

ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

В предлагаемой работе рассматриваются автомодельные турбулентные движения сжимаемой жидкости в пористой среде при политропической связи плотности и давления газа, в предположении справедливости основного закона турбулентной фильтрации Л. С. Лейбензона^[1]. Рассматриваемые движения отвечают распространению газа в пространстве, в начальный момент свободном от газа. Показывается существование трех различных режимов, определяемых показателем политропы и степенью турбулентности потока. Один из указанных режимов характеризуется конечной скоростью распространения переднего фронта газа; наиболее интересным для данной задачи представляется второй режим, который характеризуется бесконечно большой скоростью распространения переднего фронта газа и наиболее быстрым заполнением пространства газом; третий режим занимает промежуточное положение. Полученные решения также могут быть использованы в теории движения газа в длинных газопроводах. В конце работы приведены результаты численных расчетов для ламинарного изотермического движения газа.

§ 1. Задача о турбулентной фильтрации газа в пористой среде была поставлена Л. С. Лейбензоном^[1]. Им было показано, что если плотность и давление газа связаны между собой политропическим законом, то при турбулентной фильтрации плотность газа ρ подчиняется уравнению

$$c \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{\Omega} \operatorname{grad} \rho^k \right) \quad 1 \leq k = n + 1 < \infty \quad (1.1)$$

где c — константа, определяемая свойствами среды и режимом движения, n — показатель политропы.

По закону турбулентной фильтрации, предложенному в работе^[1]:

$$\Omega = |\operatorname{grad} \rho^k|^{1-m}$$

здесь m — некоторое число, характеризующее степень турбулентности потока, $1 \geq m \geq 0,5$, причем $m = 1$ отвечает ламинарному течению газа. Получающееся при $m = 1$ уравнение было рассмотрено с точки зрения его автомодельных решений ранее^[2,3].

Для случаев плоских волн, цилиндрической и сферической симметрии движения уравнение (1.1) принимает вид:

$$c \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^s \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho^k \right) \left| \frac{\partial}{\partial x} \rho^k \right|^{m-1} \right] \quad (1.3)$$

Здесь x — координата, а s равно 0, 1, 2 соответственно в случаях плоских волн, цилиндрической и сферической симметрии движения. В важном частном случае, когда плотность газа убывает внутрь пространства, т. е. $\partial\rho/\partial x$ неположительна, получаем уравнение

$$c \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^s \left(-\frac{\partial}{\partial x} \rho^k \right)^m \right] = 0 \quad (1.4)$$

которое и будет рассматриваться в дальнейшем.

§ 2. Построим решения уравнения (1.4) типа «мгновенного источника». Эти решения удовлетворяют условиям

$$\int_0^{\infty} \rho_s(x, t) x^s dx = C_s, \quad \rho_s(x, 0) = C_s \delta_s(x) \quad (2.1)$$

где $\delta_s(x)$ равна нулю при $x \neq 0$ и $\int_0^{\infty} \delta_s(x) x^s dx = 1$. Для единичных источников

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{1}{2\pi}, \quad C_2 = \frac{1}{4\pi} \quad (2.2)$$

При $km > 1$ получаем подобно работе [3]

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \left[\frac{C_0^{1+m} c}{t} \right]^{\mu_0} f_0(xT_0^{-\mu_0}), & \mu_0 &= \frac{1}{m(k+1)} \\ \rho_1 &= \left[\frac{C_1^{1+m} c^2}{t^2} \right]^{\mu_1} f_1(xT_1^{-\mu_1}), & \mu_1 &= \frac{1}{2km+m-1} \\ \rho_2 &= \left[\frac{C_2^{1+m} c^3}{t^3} \right]^{\mu_2} f_2(xT_2^{-\mu_2}), & \mu_2 &= \frac{1}{3km+m-2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$T_s = \frac{C_s^{km-1} t}{c}, \quad f_s(\xi) = \begin{cases} \left[l_{s,m,k} - \frac{(km-1)}{k(1+m)} h \xi^{-\frac{1}{m}} \right]^{\frac{m}{km-1}} & \xi \leq \xi_0 \\ 0 & \xi \geq \xi_0 \end{cases}$$

$$h = kms + km + m - s, \quad \xi_0 = \left[l_{s,m,k} h^{\frac{1}{m}} \frac{k(1+m)}{km-1} \right]^{\frac{m}{m+1}}$$

$$l_{s,m,k} = \left\{ \left[\frac{km-1}{k(1+m)} \right]^{\frac{m(1+s)}{1+m}} \frac{(m+1)}{m} h^{-\frac{1+s}{1+m}} B\left(\frac{m}{km-1}, \frac{m(1+s)}{1+m} \right) \right\}^{\frac{(km-1)(1+m)}{h}}$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$$

При $km = 1$ получаем

$$\rho_s = \left[\frac{C_s^{1+m} c^{1+s}}{t^{1+s}} \right]^{\frac{1}{1+m}} f_s \left(x c^{\frac{1}{1+m}} t^{-\frac{1}{1+m}} \right) \quad (2.4)$$

где

$$f_s(\xi) = A \exp \left[- \left(\frac{\xi}{1+m} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right]$$

$$A = \left\{ \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\xi}{1+m} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right] \xi^s d\xi \right\}^{-1} = (1+m)^{-(1+s)} \left[\frac{m}{1+m} \Gamma \left(\frac{m(1+s)}{m+1} \right) \right]^{-1}$$

При $km < 1$ имеем для ρ_s те же выражения (2.3), но

$$f_s(\xi) = \left[l_{s,m,k} + \frac{(1-km)}{k(1+m)} h^{-\frac{1}{m}} \xi^{\frac{m+1}{m}} \right]^{-\frac{m}{1-km}}$$

Здесь

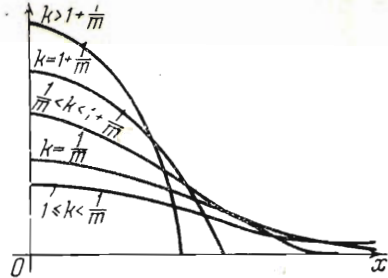
$$l_{s,m,k} = \left\{ \left[\frac{1-km}{k(1+m)} \right]^{\frac{m(1+s)}{1+m}} \frac{(m+1)}{m} h^{-\frac{1+s}{1+m}} B \left(\frac{m}{1-km}, \frac{m(1+s)}{1+m} \right) \right\}^{\frac{(1-km)(1+m)}{h}}$$

Отметим, что для рассматриваемых значений k , m и s всегда имеет место неравенство

$$h = kms + km + m - s > 0$$

При различных k распределение плотности газа в пространстве для одного и того же момента времени, отличного от начального, имеет вид, изображенный на фиг. 1.

При $km > 1$ плотность газа в некоторый момент времени обращается в нуль для всех достаточно далеких точек пространства, т. е. скорость распространения переднего фронта газа конечна. При $km=1$ скорость распространения переднего фронта бесконечно велика. При $km < 1$ упомянутая скорость также бесконечна и распространение газа в глубь пространства происходит гораздо интенсивнее чем в предыдущем случае, что нетрудно показать, сравнивая асимптотическое поведение плотности при $x \rightarrow \infty$ и $t \neq 0$ при $km=1$ и $km < 1$. Последний случай в работе [3] аналога не имеет. (Аналогичное поведение источника получается при $m=1$ и $k < 1$, что было отмечено Я. Б. Зельдовичем и А. С. Компанейцем [2].);



Фиг. 1

§ 3.1. Перейдем к построению основной группы автомоделных решений уравнения (1.4); рассмотрим для этого уравнения краевую задачу

$$\rho(x, 0) = 0 \quad (3.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^s \left(-\frac{\partial}{\partial x} \rho^k \right)^m = \tau t^q \quad (\tau > 0, q \geq 0) \quad (3.2)$$

Эта задача отвечает степенному росту, в частности постоянству расхода газа через начальную плоскость (соответственно ось и центр симметрии в цилиндрическом и сферическом случаях) и отсутствию газа в пространстве в начальный момент.

