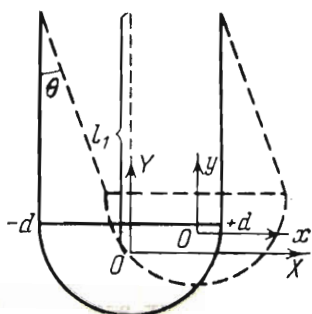


О ДВУХ МАЯТНИКАХ, ПОПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

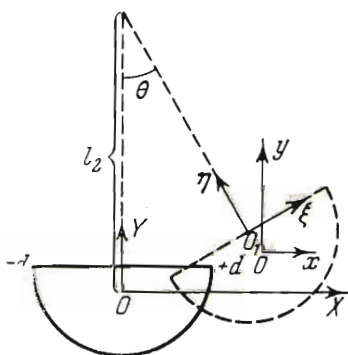
Н. Н. Моисеев

(Ростов-на-Дону)

1. Будем рассматривать плоские колебания двух открытых сосудов одинаковой формы, из которых первый совершает только поступательное движение (шарнирный параллелограмм, фиг. 1), а второй — вращательное (физический маятник, фиг. 2). Обозначим через l_i расстояние от точки подвеса до центра тяжести системы в состоянии покоя.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если в этих сосудах жидкость отсутствует, а приведенные длины маятников равны между собой, то, выбрав в качестве обобщенной координаты угол отклонения от положения равновесия θ , их движение можно описать одним и тем же уравнением. Однако наличие жидкости в этих сосудах приводит к качественному отличию в характере колебаний этих маятников.

2. Введем системы координат:

- подвижную Oxy , связанную с центром масс «отвердевшей» системы, и движущуюся поступательно;
- подвижную $O_1\xi\eta$, связанную с невозмущенной свободной поверхностью;
- неподвижную OXY , совпадающую в положении равновесия всей системы с системой oxy .

В случае колебаний первого маятника оси систем oxy и $O_1\xi\eta$ будут все время параллельны. Для простоты предположим, что центры масс сосуда и жидкости лежат на прямой $\xi = 0$.

Движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости относительно системы координат oxy будем предполагать потенциальным.

Положение свободной поверхности жидкости $\zeta(\xi, t)$, определим коэффициентами Фурье $q_n(t)$ в разложении

$$\zeta(\xi, t) = \sum q_n(t) \varphi_n(\xi) \quad (1)$$

Здесь φ_n — нормированные собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(\xi) = \lambda \int_{-d}^{+d} H(\xi, 0; x, 0) \varphi(x) dx \quad (2)$$

причем H — функция Грина задачи Неймана для области, ограниченной стенками сосуда и невозмущенной свободной поверхностью.

3. Рассмотрим малые колебания первого маятника. Обозначим через $\varphi(\xi, \eta)$ потенциал скоростей движения жидкости относительно системы oxy , в силу условий $\partial\varphi/\partial n = 0$ на стенках полости находим

$$\varphi(\xi, \eta) = \int_{-d}^{+d} H(\xi, \eta; x, 0) \frac{d\zeta(x)}{dt} dx = \sum q_n' \varphi_n^*(\xi, \eta)$$

где

$$\varphi_n^*(\xi, \eta) = \int_{-d}^{+d} H(\xi, \eta; x, 0) \varphi_n(x) dx \quad (3)$$

Обозначим через λ_n собственные числа интегрального уравнения (2), в силу выбора функций φ_n при $\eta = 0$ получим

$$\varphi(\xi, 0) = \sum q_n' \frac{\varphi_n}{\lambda_n} \quad (4)$$

Кинетическая энергия системы с точностью до малых второго порядка может быть представлена в виде

$$T = \frac{m_1 (\theta')^2}{2} + \frac{\rho}{2} \int \left\{ (\theta' + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial\xi})^2 \right\} d\tau$$

где интеграл распространен на весь объем, занимаемый жидкостью, m_1 — масса сосуда. Замечая, что

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} d\tau = \int_{-d}^{+d} \xi \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\xi = \int_{-d}^{+d} \xi \frac{d\zeta}{dt} d\xi$$

