Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ПОСТРОЕНИЕ ВСЕГО МНОЖЕСТВА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИМЕЮЩИХ ЗАДАННУЮ ИНТЕГРАЛЬНУЮ КРИВУЮ

Н. П. Еругин

(Ленинград)

1. Пусть для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Q(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = P(x, y) \tag{1.1}$$

кривая

$$w(x, y) = 0 \tag{1.2}$$

есть интегральная кривая. Тогда имеем

$$\frac{\partial w}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} P(x, y) = 0 \tag{1.3}$$

в силу равенства (1.2), т. е. равенство (1.3) выполнено на кривой (1.2).

Если равенство (1.3) есть тождество, то всякая кривая из семейства

$$w(x, y) = C \tag{1.4}$$

где C — произвольная постоянная, есть интегральная кривая для системы (1.1). Пусть, например, дана система

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) = Q, \qquad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1) = P \tag{1.5}$$

Возьмем $w = x^2 + y^2 - 1$ и составим для (1.5) равенство (1.3). Получим

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Это равенство выполняется на окружности $x^2 + y^2 - 1 = 0$, поэтому эта окружность есть интегральная кривая для системы (1.5).

Пусть теперь кривая (1.2) задана и будем искать все такие системы (1.1), для которых кривая (1.2) будет интегральной кривой. Так как равенство (1.3) должно выполняться на кривой (1.2), то имеем[1]

$$\frac{\partial w}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} P(x, y) = F(w, x, y) \tag{1.6}$$

где

$$F(0, \zeta, \eta) = 0$$

---

[1] Если

$$\frac{\partial w}{\partial x} Q(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} P(x, y) = \omega(x, y)$$

то из $w(x, y) = w$ получим $x = f(w, y)$ и, следовательно, заменяя полученным выражением x в $\omega(x, y)$, будем иметь (1.6).

Отсюда находим выражения для функций $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ в виде

$$Q(x, y) = F_1(w, x, y) - \frac{\partial w}{\partial y} M(x, y), \quad P(x, y) = F_2(w, x, y) + \frac{\partial w}{\partial x} M(x, y) \tag{1.7}$$

где

$$F_1(0, \zeta, \eta) = F_2(0, \zeta, \eta) = 0 \tag{1.8}$$

и $M(x, y)$ — некоторая функция.

Таким образом, общий вид систем, имеющих кривую (1.2) интегральной, можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = F_1(w, x, y) - \frac{\partial w}{\partial y} M(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = F_2(w, x, y) + \frac{\partial w}{\partial x} M(x, y) \tag{1.9}$$

где F_1 и F_2 удовлетворяют условию (1.8).

К этому, однако, надо заметить следующее.

Если в точке (x_0, y_0) кривой (1.2) имеем $M(x_0, y_0) = 0$, то точка (x_0, y_0) кривой (1.2) будет точкой покоя системы (1.9). Если же $M(x, y) = 0$ во всех точках кривой (1.2), то вся кривая (1.2) состоит из точек покоя системы (1.9). Если

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{1.10}$$

в точке (x_0, y_0) кривой (1.2), то снова точка (x_0, y_0) есть точка покоя системы (1.9) при условии, что в этой точке функция $M(x, y)$ непрерывна и ограничена. Чтобы устранить эту точку покоя, мы могли бы заменить функцию $M(x, y)$ через

$$M_1(x, y)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2}$$

где $M_1(x, y)$ ограничена в точке (x_0, y_0) и $M_1(x_0, y_0) \neq 0$. Действительно, после этого имеем

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} M(x, y)\right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial y} M(x, y)\right]^2 \neq 0 \tag{1.11}$$

в точке (x_0, y_0) и, следовательно, точка (x_0, y_0) кривой (1.2) не будет точкой покоя. Но в этом случае точка (x_0, y_0) будет особой точкой системы (1.9), так как здесь будут нарушены условия теоремы единственности. Таким образом, если мы имеем равенство (1.10) в некоторых точках кривой (1.2), то мы либо имеем в этих точках точки покоя, либо имеем здесь особенности с точки зрения теоремы единственности. Если же на кривой (1.2) не выполнено равенство (1.10), то, выбирая произвольно функцию $M(x, y) \neq 0$ на кривой (1.2), мы и получим систему (1.9), для которой кривая (1.2) будет интегральной. Если $F_1 = F_2 \equiv 0$, то всякая кривая семейства (1.4) есть интегральная при условии, что в точках этой кривой имеем неравенство (1.11). Если кривая (1.2) есть замкнутая кривая, то мы имеем периодическое решение системы (1.9) при выполнении условия (1.11) на кривой (1.2).