При помощи анализа размерности можно показать, что в плоском случае

$$\rho = \tau^{\frac{m+1}{m(k+1)}} c^{-\frac{1}{k+1}} t^{\frac{m+q(m+1)}{m(k+1)}} f_0 \left(x \tau^{\frac{1-km}{m(k+1)}} c^{\frac{k}{k+1}} t^{-\frac{q(km-1)+km}{m(k+1)}} \right) \quad (3.3)$$

где функция $f_0(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d}{d\xi} \left\{ \left[-\frac{d}{d\xi} f_0^k \right]^m \right\} + \frac{km+q(km-1)}{m(k+1)} \xi \frac{df_0}{d\xi} - \frac{m+q(m+1)}{m(k+1)} f_0 = 0 \quad (3.4)$$

В случае цилиндрической симметрии движения

$$\rho = (\tau^{1+m} c^{1-m} t^{q(m+1)+m-1})^{\frac{1}{2km+m-1}} f_1 \left[x (\tau^{1-km} c^{km} t^{-q(km-1)-km})^{\frac{1}{2km+m-1}} \right] \quad (3.5)$$

где функция $f_1(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} - \left\{ \frac{d}{d\xi} \left[-\frac{d}{d\xi} f_1^k \right]^m + \frac{1}{\xi} \left[-\frac{d}{d\xi} f_1^k \right]^m \right\} + \\ + \frac{q(km-1)+km}{2km+m-1} \xi \frac{df_1}{d\xi} - \frac{q(m+1)+m-1}{2km+m-1} f_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

В случае сферической симметрии движения

$$\rho = [\tau^{m+1} c^{2-m} t^{q(m+1)+m-2}]^{\frac{1}{3km+m-2}} f_2 \left[x (\tau^{1-km} c^{km} t^{-q(km-1)-km})^{\frac{1}{3km+m-2}} \right] \quad (3.7)$$

где функция $f_2(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} - \left\{ \frac{d}{d\xi} \left[-\frac{d}{d\xi} f_2^k \right]^m + \frac{2}{\xi} \left[-\frac{d}{d\xi} f_2^k \right]^m \right\} + \\ + \frac{q(km-1)+km}{3km+m-2} \xi \frac{df_2}{d\xi} - \frac{q(m+1)+m-2}{3km+m-2} f_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Начальное условие для $f_s(\xi)$ получается из (3.2) в виде

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^s \left[-\frac{d}{d\xi} f_s^k \right]^m = 1 \quad (3.9)$$

Выведем второе условие. Суммарное количество газа в пространстве в момент t равно

$$A_s \int_0^\infty \rho(x, t) x^s dx$$

где $A_0 = 1$, $A_1 = 2\pi$, $A_2 = 4\pi$. Но в силу условия (3.1) и так как газ поступает только через начальную плоскость (соответственно из оси и центра симметрии), то это количество равно интегралу по времени от потока через начальную плоскость (ось, центр). Таким образом, получаем

$$A_s \int_0^\infty \rho(x, t) x^s dx = A_s \int_0^t \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} x^s \left[-\frac{\partial}{\partial x} \rho^k \right]^m \right\} dt$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражения (3.3), (3.5), (3.7) для ρ и в левую часть выражения (3.2), получим второе условие:

$$\int_0^\infty f_s(\xi) \xi^s d\xi = \frac{1}{1+q} \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что $f_s(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и притом достаточно быстро. При этом из непрерывности плотности и потока газа следует, что функции

$f_s(\xi)$ и $d(f_s^k)/d\xi$ должны быть непрерывными. Таким образом, отыскание искомого автомодельного решения привелось к интегрированию уравнения

$$\frac{d}{d\xi} \left[-\frac{d}{d\xi} f_s^k \right]^m + \frac{s}{\xi} \left[-\frac{d}{d\xi} f_s^k \right]^m - \beta \xi \frac{df_s}{d\xi} + \alpha f_s = 0 \quad (3.11)$$

при условиях (3.9) и (3.10); здесь α и β — некоторые константы. Искомое решение и его построение будут существенно отличаться в случаях $km > 1$, $km = 1$, $km < 1$.

Пусть сперва $km \neq 1$. Легко видеть, что уравнение (3.11) допускает группу преобразований

$$\Phi(\xi) = \mu^{-N} f(\mu\xi), \quad N = \frac{m+1}{km-1} \quad (3.12)$$

где μ — любая положительная константа, не меняющую вида уравнения.

Полагая поэтому $f(\xi) = \xi^N \varphi(\eta)$, $\eta = \ln \xi$

приведем уравнение к виду, не содержащему независимой переменной.

Полагаем далее $d\varphi/d\eta = \psi$ и, считая φ независимой переменной, получаем уравнение первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} = & - \frac{1}{m\psi k^m \varphi^{km-m}} [\beta(N\varphi + \psi) - \alpha\varphi] (-N\varphi - \psi)^{1-m} - \\ & - \frac{(k-1)\varphi}{\varphi} [(N\varphi + \psi) - \frac{1}{m\psi} \left[\frac{m(k+1)}{km-1} + s \right] (N\varphi + \psi) - N \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для выяснения хода интегральных кривых уравнения (3.11) удобно исследовать уравнение (3.13).

2. Рассмотрим случай $km > 1$. Исследование уравнения (3.11) в этом случае является обобщением исследования, выполненного в работе [3], поэтому ограничимся приведением окончательного результата. Интегральные кривые уравнения (3.11), удовлетворяющие условию (3.9), разбиваются на два класса. Одни — класс 1 — нигде не пересекают и не касаются оси абсцисс и на бесконечности ведут себя как

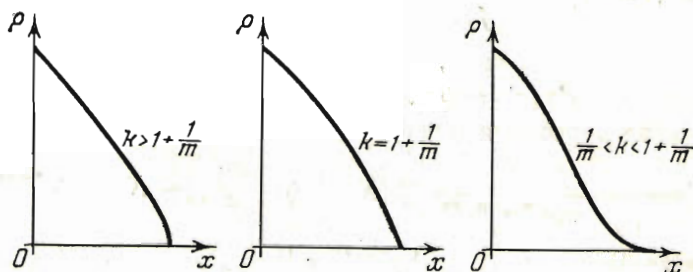
$$D\xi^{\frac{\alpha}{\beta}} + o\left(\xi^{\frac{\alpha}{\beta}}\right), \quad D > 0$$

Эти кривые не подходят по условию (3.10), так как для всех них интеграл в правой части (3.10) расходится. Отметим, что в сферическом и цилиндрическом случаях при $0 \leq q < (s-m)(1+m)^{-1}$ кривые класса 1 на бесконечности стремятся к нулю, но недостаточно быстро для сходимости упомянутого интеграла. Другие кривые — класс 2 — пересекают ось абсцисс в конечных точках под прямым углом, причем при $f_s \rightarrow 0$ величина $d(f_s^k)/d\xi$ для этих кривых стремится к конечному пределу, отличному от нуля. Ни одна из кривых, составленных из отрезка кривой класса 2, до пересечения с осью абсцисс и далее оси абсцисс не подходит, так как полученная таким образом функция не удовлетворяет условию (3.10). В самом деле, умножая (3.11) на ξ^s и интегрируя от нуля