приведем выражение для энергии к виду

$$T = \frac{1}{2} M (\theta')^2 + \theta' \sum q_n' \rho \beta_n + \frac{1}{2} \rho \sum \frac{q_n'^2}{\lambda_n} \quad (5)$$

Здесь M — масса всей системы, а β_n — коэффициент Фурье:

$$\beta_n = \int_{-d}^{+d} \xi \varphi_n(\xi) d\xi$$

Потенциальная энергия системы с той же степенью точности определяется выражением

$$U = \frac{1}{2} \rho g \int_{-d}^{+d} \zeta^2 dt + \frac{Mgl\theta^2}{2}, \text{ или } U = \frac{1}{2} \rho g \sum q_n^2 + \frac{Mgl\theta^2}{2} \quad (6)$$

Следовательно, уравнения Лагранжа в этом случае имеют вид:

$$Ml^2\theta'' + \rho l \sum_{n=1}^{\infty} q_n'' \beta_n + Mgl\theta = 0 \quad (7)$$

$$q_n'' + G_n^2 q_n + \lambda_n l \beta_n \theta'' = 0 \quad (G_n^2 = g\lambda_n; n = 1, 2, 3, \dots)$$

4. Выведем уравнение движения второго маятника около положения равновесия. В этом случае

$$\varphi(\xi, \eta) = \int H(\xi, \eta; x, y) v_n(x, y) dS + \sum q_n' \varphi_n^*(\xi, \eta)$$

где v_n — нормальная составляющая скорости точки полости. Интегрирование проводится по всей поверхности полости, включая невозмущенную свободную поверхность.

Первое слагаемое есть потенциал Жуковского [1]

$$\varphi^0(\xi, \eta) = \frac{d\theta}{dt} \psi(\xi, \eta)$$

Кинетическая энергия системы T выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} \int \rho (v_0 + v)^2 d\tau$$

где v — относительная скорость, v_0 — скорость точки O . Это выражение можно представить в таком виде:

$$T = \frac{1}{2} M (l\theta')^2 + \frac{1}{2} I_1 \theta'^2 + \xi^0 l \theta' (m_1 \mathbf{V}_1 + \rho \int \nabla \varphi^0 d\tau + \rho \int \sum q_n' \nabla \varphi_n d\tau) + \frac{1}{2} \rho \int (\nabla \varphi)^2 d\tau$$

где \mathbf{V}_1 — относительная скорость движения центра массы сосуда, I_1 — момент инерции сосуда.

Так как в силу несжимаемости жидкости

$$m_1 \mathbf{V}_1 + \rho \int \nabla \varphi^0 d\tau = 0$$

и так как

$$\frac{1}{2} \rho \int (\nabla \varphi^0)^2 d\tau = \frac{1}{2} I_2 \theta'^2$$

где I_2 — момент инерции твердого тела, эквивалентного жидкости, заключенной в объеме, ограниченном стенками сосуда и горизонтальной твердой стенкой, совпадающей с невозмущенной поверхностью [1, 2], то

$$T = \frac{1}{2} (Ml^2 + I) \theta'^2 + \rho l \theta' \sum q_n' \beta_n + \rho \theta' \sum q_n' \delta_n + \frac{1}{2} \rho \sum \frac{(q_n')^2}{\lambda_n} \quad (8)$$

где $I = I_1 + I_2$ — момент инерции эквивалентного твердого тела, δ_n — коэффициент Фурье:

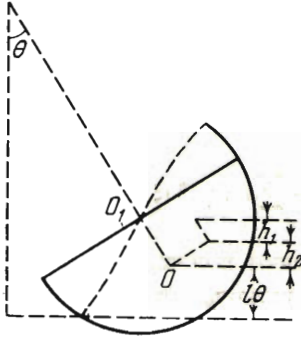
$$\delta_n = \int_{-d}^{+d} \psi(\xi, 0) \varphi_n(\xi) d\xi \quad (9)$$