2. Поставим теперь задачу найти общий вид таких систем (1.1), для которых заданные кривые

$$w_1(x, y) = 0, \qquad w_2(x, y) = 0 \tag{2.1}$$

будут интегральными кривыми. Правые части таких систем Q и P согласно предыдущему должны удовлетворять двум равенствам:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} Q + \frac{\partial w_1}{\partial y} P = F_1(w_1, x, y), \qquad \frac{\partial w_2}{\partial x} Q + \frac{\partial w_2}{\partial y} P = F_2(w_2, x, y) \tag{2.2}$$

где F_1 и F_2 обладают свойством (1.8).

Предполагая, что

$$\Delta(x, y) = \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x} \neq 0 \tag{2.3}$$

найдем

$$Q = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial w_2}{\partial y} F_1(w_1, x, y) - \frac{\partial w_1}{\partial y} F_2(w_2, x, y)\right]$$

$$P = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial w_1}{\partial x} F_2(w_2, x, y) - \frac{\partial w_2}{\partial x} F_1(w_1, x, y)\right]$$

Следовательно, систему (1.1) можно, включив множитель Δ^{-1} в функции $F_1(w_1, x, y)$ и $F_2(w_2, x, y)$, представить так:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial w_2}{\partial y} F_1(w_1, x, y) - \frac{\partial w_1}{\partial y} F_2(w_2, x, y) = Q \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial w_2}{\partial x} F_1(w_1, x, y) + \frac{\partial w_1}{\partial x} F_2(w_2, x, y) = P \end{aligned} \tag{2.4}$$

где F_1 и F_2 обладают свойством (1.8).

Теперь можно рассматривать систему (2.4) независимо от выполнения условий (2.3) как систему общего вида, для которой кривые $w_1(x, y) = 0$ и $w_2(x, y) = 0$ будут интегральными кривыми. Но следует отметить, кроме условий (1.8), дополнительные условия, которым должны удовлетворять функции $F_1(w_1, x, y)$ и $F_2(w_2, x, y)$. Для того чтобы на кривых $w_1(x, y) = 0$ и $w_2(x, y) = 0$ не было точек покоя и особых точек, необходимо, согласно предыдущему, чтобы были выполнены условия

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 \neq 0 \quad \text{на кривой} \quad w_1(x, y) = 0 \\ &\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \neq 0 \quad \text{на кривой} \quad w_2(x, y) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Роль функции $M(x, y)$, входящей в систему (1.9), в уравнениях (2.4) играет функция $F_2(w_2, x, y)$ относительно кривой $w_1(x, y) = 0$ и функция $F_1(w_1, x, y)$ относительно кривой $w_2(x, y) = 0$. Поэтому, чтобы на кривых $w_1(x, y) = 0$ и $w_2(x, y) = 0$ не было точек равновесия, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства соответственно

$$\begin{aligned} F_2(w_2, x, y) &\neq 0 \quad \text{на кривой} \quad w_1(x, y) = 0 \\ F_1(w_1, x, y) &\neq 0 \quad \text{на кривой} \quad w_2(x, y) = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Заметим, что если функции $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ зависимые, т. е. $\Delta(x, y) \equiv 0$ в равенствах (2.2), то из (2.2) легко выводим

$$Q(x, y) = F(w, x, y) + \frac{\partial w_1}{\partial y} M(x, y), \qquad P(x, y) = F(w, x, y) - \frac{\partial w_1}{\partial x} M(x, y) \tag{2.7}$$

где

$$F(0, \zeta, \eta) \equiv 0, \; w(x, y) = 0 \text{ на кривых } w_1(x, y) = 0 \text{ и } w_2(x, y) = 0 \tag{2.8}$$

Таким образом, система, имеющая кривые $w_1(x, y) = 0$ и $w_2(x, y) = 0$ интегральными, запишется в виде

$$\frac{dx}{dt} = F(w, x, y) + \frac{\partial w_1}{\partial y} M(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = F(w, x, y) - \frac{\partial w_1}{\partial x} M(x, y) \tag{2.9}$$

где F и w удовлетворяют условию (2.8).