до бесконечности (т. е. до точки пересечения ξ^* кривой класса 2 с осью абсцисс, так как дальше $f_s(\xi) \equiv 0$), имеем

$$\begin{aligned} & \left[\xi^s \left(-\frac{d}{d\xi} f_s^k \right)^m \right]_{\xi=0}^{\xi=\xi^*} - \beta \xi^{s+1} f_s(\xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=\xi^*} + (q+1) \int_0^{\infty} f_s(\xi) \xi^s d\xi = \\ & = -1 + (q+1) \int_0^{\infty} f_s(\xi) \xi^s d\xi + \xi^{*s} \left(-\frac{d}{d\xi} f_s^k(\xi^*) \right)^m = 0 \\ & \int_0^{\infty} f_s(\xi) \xi^s d\xi \neq \frac{1}{1+q} \end{aligned}$$

Искомая функция $f_s(\xi)$ представляется отрезком интегральной кривой Ω , разделяющей эти два класса и пересекающей ось абсцисс в ко-



Фиг. 2

нечной точке ξ_0 , вплоть до пересечения с осью абсцисс и далее тождественно равна нулю. В точке ξ_0 $d(f_s^k)/d\xi = 0$. При малых f_s разделяющая кривая Ω удовлетворяет уравнению

$$f_s^{k-\frac{1}{m}-1} \frac{df_s}{d\xi} = -\frac{1}{k} \beta \frac{1}{m} \xi^{\frac{1}{m}} + O(f_s)$$

Отсюда следует, что при $km > 1 + m$ эта кривая подходит к оси абсцисс под прямым углом; при $km = 1 + m$ под острым углом ν

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{1}{k} \beta \frac{1}{m} \xi_0^{\frac{1}{m}}$$

при $km < 1 + m$ интегральная кривая подходит к оси абсцисс, касаясь ее. Из сказанного следует, что в некоторый момент $t \neq 0$ картина распределения плотности газа в пространстве имеет вид, изображенный на фиг. 2. Здесь изображен случай $s = 0$. При $s \neq 0$ ρ в нуле обращается в бесконечность. Как видно, здесь имеет место конечная скорость распространения переднего фронта газа.

Для эффективного решения рассматриваемой задачи нецелесообразно решать уравнение первого порядка (3.13), а следует прямо искать решение уравнения второго порядка (3.14) следующим способом. Пусть ξ_0 — абсцисса точки пересечения кривой Ω с осью абсцисс. Положим $\xi_0 = 1$, тогда условие (3.9), вообще говоря, не будет выполняться. Ищем

решение уравнения (3.11) $\Phi(\xi)$ такое, что $\xi_0 = 1$ при $\xi < 1$, в виде ряда

$$\Phi(\xi) = (1 - \xi)^{\frac{m}{km-1}} \left\{ \left[\frac{1}{k} \beta^{\frac{1}{m}} \left(k - \frac{1}{m} \right) \right]^{\frac{m}{km-1}} + c_1 (1 - \xi) + c_2 (1 - \xi)^2 + \dots \right\} \quad (3.14)$$

Коэффициенты c_i легко определяются из уравнения (3.11). При помощи (3.14) можно получить ряды (см. стр. 702) для

$$\int_0^1 \xi^s \Phi(\xi) d\xi = P$$

Пользуясь соответствующим представлением, можно получить число P с нужной точностью. При любом μ функция $f(\xi) = \mu^N \Phi(\xi/\mu)$ удовлетворяет условию (3.11). Для $f(\xi)$ значение $\xi_0 = 1/\mu$. Выбрав

$$\mu = [P(1+q)]^{-\frac{km-1}{h}}$$

получим, что $f(\xi)$ удовлетворяет условиям (3.9), (3.10).

3. Перейдем к рассмотрению случая $km < 1$. В работе [3] этот случай аналога не имеет; он имеет важное значение для рассматриваемой задачи. Понижение порядка уравнения (3.11) осуществляется в этом случае, как и в предыдущем, и снова получается уравнение (3.13). Однако исследование этого уравнения и результат в рассматриваемом случае существенно отличаются от предыдущего. Легко видеть прежде всего, что начало координат плоскости $\varphi\psi$ отвечает в данном случае оси ординат плоскости ξf . Найдём направления, по которым интегральные кривые могут входить в начало координат плоскости $\varphi\psi$. Поступая обычным способом, можно показать, что таких направлений два:

$$\frac{\psi}{\varphi} = C_1 = \frac{1+m}{1-km}, \quad \frac{\psi}{\varphi} = C_2 = \frac{k+1}{k(1-km)} - \frac{s}{km} \quad (3.15)$$

Можно показать, что $C_1 < C_2$ при $s = 0$ и $C_1 > C_2$ при $s \neq 0$. Рассматривая поведение интегральных кривых вблизи прямых $\psi = C_1\varphi$ и $\psi = C_2\varphi$ в окрестности начала координат, можно установить, что при $s = 0$ все интегральные кривые входят в начало координат, касаясь прямой $\psi = C_1\varphi$, при $s \neq 0$ — касаясь прямой $\psi = C_2\varphi$. Остановимся на поведении интегральных кривых вблизи оси φ . При $\psi \ll \varphi$ уравнение (3.13) имеет вид:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\psi}{\varphi} \left[\frac{1}{mk^m} (\beta N_1 + \alpha) N_1^{1-m} \varphi^{1-km} - \frac{(k+1)(m+1)}{(1-km)^2} \right] + O(1) \quad (3.16)$$

$$N_1 = -N = \frac{1+m}{1-km}$$

Отсюда следует, что все интегральные кривые пересекают ось φ под прямым углом, кроме кривых, проходящих через точку $\varphi = \varphi_0$, $\psi = 0$, в которой обращается в нуль выражение в фигурных скобках в правой части равенства (3.16). Имеем

$$\varphi_0 = \left[\frac{(k+1)(m+1)}{(1-km)^2} mk^m N_1^{m-1} (\beta N_1 + \alpha) \right]^{\frac{1}{1-km}} \quad (3.17)$$

Если подставить в (3.17) выражения для α и β , то ввиду того что

$$\beta N_1 + \alpha = \frac{1}{1 - km}$$

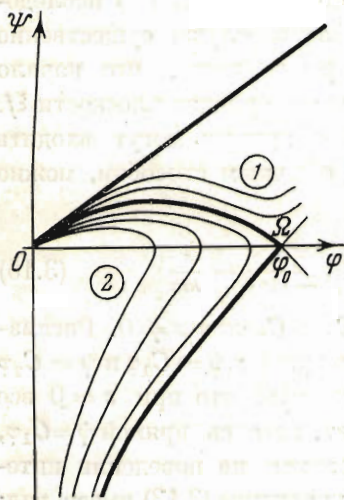
для всех трех случаев $s = 0, 1, 2$, т. е. не зависит от g , φ_0 также не будет зависеть от g и для всех трех случаев

$$\varphi_0 = \left[\frac{(k+1)(m+1)^m m k^m}{(1-km)^m} \right]^{\frac{1}{1-km}} \quad (3.18)$$

В окрестности точки $\varphi = \varphi_0$, $\psi = 0$ уравнение (3.13) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} &= \frac{\psi}{\varphi} \left[(1 - km) \varphi_0^{1-km} \frac{(\varphi - \varphi_0) N_1^{1-m}}{\varphi_0 m \cdot k^m} (\beta N_1 + \alpha) \right] = \\ &= \frac{(m+1)(k+1)}{(1-km)^2} \frac{(\varphi - \varphi_0)}{\varphi} + o\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi}\right) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что вблизи этой точки интегральные кривые ведут себя следующим образом:



Фиг. 3

$$\psi^2 - \frac{(m^2+1)(k+1)}{(1-km)^2} (\varphi - \varphi_0)^2 = C$$

т. е. эта точка особая, типа седла. Других особых точек в правой полуплоскости $\varphi\psi$ нет. Вблизи отрицательной полуоси ψ интегральные кривые удовлетворяют соотношению

$$\psi = \frac{E^1}{\varphi^{k-1}} + O(\varphi), \quad E < 0$$

Таким образом, в интересующей части плоскости $\varphi\psi$ поле интегральных кривых имеет вид, изображенный на фиг. 3.