При вычислении потенциальной энергии необходимо принять во внимание, что центр тяжести жидкости смещается вследствие наличия волн. Поэтому потенциальная энергия системы имеет вид:

$$U = \frac{1}{2} Mgl\theta^2 + (h_1 + h_2) m_2 g \quad (10)$$

Здесь m_2 — масса жидкости, h_1 — высота поднятия центра тяжести жидкости (фиг. 3) вследствие ее движения относительно системы $O_1\xi\eta$ а h_2 — высота поднятия центра тяжести жидкости вследствие переносного движения системы O_1 , $\xi\eta$ относительно системы oxy ; при этом имеем

$$h_1 = \frac{\rho}{m_2} \int_{-d}^{+d} \frac{\zeta^2}{2} d\xi d\eta = \frac{\rho}{2m_2} \sum q_n^2, \quad h_2 = \xi_1 \theta$$



Фиг. 3

где ξ_1 — абсцисса центра массы жидкости, которая с точностью до малых второго порядка может быть выражена формулой

$$\xi_1 = \frac{1}{m_2} \rho \int_{-d}^{+d} \xi \zeta d\xi = \frac{\rho}{m_2} \sum q_n \beta_n$$

и, следовательно,

$$h_2 = \theta \xi_1 = \frac{\theta \rho}{m_2} \sum q_n \beta_n$$

Таким образом, выражение (10) может быть приведено к виду

$$U = \frac{1}{2} Mgl\theta^2 + \theta \rho g \sum q_n \beta_n + \frac{1}{2} \rho g \sum q_n^2 \quad (11)$$

Напишем теперь уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} (Ml^2 + I) \theta'' + \rho \sum (l\beta_n + \delta_n) q_n'' + Mgl\theta + \rho g \sum q_n \beta_n &= 0 \\ q_n'' + G_n^2 q_n + \lambda_n (l\beta_n + \delta_n) \theta'' + \lambda g \beta_n \theta &= 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

5. Выясним вопрос об устойчивости равновесия. Задача сводится к исследованию знакоопределенности квадратичных форм:

для первого случая

$$\Pi_1 = \left(\frac{Ml}{\rho} \theta^2 + \sum q_n^2 \right) \quad (13)$$

для второго случая

$$\Pi_2 = \frac{Ml}{\rho} \theta^2 + 2\theta \sum q_n \beta_n + \sum q_n^2 \quad (14)$$

Квадратичная форма (13) является всегда определенно положительной. Следовательно, положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии и поэтому устойчиво.

В квадратичной форме (14) сделаем замену переменных

$$\theta = u_1, \quad q_n = u_{n+1} - \beta_n u_1$$

после преобразования получим

$$\Pi_2 = \left[u_1^2 \left(\frac{Ml}{\rho} - \sum \beta_n^2 \right) + \sum u_{n+1}^2 \right] \quad (15)$$

Обозначим через Δ бесконечный определитель квадратичной формы (14):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{Ml}{\rho} & \beta_1 & \beta_2 & \dots \\ \beta_1 & 1 & 0 & \dots \\ \beta_2 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Выражение (15) представим в виде

$$\Pi_2 = u_1^2 \Delta + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}^2 \quad (16)$$

Откуда следует, что единственным необходимым и достаточным условием положительной определенности квадратичной формы (14) является условие

$$\Delta = \frac{Ml}{\rho} - \sum \beta_n^2 > 0 \quad (17)$$

Пользуясь равенством Парсеваля, последнее условие можно переписать в виде

$$l > \frac{2d^3}{3M} \rho \quad (18)$$

Таким образом, если условие (18) не выполняется, то положение равновесия неустойчиво (в силу того, что максимум Π будет в этом случае изолированным).

Последнее обстоятельство качественно отличает обыкновенный физический маятник от маятника с жидкой массой, имеющей свободную поверхность.

6. В условие (18) неявно входит форма сосуда, так как

$$l = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{M}, \quad m_2 = \int \rho d\tau$$

где l_1 и l_2 — расстояние от точки подвеса до центра тяжести сосуда и жидкости.

В качестве примера рассмотрим наиболее простой случай, когда форма сосуда является дугой окружности с центром в точке подвеса

как это показано на фиг. 4, где даны также и обозначения. Из элементарных соображений ясно, что движение такой системы устойчиво.