3. Поставим вопрос: возможно ли функции F_1 и F_2 в системе (2.4) выбрать так, чтобы и кривая

$$w_3(x, y) = 0 \tag{3.1}$$

расположенная между кривыми $w_1(x, y) = 0$ и $w_2(x, y) = 0$, была интегральной кривой для системы (2.4)? Если кривая (3.1) есть интегральная для системы (2.4), то, согласно предыдущему, имеем

$$\frac{\partial w_3}{\partial x} Q + \frac{\partial w_3}{\partial y} P = F_3(w_3, x, y) \tag{3.2}$$

где $F_3(0, \zeta, \eta) \equiv 0$ и P, Q — правые части системы (2.4).

Подставляя значение P и Q из системы (2.4), получим

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial w_3}{\partial y}\right) F_1(w_1, x, y) + $$
$$+ \left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y}\right) F_2(w_2, x, y) = F_3(w_3, x, y) \tag{3.3}$$

Предположим теперь, что $w_2(x, y)$ есть функция от $w_1(x, y)$, т. е. $w_2 = \varphi(w_1)$. Тогда равенство (3.3) перепишется в виде

$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)[\varphi'(w_1) F_1(w_1, x, y) - F_2(w_2, x, y)] = F_3(w_3, x, y) \tag{3.4}$$

Здесь квадратная скобка слева не равна тождественно нулю в силу условий (2.6). Если возьмем и $w_3 = \psi(w_1)$, то

$$\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_3}{\partial y} \equiv 0 \tag{3.5}$$

и, следовательно, $F_3(w_3, x, y) \equiv 0$. Отсюда следует, что если функции w_1 и w_2 — зависимые, то всякая кривая из семейства

$$w_3(x, y) = w_1(x, y) + C = 0 \tag{3.6}$$

где C — произвольная постоянная, есть интегральная для системы (2.4) в той области, где определены функции $F_1(w_1, x, y)$ и $F_2(w_2, x, y)$.

Произвол в функциях $F_1(w_1, x, y)$ и $F_2(w_2, x, y)$ определяет распределение скоростей движения точки $(x(t), y(t))$ по кривым (3.6).

4. Пусть функции $F_1(w_1, x, y)$ и $F_2(w_2, x, y)$ определены в области, ограниченной кривыми

$$w_1(x, y) = 0, \qquad w_2 = w_1(x, y) - a = 0 \quad (a = \text{const}) \tag{4.1}$$

Тогда кривые $w_1(x, y) = \tau$, где постоянная τ определена неравенством $0 < \tau < a$, суть интегральные для системы (2.4), как бы мы ни фиксировали произвол в функциях F_1 и F_2.

Это не означает, однако, что для всякой системы дифференциальных уравнений семейство интегральных кривых в области, ограниченной интегральными кривыми (4.1) этой системы, определено. Действительно, можно взять кривую $w(x, y) = 0$, состоящую из произвольного множества кривых, расположенных в области, ограниченной кривыми (4.1) и содержащего кривые (4.1). Тогда система (1.9) будет иметь это множество кривых интегральными кривыми. В точках пересечения этих кривых система (1.9) будет иметь либо точки покоя, либо в этих точках будут нарушены условия единственности.

Пусть, например,

$$w = w_1(x, y)(w_1(x, y) - a)$$

Тогда кривые (4.1) суть интегральные для системы (1.9), но произвол в функциях F_1, F_2 и $M(x, y)$ позволяет порождать различные системы интегральных кривых в области, ограниченной кривыми (4.1).

Таким образом, если для системы дефференциальных уравнений кривые (4.1) суть интегральные, то такую систему можно записать как в виде (1.9), так и в виде (2.4).

В системе (2.4) семейство интегральных кривых, расположенных в области, ограниченной кривыми (4.1), фиксировано, несмотря на большой произвол в выборе функций F_1 и F_2.

В системе (1.9) семейство интегральных кривых определяется выбором кривой $w(x, y) = 0$, содержащей и кривые (4.1), а также выбором функций $F_1(w, x, y)$ и $F_2(w, x, y)$.