Легко видеть, что

$$\alpha \leq 0, \quad \beta > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq g \leq \frac{s-m}{1+m}$$

$((s-m)/(1+m)) \geq 0$ только для цилиндрического и сферического случаев). Далее

$$\alpha \geq 0, \quad \beta > 0 \quad \text{при} \quad \frac{s-m}{1+m} \leq g \leq \frac{km}{1-km}$$

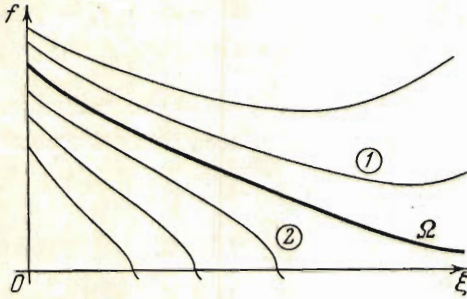
(Из условия (2.5) следует, что $km(1-km)^{-1} > (s-m)(1+m)^{-1}$.)

$$\alpha > 0, \quad \beta \leq 0 \quad \text{при} \quad \frac{km}{1-km} \leq g < \infty$$

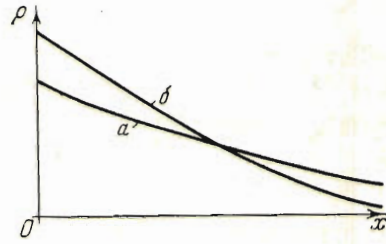
Если $\beta > 0$, то кривые класса 1 на бесконечности совпадают по направлению с прямой:

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\alpha}{\beta} + N_1$$

Переходя к плоскости ξf , мы получим (фиг. 4), что интегральные кривые уравнения (3.11), удовлетворяющие условию (3.9), разбиваются



Фиг. 4



Фиг. 5

на два класса. Кривые класса 1 не пересекают и не касаются оси абсцисс ни в одной конечной точке. При $\xi \rightarrow \infty$ ординаты этих кривых стремятся либо к бесконечности ($\alpha > 0$), либо к постоянному числу, отличному от нуля ($\alpha = 0$), либо к нулю ($\alpha < 0$). Ни одна из этих кривых не удовлетворяет условиям задачи ввиду расходимости для каждой из них интеграла в правой части (3.10). Кривые класса 2 пересекают ось абсцисс в конечных точках под прямым углом, причем в точках пересечения величина $d(f_s^k)/d\xi$ отлична от нуля и конечна. Функции, представляющиеся отрезком кривой класса 2, до пересечения с осью абсцисс и далее тождественно равные нулю, также не удовлетворяют условию (3.10). Единственной кривой, удовлетворяющей условиям задачи, будет кривая Ω , разделяющая эти два класса, представляющая собой образ кривой Ω , данной на фиг. 3.

Выясним асимптотическое поведение решения $f_s(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. При $\varphi \rightarrow \varphi_0$ уравнение кривой Ω имеет вид:

$$\psi = -n(\varphi - \varphi_0) + O(\varphi - \varphi_0), \quad n = (1 - km)^{-1} \sqrt{(1 + m)(1 + k)}$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\varphi = \varphi_0 + O(\xi^{-n})$$

Отсюда получаем асимптотическое представление для $f_s(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$:

$$f(\xi) = \varphi_0 \xi^{-N_1} + O(\xi^{-n-N_1}), \quad N_1 = \frac{1 + m}{1 - km} \quad (3.19)$$

Распределение плотности для некоторого момента времени $t \neq 0$ имеет вид, изображенный на фиг. 5 (кривая a , изображен случай $s = 0$).

4. Рассмотрим исключительный случай $km = 1$. Такое движение встречается, например, при изотермической фильтрации газа при чисто квадратичном законе фильтрации. Понижение порядка уравнения прежним способом здесь невозможно и для исследования уравнения (3.11) следует поступить по-иному. Уравнение (3.11) имеет в данном случае вид:

$$\frac{d}{d\xi} \left(-\frac{d}{d\xi} f_s^k \right)^{\frac{1}{k}} + \frac{s}{\xi} \left(-\frac{d}{d\xi} f_s^k \right)^{\frac{1}{k}} - \frac{k}{k+1} \xi \frac{df_s}{d\xi} - \left[\frac{k(s+1)}{k+1} - (q+1) \right] f_s = 0 \quad (3.20)$$

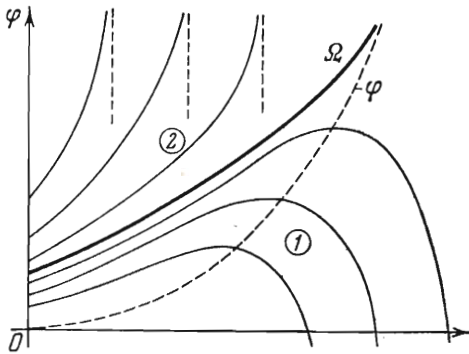
Это уравнение обладает тем свойством, что если $f_s(\xi)$ — его решение, то и $Cf_s(\xi)$ также будет его решением при любом C . Рассмотрим плоский случай. Полагая

$$f(\xi) = \exp \left(-\int_0^\xi \varphi d\xi \right)$$

получаем для функции $\varphi(\xi)$ уравнение

$$\frac{d\varphi}{d\xi} - k\varphi^2 - \frac{1}{k}\xi \left[\frac{1}{\xi} \varphi^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1} k^{\frac{1}{k}} \right] - \left[\frac{k}{k+1} - (q+1) \right] \varphi^{\frac{1}{k}} = 0 \quad (3.21)$$

Вкратце остановимся на его исследовании, необходимом для выяснения хода интегральных кривых уравнения (3.20). Рассмотрим семейство



Фиг. 6

кривых $\varphi = A\xi^k$ и наклон интегральных кривых уравнения (3.21) на этих кривых. Можно показать, что