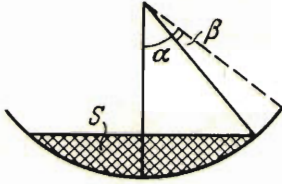
В данном случае условие (18) имеет вид:

$$l_2 + l_1 \frac{m_1}{m_2} > \frac{2}{3} \frac{r^3 \sin^3 \alpha}{m_2} \rho \quad (19)$$

Так как

$$m_2 = \rho S = \frac{\rho r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha),$$

$$l_2 = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$



Фиг. 4

то неравенство (19) даст

$$l_2 + l_1 \frac{m_1}{m_2} > l_2$$

Следовательно, система устойчива, если только $l_1 \neq 0$ или $m_1 \neq 0$.

7. Решение уравнений (7) и (12) будем искать в виде

$$\theta = D_0 e^{\omega t}, \quad q_n = D_n e^{\omega t}$$

Для определения постоянных D_i получим соответственно следующие системы уравнений:

для первого случая

$$D_0 + \sum \frac{\omega^2 \rho \beta_n}{(\omega^2 + g/l)M} D_n = 0, \quad \frac{\lambda_n l \beta_n \omega^2}{\omega^2 + G_n^2} D_0 + D_n = 0 \quad (20)$$

для второго случая

$$D_0 + \sum \frac{\rho [(\beta_n + \delta_n/l) \omega^2 + g \beta_n/l]}{[\omega^2 + (g/l)(1 + I/MI^2)^{-1}] M (1 + I/MI^2) l} D_n = 0 \quad (21)$$

$$\frac{l \lambda_n [(\beta_n + \delta_n/l) \omega^2 + g \beta_n/l]}{\omega^2 + G_n^2} D_0 + D_n = 0$$

Определители этих систем являются сходящимися. В самом деле,

$$\Delta_1 = 1 - \sum \frac{\omega^4 \rho \beta_n^2 \lambda_n}{(\omega^2 + g/l) M (\omega^2 + G_n^2)} \quad (22)$$

$$\Delta_2 = 1 - \sum \frac{\rho \lambda_n [(\beta_n + \delta_n/l) \omega^2 + g \beta_n/l]^2}{[\omega^2 + (g/l)(1 + I/MI^2)^{-1}] M (1 + I/MI^2) (\omega^2 + G_n^2)}$$

где $G_n^2 = \lambda_n g$. Поэтому из сходимости рядов $\sum \beta_n^2$ и $\sum \delta_n^2$ следует сходимость рядов (22).

Следовательно, в силу теоремы Коха ω^2 должно быть корнем уравнения частот:

для первого случая

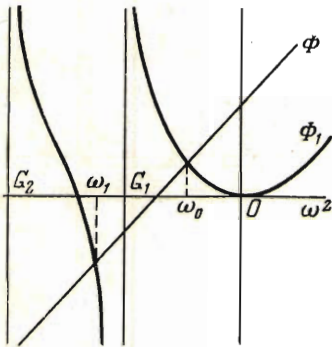
$$\omega^2 + \frac{g}{l} = \frac{\rho}{M} \sum \frac{\omega^4 \beta_n^2 \lambda_n}{\omega^2 + g \lambda_n} \quad (23)$$

для второго случая

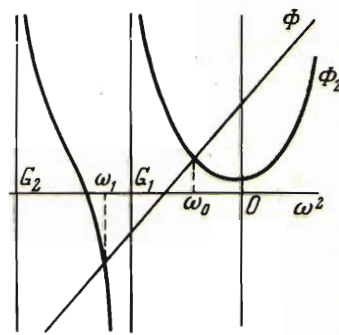
$$\omega^2 + \frac{g}{l(1 + I/MI^2)} = \frac{\rho}{M(1 + I/MI^2)} \sum \frac{\lambda_n [(\beta_n + \delta_n/l) \omega^2 + g \beta_n/l]^2}{\omega^2 + G_n^2} \quad (24)$$

Обозначая левые части этих уравнений через $\Phi(\omega^2)$, а правые соответственно через Φ_1 и Φ_2 , распределение частот можно найти графически, как это показано на фиг. 5 и 6.

Все корни уравнения (23) лежат слева от оси ординат. Если условие (18) выполнено, то этим же свойством обладает и уравнение (24).



