от ветви CD гиперболы:

$$\frac{(x - \delta)^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.20)$$

где

$$\delta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1 - \alpha^2}, \quad a = \frac{\alpha(1 - \beta^2)}{1 - \alpha^2}, \quad b = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha^2}}, \quad \alpha = \beta + \eta$$

а система (2.19) удовлетворяется влево от ветви EF гиперболы:

$$\frac{(x + \delta_1)^2}{a_1^2} - \frac{z^2}{b_1^2} = 1 \quad (2.21)$$

где

$$\delta_1 = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{1 - \gamma^2}, \quad a_1 = \frac{\gamma(1 - \beta^2)}{1 - \gamma^2}, \quad b_1 = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{1 - \gamma^2}}, \quad \gamma = \beta - \eta$$

Легко видеть, что асимптота гиперболы (2.20) наклонена менее, а гиперболы (2.21) более круто к оси x , чем асимптота гиперболы (2.17).

Подведем итоги проведенным исследованиям. Потенциал скоростей представляется асимптотически в области *II* в виде Φ_2 , в области *I* в виде суммы $\Phi_1 + \Phi_2$, в области *III*, окружающей ветвь гиперболы *AB*, в виде суммы $\Phi_1 + \Phi_3$. И, наконец, в остальной части внутри сечения цилиндра *MNLQ* потенциал представляется через сумму Φ_1 и интеграла по контуру Γ , который можно, например, вычислять методами численного интегрирования. Потенциал Φ_1 представляет плоские волны, распространяющиеся в направлении оси цилиндра со скоростью

$$c_\psi = \frac{c}{\sin \psi} = c\sqrt{1 + \beta^2}$$

Скорость распространения этих волн в направлении оси *z* равна скорости звука *c*. Потенциал Φ_2 представляет собой сферические волны, исходящие из точек *N* и *L* и «сдуваемые» потоком. Очевидно, что при интерференции этих волн будут получаться зоны усиления и ослабления звука. Потенциал Φ_3 представляет волны, близкие к плоским.

Асимптотическая картина в плоскостях, параллельных *xz*, получается тем же способом, но оценка контурных интегралов по точкам второго рода вызывает алгебраические затруднения. Однако асимптотическая картина в плоскости *xz* вполне дает представление о «сносе» звуковых волн потоком.

Интересно сравнение полученных результатов с результатами задачи, рассмотренной в работе^[1] Л. Н. Сретенским. Поток жидкости сносит зону концентрации звука над диском и соответственно меняет области приложимости асимптотических выражений.

Наконец, отметим, что решение той же задачи для диска произвольной формы принципиально не сложнее. Асимптотическая оценка интегралов ведется по тому же пути. Точки первого рода будут находиться внутри наклонного криволинейного цилиндра, и оценка интегралов по ним не вызовет никаких осложнений. Оценка по точкам второго рода вызывает алгебраические трудности в случае сложной границы диска.

В заключение приносим глубокую благодарность Л. Н. Сретенскому за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Поступила 25 VII 1952

Морской гидрофизический
институт АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Распространение волн от звучащего диска. Ученые записки МГУ (механика). 1951. Т. IV. Вып. 154.
2. Четаев Д. Н. Об излучении звука поршнем. ДАН СССР. 1951. Т. LXXVI. № 6.
3. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. Гостехиздат. 1946.
4. Красильщикова Г. А. Обтекание тонких тел сверхзвуковым потоком. Ученые записки МГУ (механика). 1951. Т. IV. Вып. 154.
5. Poincaré H. Sur la diffraction des ondes Hertiennes. Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1910. Т. XXIX.
6. Конторович М. И. и Муравьев Ю. К. Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задачи диффракции. ЖТФ. 1952. Т. XXII. Вып. 3.
7. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ. 1936.