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{d\varphi}{d\xi} = \infty \text{ при}$$

$$A > \frac{1}{(k+1)^k} k^{k-1}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{d\varphi}{d\xi} = -\infty \text{ при}$$

$$A < \frac{1}{(k+1)^k} k^{k-1}$$

Интегральные кривые, выходящие из точек с достаточно высокими ординатами оси φ , имеют вертикальные асимптоты. Существует решение, предельное для таких решений, асимптотически ведущее себя на бесконечности следующим образом:

$$\varphi = \frac{1}{(k+1)^k} k^{k-1} \xi^k + o(\xi^k)$$

Картина интегральных кривых уравнения (3.21) изображена на фиг. 6. Пунктиром нанесена кривая $\varphi = (k+1)^{-k} k^{k-1} \xi^k$. Единственной интегральной кривой уравнения (3.20), удовлетворяющей условию

$$\int_0^\infty f_0(\xi) d\xi < \infty$$

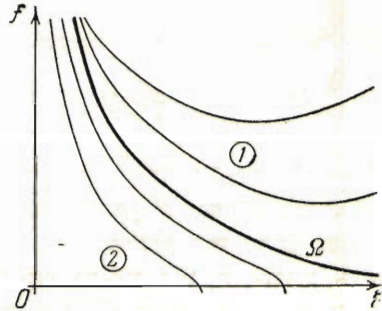
которое следует из конечности общей массы газа в пространстве в каждый момент времени, непрерывной и обладающей непрерывной величиной $d f_0^k / d \xi$, будет кривая, отвечающая упомянутому предельному решению, асимптотическое поведение которой при $\xi \rightarrow \infty$ дается формулой

$$f(\xi) = C \exp\left(-\frac{1}{(k+1)^{k+1}} k^{k-1} \xi^{k+1}\right) (1 + o(1)) \quad (3.22)$$

Для полученной функции условия (3.9) и (3.10), вообще говоря, не будут выполнены, но легко видеть, что они будут одновременно удовлетворены умножением этой функции на обратное значение величины

$$\left(-\frac{d}{d\xi} f_0^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

Полученная таким образом функция будет искомой. В цилиндрическом и сферическом случаях исследование несколько усложняется. Все интегральные кривые уравнения (3.20), удовлетворяющие условию (3.9), обращаются при $\xi = 0$ в бесконечность,



Фиг. 7

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{\frac{k-1}{k}} f_s(\xi) = O(1) \quad (k \neq 1)$$

(случай $k = 1$ известен). Подобно предыдущему, эти интегральные кривые распадаются на два класса; искомая кривая разделяет эти два класса, асимптотическое поведение ее при $\xi \rightarrow \infty$ дается формулой (3.22) (фиг. 7). График плотности для некоторого момента времени $t \neq 0$ в плоском случае изображен на фиг. 5 (кривая б).

§ 4.1. Остановимся коротко на решениях краевых задач для уравнения (1.4) с подвижной границей. Такие решения представляют интерес, например, при изучении вытеснения газом жидкости, а также для ряда других задач. Здесь мы укажем некоторые автомодельные движения с подвижной границей.

Предположим, что имеется некоторая поверхность, не проницаемая для газа, причем эта поверхность перемещается в пространстве со скоростью $D(t)$. Для простоты примем, что в пространстве за поверхностью газа нет. Тогда поток газа и его плотность будут связаны перед поверхностью раздела соотношением.

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} \rho^k\right)^m + cD(t) \rho = 0 \quad (4.1)$$

которое получается из рассмотрения баланса массы газа за бесконечно малый промежуток времени между двумя бесконечно близкими поло-

жениями поверхности раздела. В случаях, которые мы рассматриваем, эта поверхность может быть плоскостью ($s = 0$), цилиндром ($s = 1$), сферой ($s = 2$).

Будем строить решение, удовлетворяющее условиям (3.1) и (3.2), а также следующему условию. Пусть в начальный момент от начальной плоскости (из оси, центра симметрии) начинает двигаться плоскость (сфера, цилиндр переменного радиуса), не пропускающая газа, со скоростью

$$D(t) = \gamma (\tau^{km-1} c^{-km}) \frac{1}{h} t^{\frac{(km-1)(q-s)-m}{h}} \quad (h = kms + km + m - s) \quad (4.2)$$

Здесь γ — некоторое число

$$\gamma < \beta \xi_0, \quad \beta = \frac{km + q(km-1)}{h}$$

где ξ_0 — абсцисса точки пересечения с осью абсцисс отделяющей кривой для задачи, определяемой условиями (3.1) и (3.2) при отсутствии поверхности раздела. Если это условие не выполнено, то поверхность раздела будет бежать впереди переднего фронта газа или совпадать с ним, что не изменит ранее рассмотренных постановок задач. На поверхности раздела имеет место условие (4.1).

Большой интерес представляет задача, поставленная Л. И. Седовым, в которой задается некоторая функциональная связь между $D(t)$ и величиной плотности перед поверхностью раздела, а не непосредственно величина $D(t)$. К задаче Л. И. Седова, в частности, сводится задача о вытеснении газом жидкости в пористой среде. Здесь будет рассмотрена ранее поставленная автомодельная задача.

Можно показать, что искомое решение уравнения (1.4) имеет вид (3.3), (3.5), (3.7), где $f_s(\xi)$ удовлетворяет соответственно уравнениям (3.4), (3.6), (3.8) при условиях (3.9) и (3.10), но $f_s(\xi)$ — разрывна. Легко видеть, что искомая функция $f_s(\xi)$ во всех случаях представляется отрезком некоторой интегральной кривой класса 1 соответствующего уравнения вплоть до некоторой точки ξ^* , а далее тождественно равна нулю. Имея в виду (4.2), перепишем условие (4.1) в виде

$$-\xi^{*s} \left(-\frac{d}{d\xi} f_s^k(\xi^*) \right)^m + \gamma \xi^{*s} f_s(\xi^*) = 0 \quad (4.3)$$

Интегрируя после умножения на ξ^s уравнение (3.11) от нуля до точки ξ^* , считая, что $f_s(\xi)$ — любая кривая класса 1, имеем

$$\left[-\xi^s \left(-\frac{d}{d\xi} f_s^k(\xi) \right)^m \right]_{\xi=0}^{\xi=\xi^*} + \beta \xi_1^{*s+1} f(\xi^*) - (q+1) \int_0^{\xi^*} f_s(\xi) \xi^s d\xi = 0$$

Далее, так как поверхность раздела газа не пропускает и так как в начальный момент газа в пространстве не было, то суммарное количество газа в данный момент времени между начальной плоскостью (осью, центром симметрии) и поверхностью раздела равно интегралу по времени

от начального до текущего момента от потока газа через начальную плоскость (ось, центр). Это дает

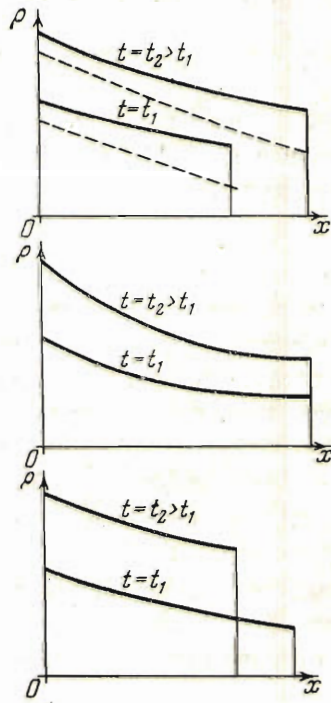
$$\int_0^{\xi^*} f_s(\xi) \xi^s d\xi = \frac{1}{1+q} \tag{4.4}$$

Воспользовавшись (3.9), получим, что в точке ξ^* должно быть выполнено условие

$$-\xi^{*s} \left(-\frac{d}{d\xi} f_s(\xi^*) \right)^m + \beta \xi^{*s+1} f(\xi^*) = 0 \tag{4.5}$$

Можно показать, что на любой кривой класса 1 найдется единственная точка ξ^* такая, что выполняется условие (4.4), причем ξ^* меньше абсциссы точки минимума рассматриваемой кривой. (Все кривые класса 1 обладают точкой минимума.) Сравнивая (4.5) и (4.3), получаем, что нам годится лишь та кривая, для которой $\beta \xi^* = \gamma$. Нетрудно убедиться, что при наложенных выше условиях такая кривая существует и притом только одна.