Фиг. 5



Фиг. 6

Как видно из чертежей, при одной и той же приведенной длине маятников

$$l_1 = l_2 \left(1 + \frac{I}{Ml^2} \right)$$

значение ω_0 второго ближе к значению собственной частоты маятника (определяемого пересечением прямой Φ_1 и оси ω^2), который получится, если свободную поверхность заменить крышкой.

8. Если корни уравнения частот определены, то легко в явном виде получить значение постоянных D_n . Перенумеруем в порядке возрастания абсолютных величин корни уравнений (23) и (24) $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$. Положим $\omega = \omega_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) и примем постоянные D_n пропорциональными минорам первой строки:

для первого случая

$$D_0^{(j)} = 1 \quad D_n^{(j)} = \frac{\lambda_n l \beta_n \omega_j^2}{\omega_j^2 + G_n^2} \quad (25)$$

для второго случая

$$D_0^{(j)} = 1, \quad D_n^{(j)} = \frac{1}{\omega_j^2 + G_n^2} \left\{ -l \lambda_n \left[\left(\beta_n + \frac{\delta_n}{l} \right) \omega_j^2 + \frac{g}{l} \beta_n \right] \right\} \quad (26)$$

Пользуясь формулами (25), (26), можно определить формулу свободной поверхности. Для определенности рассмотрим первый маятник.

Общее решение системы (7) может быть выражено формулами

$$\theta = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \cos(|\omega_i|t + \tau_i), \quad q_n = - \sum_{i=0}^{\infty} C_i \frac{\lambda_n l \beta_n \omega_i^2}{\omega_i^2 + G_n^2} \cos(|\omega_i|t + \tau_i)$$

или, вводя нормальные координаты y_i :

$$\theta = \sum_{i=0}^{\infty} y_i, \quad q_n = - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_n l \beta_n \omega_i^2}{\omega_i^2 + G_n^2} y_i$$

Теперь свободную поверхность можно представить в виде

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \varphi_n = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_n l \beta_n \omega_i^2}{\omega_i^2 + G_n^2} y_i \varphi_n = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i(\xi) y_i(t)$$

где

$$\zeta_i = - \sum \frac{\lambda_n l \beta_n \omega_i^2}{\omega_i^2 + G_n^2} \varphi_n$$

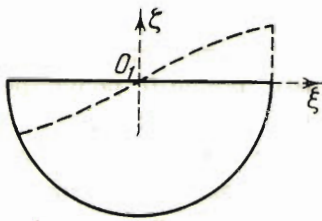
Таким образом, свободная поверхность может быть представлена как сумма стоячих волн $\zeta_i(\xi)$, каждая из которых колеблется со своей частотой ω_i .

Как известно, демпфирующий эффект вязкости прямо пропорционален квадрату частоты. Поэтому наибольший практический интерес представляет волна с частотой ω_0

$$\zeta_0 = - \sum \frac{\lambda_n l \beta_n \omega_0^2}{\omega_0^2 + G_n^2} \varphi_n$$

которая представляет собой одноузловое сейшеобразное колебание (фиг. 7). Волна имеет форму, близкую к прямой.

9. И. И. Токманом был проведен расчет для полости цилиндрической формы и проделаны измерения периодов маятников в лаборатории



Фиг. 7

Ростовского университета. Параметры маятников были приняты следующие: $l = 230$ см, масса сосуда 270 г, масса воды 707 г. С точностью до четвертого знака периоды обоих маятников при наличии крышки совпадали и были равны 3.030 сек. Период колебаний первого маятника при наличии свободной поверхности оказался равным 2.32 сек., а второго 3.03 сек. Отличие периода

этого маятника от периода «твердого» маятника оказался порядка тысячных долей секунды.

Измерения и расчеты главного колебания с частотой ω_0 (будем называть его основным колебанием) совпадали с очень большой точностью (0.1%). Последнее означает, что влияние вязкости на период основного колебания с частотой ω_0 незначительно.

Поступила 29 VII 1952

Ростовский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Полн. собр. соч. Т. 2. Гостехизд. 1948.
2. Моисеев Н. Н. Движение твердого тела, имеющего полости, частично наполненные идеальной капельной жидкостью. ДАН СССР. 1952. Т. LXXXV. № 4.