Предыдущее построение предусматривало, что $\beta > 0$. Если $\beta = 0$, то соответствующим автомодельным решением будет решение задачи о распространении газа в конечной области [с непроницаемой внешней границей; при $\beta < 0$ — задача о фокусировании газа газонепроницаемой поверхностью, идущей из бесконечности. Условия в начальной плоскости (оси, центре симметрии) и начальные условия остаются теми же, что и в ранее рассмотренных задачах. Соответствующее исследование полностью подобно предыдущему. Распределение плотности для разных моментов времени дано на фиг. 8. Изображен случай $s = 0$, пунктиром отмечено соответствующее непрерывное решение.



Фиг. 8

2. Для плоских волн представляет интерес постановка задачи, когда в начальной плоскости задается не поток газа, а его плотность, которая изменяется по степенному закону, в частности поддерживается постоянной. В этом случае условие (3.2) заменяется условием

$$\rho(0, t) = \sigma t^p \tag{4.6}$$

а условие (3.1) остается в силе.

Можно показать, что искомое решение имеет вид:

$$\rho(x, t) = \sigma t^p f \left(x \sqrt{\frac{km-1}{m+1} \frac{1}{c^{m+1} t}} - \frac{1+p}{m+1} \frac{(km-1)}{t} \right) \tag{4.7}$$

где функция $f(\xi)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$-\frac{d}{d\xi} \left\{ \left[-\frac{d}{d\xi} f^k \right]^m \right\} + \frac{1+p(km-1)}{m+1} \xi \frac{df}{d\xi} - pf = 0 \quad (4.8)$$

при условиях

$$f(0) = 1, \quad \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi < \infty \quad (4.9)$$

при этом функции $f(\xi)$, $d(f^k)/d\xi$ должны быть непрерывными. Исследование предыдущего параграфа показывает, что такое решение существует и единственно. Зная решение $\Phi(\xi)$ уравнения (4.8) при условиях предыдущего параграфа

$$\left(-\frac{d}{d\xi} \Phi^k \right)^m = 1, \quad \int_0^{\infty} \Phi(\xi) d\xi = \frac{m+1}{1+pm(k+1)}$$

мы получим искомое решение $f(\xi)$ при помощи преобразования:

$$f(\xi) = \mu^N \Phi \left(\frac{\xi}{\mu} \right), \quad \mu = [\Phi(0)]^{-\frac{1}{N}} \quad (4.10)$$

3. Можно показать, что для значений q , при которых коэффициент α уравнения (3.11) обращается в нуль, решение уравнения (1.4) при условиях (3.2) и

$$\rho(x, 0) = \rho_0 \neq 0 \quad (4.11)$$

также будет автомодельным. Кривые класса 1 уравнения (3.11) при этом имеют горизонтальные асимптоты и могут служить для построения искомого решения подобно тому, как это сделано П. Я. Кочиной в работе [4]. Заметим, что стремление кривых класса 1 к своим асимптотам в случае $m < 1$ медленнее, чем при $m = 1$; при $m = 1$ разность ординат кривой и соответствующей асимптоты имеет на бесконечности порядок $\exp(-\frac{1}{4}\xi^2)$, при $m < 1$ — порядок ξ^{-N_2} , $N_2 = (1+m)/(1-m)$.

4. Коротко остановимся на некоторых других автомодельных решениях уравнения (1.3). Представляют интерес и могут быть найдены решения некоторых задач Коши для этого уравнения. Рассмотрим следующие начальные условия (предполагается, что $0 \leq x < \infty$ в цилиндрическом и сферическом случаях, $-\infty < x < \infty$ в плоском случае):

$$(1) \quad \rho(x, 0) = \kappa x^r, \quad r > 0, \quad \kappa > 0 \quad (\text{цилиндрическая и сферическая симметрия})$$

$$(2) \quad \rho(x, 0) = \kappa |x|^r, \quad r > 0, \quad \kappa > 0 \quad (\text{плоские волны})$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \rho(x, 0) &\equiv 0 && \text{при } x \leq 0 \\ \rho(x, 0) &= \kappa x^r && \text{при } x > 0; \kappa > 0, r \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{плоские волны})$$

Для всех трех задач $\partial\rho/\partial x \geq 0$ и уравнение (1.3) имеет вид:

$$c \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^s \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho^k \right)^m \right] \quad (4.12)$$

Решения всех задач автомодельны. При $r \neq N$

$$\rho = (\kappa^{1+m} c^{-r} t^r)^l f_s [x (\kappa^{km-1} c^{-1} t)^{-l}], \quad l = \frac{1}{1+m-r(km-1)}$$

где функция $f_s(\xi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{d}{d\xi} f_s^k \right]^m + \frac{s}{\xi} \left[\frac{d}{d\xi} f_s^k \right]^m - l\xi \frac{d^2 c_s}{d\xi^2} + l r f_s = 0 \quad (4.13)$$

при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{-r} f(\xi) = 1 \quad [\text{для задач (1), (2), (3)}] \quad (4.14)$$

и

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^s \left(-\frac{d}{d\xi} f_s^k \right)^m = 0 \quad [\text{задачи (1), (2)}]$$

$$\int_{-\infty}^0 f(\xi) d\xi < \infty \quad [\text{задача (3)}]$$

причем функции f_s^k и $df_s^k/d\xi$ должны быть непрерывны.

Исследование уравнения (4.13) вполне аналогично исследованию предыдущего параграфа. Начнем с задачи (3). Имеем

$$\rho(0, t) = (x^{1+m} c^{-r})^l t^{lr} f(0)$$

Построим для области $x \leq 0$ решение задачи, рассмотренной в п. 2, при условии

$$\rho(0, t) = (x^{1+m} c^{-r})^l t^{lr}$$

Это решение имеет вид:

$$x^{1+m} c^{-r})^l t^{lr} \Phi(x(x^{km-1} c^{-1} t)^{-l})$$

причем $\Phi(0) = 1$ и $\Phi'(0) = K > 0$. Для получения функции $\Phi(\xi)$ при $\xi > 0$, строим решение задачи Коши для соответствующего уравнения (4.13) при условиях $\Phi(0) = 1$, $\Phi'(0) = K$ ($\xi \geq 0$). Мы получаем некоторую интегральную кривую класса 1, которая ведет себя на бесконечности следующим образом:

$$\Phi(\xi) = C \xi^r + o(\xi^r), \quad C > 0 \quad (4.15)$$

Если $C \neq 1$, то для удовлетворения условия (4.14) следует воспользоваться преобразованием (3.12)

$$f(\xi) = \mu^N \Phi\left(\frac{\xi}{\mu}\right), \quad \mu = C^{-\frac{r}{N-r}}, \quad -\infty < \xi < \infty$$

Для построения функции $f_s(\xi)$, определяющей решения задач (1), (2), поступаем следующим образом. В виду симметрии движения достаточно знать $f_s(\xi)$ для $\xi \geq 0$. Строим функцию $\Phi(\xi)$ — решение задачи Коши для уравнения (4.13) при условиях

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi'(0) = 0$$

Полученная интегральная кривая принадлежит классу 1 и ведет себя при $\xi \rightarrow \infty$ аналогично (4.15). Если $C \neq 1$, то для получения искомой функции $f_s(\xi)$ подвергаем полученную функцию $\Phi(\xi)$ преобразованию (3.12).

Если $r = N$, то решение задачи получается во всех случаях в конечном виде; на его получении не останавливаемся.

5. Мы рассмотрели автомодельные решения уравнения (1.3) и показали, что в зависимости от значений k, m могут существовать три режима с существенно различной скоростью распространения газа в пространстве. При $km > 1$ существует передний фронт газа, распространяющийся с конечной скоростью. При $km = 1$ скорость распространения газа в пространстве становится бесконечно большой. Асимптотические представления для плотности при $x \rightarrow \infty$ имеют вид:

для $km = 1$

$$\rho(x, t) \sim Ct^{q+1 - \frac{ks+k}{k+1}} \exp(-c^k (k+1)^{-k-1} k^{k-1} x^{k+1} t^{-k})$$

где C — некоторая размерная константа,

для $km < 1$

$$\rho \sim \varphi_0 \left[x \left(\tau^{1-km} c^{km} t^{-q(km-1)-km} \right)^{\frac{1}{h}} \right]^{-\frac{1+m}{1-km}}$$

Таким образом, эти асимптотические формулы можно представить так:

$$\rho \sim P(t) \exp(-c^k (k+1)^{-k-1} k^{k-1} x^{k+1} t^k) \quad \left(k = \frac{1}{m}\right)$$

$$\rho \sim Q(t) x^{-N} \quad \left(k < \frac{1}{m}\right)$$

где от краевых условий зависят $P(t)$ и $Q(t)$. Заметим, что последние асимптотические формулы применимы при более общих предположениях. Именно, они имеют место при любом краевом условии, обеспечивающем в любой момент $t \geq 0$ конечный поток газа через начальную плоскость (ось, центр симметрии), если в начальный момент газ занимал конечную область пространства, т. е. $\rho(x, 0) = 0$ для достаточно больших x . Отсюда следует, что заполнение газом пространства при $km < 1$ происходит гораздо интенсивнее, чем при $km = 1$. Случай $km < 1$ является для рассматриваемого круга задач особенно интересным, ибо при распространении газа в пространстве, в котором в начальный момент уже имелся газ с постоянной во всем пространстве плотностью, отклонение плотности газа от постоянного значения на бесконечности будет приближенно удовлетворять уравнению вида (1.4), для которого справедливо неравенство $km < 1$.

Были рассмотрены различные решения вида $t^\alpha f(xt^{-\beta})$ где α и β — константы, связанные некоторым соотношением. Имеют место еще решения вида $e^{\alpha x} f(te^{\beta x})$, $e^{\alpha t} f(xe^{\beta t})$, где α и β — также связанные некоторым соотношением константы. На последнее обстоятельство автору указал К. П. Станюкович. На рассмотрении этих решений не останавливаемся; можно показать, что решения указанных трех видов исчерпывают собой все автомодельные решения уравнения (1.4). Автомодельные решения интересны как непосредственно, так и с точки зрения уяснения общей картины движения в неавтомодельных случаях. Они могут быть полезны при построении приближенных решений неавтомодельных задач, а также как эталоны при оценке различных приближенных методов.

6. В заключение работы рассмотрим некоторые конкретные примеры. Плоские ламинарные движения газа в пористой среде при постоянной температуре подчиняются уравнению

$$c \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial x^2} \quad (4.16)$$

Одномерное движение грунтовых вод плоскими волнами подчиняется уравнению Буссинеска

$$c \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2}, \quad c = \frac{2m\nu}{kg}$$

где $H(x, t)$ — уровень грунтовых вод, m — пористость среды, k — коэффициент проницаемости среды, ν — кинематический коэффициент вязкости грунтовых вод, g — ускорение силы тяжести.

Решение $\rho(x, t)$ этих уравнений (для определенности будем рассматривать движение газа) при граничном и начальном условиях

$$\rho(0, t) = \sigma t^p, \quad \rho(x, 0) = 0$$

отвечающих степенному росту, в частности, постоянству плотности газа в начальной плоскости и начальному отсутствию газа в пространстве, имеет вид:

$$\rho(x, t) = \sigma t^p f\left(x\sigma^{-\frac{1}{2}} c^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1+p}{2}}\right)$$

где функция $f(\xi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 + f \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{p+1}{4} \xi \frac{df}{d\xi} - \frac{p}{2} f = 0 \quad (4.17)$$

при условиях

$$f(0) = 1, \quad \int_0^{\infty} f(\xi) d\xi < \infty \quad (4.18)$$

причем $f(\xi)$ и $d(f^2)/d\xi$ должны быть непрерывными. Искомое решение отлично от нуля лишь на отрезке $(0, \xi_0)$, где ξ_0 — некоторое число, пока неизвестное, и далее тождественно равно нулю. Уравнение (4.17) обладает тем свойством, что если $\Phi(\xi)$ ему удовлетворяет, то и

$$f(\xi) = \mu^{-2} \Phi(\mu\xi) \quad (4.19)$$

также ему удовлетворяет. Пусть $\Phi(\xi)$ — интеграл уравнения (4.17), непрерывный с непрерывной величиной $d(\Phi^2)/d\xi$, удовлетворяющий второму условию (4.18), и такой, что $\xi_0 = 1$ (при этом первое условие (4.18), вообще говоря, не выполнено). Тогда при $\xi < 1$

$$\Phi(\xi) = c_1(1 - \xi) + c_2(1 - \xi)^2 + c_3(1 - \xi)^3 + \dots \quad (4.20)$$

где коэффициенты c_i имеют следующие значения

$$c_1 = \frac{p+1}{4}, \quad c_2 = \frac{p-1}{16}, \quad c_3 = -\frac{p-1}{72(p+1)} \left[\frac{3}{4}(p-1) + 1 \right]$$

$$c_4 = -c_3 \frac{3p-1}{8(p+1)}, \quad c_5 = -\frac{2}{25(p+1)} \left[30c_3^2 + \frac{11}{4}pc_4 - \frac{23}{4}c_4 \right], \dots$$

Имеем

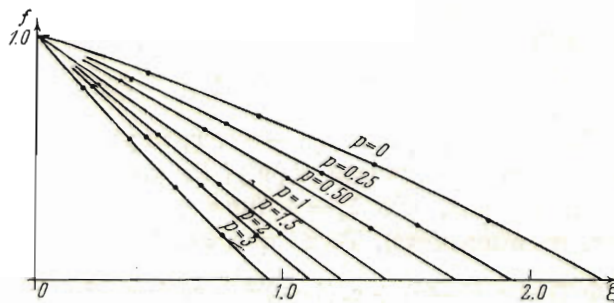
$$\Phi(0) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + \dots$$

Таблица 1

p	0.00	0.25	0.50	0.75	1.25	1.50
ξ_1	0.4571	0.3854	0.3396	0.3074	0.2634	0.2476
$f(\xi_1)$	0.8464	0.8239	0.8119	0.8047	0.7966	0.7937
ξ_2	0.9143	0.7708	0.6793	0.6147	0.5268	0.4952
$f(\xi_2)$	0.6708	0.6367	0.6184	0.6073	0.5947	0.5904
ξ_3	1.3714	1.1562	1.0190	0.9221	0.7902	0.7427
$f(\xi_3)$	0.4713	0.4372	0.4188	0.4076	0.3946	0.3902
ξ_4	1.8286	1.5417	1.3586	1.2294	1.0536	0.9904
$f(\xi_4)$	0.2482	0.2251	0.2129	0.2052	0.1963	0.1933
ξ_0	2.2857	1.9271	1.6983	1.5368	1.3170	1.2379
μ^*	0.4375	0.5189	0.5888	0.6507	0.7593	0.8078

p	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
ξ_1	0.2341	0.2229	0.2128	0.2038	0.1965	0.1896
$f(\xi_1)$	0.7915	0.7897	0.7881	0.7869	0.7856	0.7850
ξ_2	0.4682	0.4459	0.4257	0.4075	0.3929	0.3793
$f(\xi_2)$	0.5869	0.5843	0.5820	0.5802	0.5784	0.5772
ξ_3	0.7024	0.6688	0.6385	0.6113	0.5894	0.5690
$f(\xi_3)$	0.3867	0.3846	0.3817	0.3797	0.3779	0.3767
ξ_4	0.9366	0.8918	0.8514	0.8150	0.7859	0.7586
$f(\xi_4)$	0.1911	0.1891	0.1875	0.1863	0.1851	0.1843
ξ_0	1.1702	1.1138	1.0642	1.0188	0.9827	0.9482
μ^*	0.8545	0.8978	0.9396	0.9815	1.018	1.0545

Взяв $\mu^* = \sqrt{\Phi(0)}$, получим, что $f(\xi)$ удовлетворяет всем условиям задачи. При этом $\xi_0 = 1/\mu^*$. Суммируя ряд (4.20) и используя (4.19), можно вычислить значения $f(\xi)$ при любых $0 \leq \xi \leq \xi_0$.



Фиг. 9

В табл. 1 приводятся результаты таких вычислений для ряда значений p . $f(\xi)$ вычисляется для значений аргумента $\frac{1}{5}\xi_0$, $\frac{2}{5}\xi_0$, $\frac{3}{5}\xi_0$, $\frac{4}{5}\xi_0$. По результатам вычислений построены графики фиг. 9, 10.

Отметим, что при $p > 1$ кривые $f(\xi)$ будут обращены вогнутостью вверх, при $p < 1$ — вогнутостью вниз.

Анализ полученных кривых $f(\xi)$ показывает, что все кривые с удовлетворительной точностью могут быть заменены ломаными

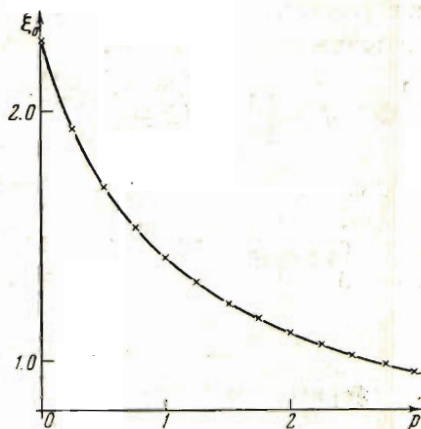
$$f(\xi) = \begin{cases} 1 - \xi/\xi_0 & \text{при } \xi \leq \xi_0 \\ 0 & \text{при } \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Подстановка приближенного выражения (4.21) в формулу для $\rho(x, t)$ дает важную приближенную формулу, которую можно рекомендовать для расчетов, не требующих высокой точности:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \sigma t^p \left(1 - \frac{x}{x_t}\right) & \text{при } x \leq x_t = \xi_0 \left(\frac{\sigma t^{1+p}}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \text{при } x \geq x_t \end{cases} \quad (4.22)$$

Эта формула дает завышенные значения для $\rho(x, t)$ при $p > 1$ и заниженные — при $p < 1$. Значения ξ_0 для данного p могут быть либо получены вычислением, либо взяты с графика фиг. 10.

Для одномерных движений грунтовых вод плоскими волнами, если считать, что уровень грунтовых вод в начальной плоскости $x = 0$ меняется по закону $H(0, t) = \sigma t^p$, а в начальный момент в рассматриваемой области ($0 \leq x < \infty$) грунтовых вод не было, приближенная формула (4.22) имеет вид:



Фиг. 10

$$H(x, t) = \begin{cases} \sigma t^p \left(1 - \frac{x}{x_t}\right) & \text{при } x \leq x_t = \xi_0 \left(\frac{kg\sigma t^{1+p}}{2mv}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \text{при } x \geq x_t \end{cases} \quad (4.23)$$

В частности, при $p = 0$, т. е. при начальном и граничном условиях

$$H(0, t) = H_0, \quad H(x, 0) = 0$$

приближенное выражение для решения $H(x, t)$ имеет вид:

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0 \left(1 - \frac{x}{x_t}\right) & \text{при } x \leq x_t = 1.617 \left(\frac{kgH_0 t}{mv}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \text{при } x \geq x_t \end{cases}$$

Одномерное движение грунтовых вод с цилиндрической симметрией, как известно, описывается уравнением

$$c_1 \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right)$$

где c_1 — константа, зависящая от свойств среды и жидкости.

Подробные численные расчеты для этого вида движения здесь опускаются; укажем только, что решение при условиях

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial H^2}{\partial r} = -\tau t^q, \quad H(x, 0) = 0$$

отвечающих степенному росту, в частности постоянству, притока жидкости через ось симметрии и начальному отсутствию жидкости в пространстве, имеет вид

$$H(x, t) = \tau^{1/2} t^{1/2} f [x (\tau^{-1} c^2 t^{-q} - 2)^{1/4}]$$

Как показано выше, $f(\xi)$ равна нулю при $\xi \geq \xi_0$, где ξ_0 — некоторая константа, зависящая от q ; при этом $\xi_0 = 2.180$ для $q = 0$; $\xi_0 = 1.840$ для $q = 0.5$ и $\xi_0 = 1.623$ для $q = 1.0$.

5. В заключение приводим разложение в виде рядов, указанного в конце раздела 2 § 3 интеграла.

В плоском случае ($s = 0$)

$$\int_0^1 \Phi(\xi) d\xi = \left[\frac{1}{k} \beta^{\frac{1}{m}} \left(k - \frac{1}{m} \right) \right]^{km-1} \frac{km-1}{km+m-1} + \sum c_n \frac{km-1}{m+(n+1)(km-1)}$$

В цилиндрическом случае ($s = 1$)

$$\int_0^1 \xi \Phi(\xi) d\xi = \left[\frac{1}{k} \beta^{\frac{1}{m}} \left(k - \frac{1}{m} \right) \right]^{km-1} \frac{(km-1)^2}{[m+km-1][m+2km-2]} + \\ + \sum c_n \frac{(km-1)^2}{[m+(n+1)(km-1)][m+(n+2)(km-1)]}$$

В сферическом случае ($s = 2$)

$$\int_0^1 \xi^2 \Phi(\xi) d\xi = \left[\frac{1}{m} \beta^{\frac{1}{m}} \left(k - \frac{1}{m} \right) \right]^{km-1} \frac{2(km-1)^3}{[m+km-1][m+2km-1][m+3km-3]} + \\ + \sum c_n \frac{2(km-1)^3}{[m+(n+1)(km-1)][m+(n+2)(km-1)][m+(n+3)(km-1)]}$$

Автор приносит глубокую благодарность Л. И. Седову за советы и указания при выполнении настоящей работы.

Поступила 21 III 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Общая задача о движении сжимаемой жидкости в пористой среде. Известия АН СССР, Серия геогр. и геофиз. Т. IX. № 1.
2. Зельдович Я. Б. и Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М. 1950.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 1.
4. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении, встречающемся в теории фильтрации. ДАН СССР. Т. LXIII. № 6.