5. Предположим теперь, что в системе (2.4) функции $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ независимые. Тогда из уравнений $w_1 = w_1(x, y)$ и $w_2 = w_2(x, y)$ можно найти $x = x(w_1, w_2)$, $y = y(w_1, w_2)$ и функцию $w_3(x, y)$, определяющую кривую (3.1), записать в виде

$$w_3 = w_3(w_1, w_2)$$

В этом случае равенство (3.3) можно представить в виде (5.1)

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial w_3}{\partial w_1}F_1(w_1, x, y) + \frac{\partial w_3}{\partial w_2}F_2(w_2, x, y)\right] = F_3(w_3, x, y)$$

Если функции w_1 и w_3 зависимые, т. е. $w_3 = \varphi(w_1)$, то $\partial w_3 / \partial w_2 = 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\frac{\partial w_3}{\partial w_1}F_1(w_1, x, y) = F_3(w_3, x, y) \tag{5.2}$$

Следовательно, в системе (2.4) функция $F_2(w_2, x, y)$ остается без дополнительных ограничений, а $F_1(w_1, x, y) = 0$ на кривой $w_3(x, y) = 0$.

Если же функция w_3 — независимая ни с функцией w_1, ни с функцией w_2, то, как видно из равенства (5.1), функции F_1 и F_2 в системе (2.4) удовлетворяют только одному дополнительному условию, если и кривая $w_3(x, y) = 0$ есть интегральная кривая для системы (2.4). Это условие состоит в том, что

$$\frac{\partial w_3}{\partial w_1} F_1(w_1, x, y) + \frac{\partial w_3}{\partial w_2} F_2(w_2, x, y) \quad \text{на кривой} \quad w_3(x, y) = 0 \tag{5.3}$$

6. Покажем теперь, что в некоторых случаях, используя уравнение (1.9), возможно найти общее решение заданной системы (1.1) или разрешить другие вопросы из качественной теории или устойчивости движения. Можно поставить задачу о представлении системы (1.1) в виде (1.9). Чтобы разрешить такую задачу, нужно из уравнений (1.7) найти функции $w(x, y)$, F_1, F_2 и $M(x, y)$.

Заметим, однако, что в этих уравнениях или F_1, или F_2 можно положить равным нулю [так как при этом мы также удовлетворим равенству (1.6)], а $M(x, y)$ равным единице. Тогда мы имеем два уравнения (1.7) с неизвестными функциями $w(x, y)$ и $F_1(w, x, y)$.

Записывая условие совместности уравнений (1.7) [приравнивая выражения для смешанной производной $\partial^2 w / \partial x \partial y$, получаемые из обоих уравнений (1.7)], получим еще одно уравнение. Так как, однако, за кривую $w(x, y) = 0$ можно взять любую интегральную кривую системы (1.1), то ясно, что разрешение поставленной задачи, вообще говоря, эквивалентно нахождению общего решения системы (1.1). И действительно, можно показать, что решение уравнений (1.7) приводится к нахождению общего решения системы (1.1).

Однако в некоторых случаях представить уравнения (1.1) в виде (1.9) возможно. Из уравнений (1.7) получим

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{F_1 - Q}{M}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{P - F_2}{M} \tag{6.1}$$

Приравнивая выражения $\partial^2 w / \partial y \partial x$ и $\partial^2 w / \partial x \partial y$, получаемые из этих уравнений, и заменяя $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$, согласно (6.1) получим

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) M + (P - F_2)\frac{\partial F_1}{\partial w} - (F_1 - Q)\frac{\partial M}{\partial x} =$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) M - (F_1 - Q)\frac{\partial F_2}{\partial w} - (P - F_2)\frac{\partial M}{\partial y} \tag{6.2}$$

Если $M = 1$, то

$$\frac{\partial w}{\partial y} = F_1 - Q, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = P - F_2 \tag{6.3}$$

и вместо (6.2) имеем

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_1}{\partial w} - F_1 \frac{\partial F_2}{\partial w} + Q\frac{\partial F_2}{\partial w} - P\frac{\partial F_1}{\partial w} \tag{6.4}$$

При $F_1 = 0$ это уравнение переходит в уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} - Q\frac{\partial F_2}{\partial w} \tag{6.5}$$

Можно искать функции $F_1(w, x, y)$ и $F_2(w, x, y)$ в виде

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1^{(k)}(x, y)\, w^k, \qquad F_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_2^{(k)}(x, y)\, w^k \tag{6.6}$$

Подставляя это в (6.4), найдем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_1^{(k)}(x, y)}{\partial x} w^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_2^{(k)}(x, y)}{\partial y} w^k =$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\delta=1}^{k} (k - \delta + 1)\left[\varphi_2^{(\delta)} \varphi_1^{(k-\delta+1)} - \varphi_1^{(\delta)} \varphi_2^{(k-\delta+1)}\right] w^k +$$

$$+ Q \sum_{k=0}^{\infty} k\varphi_2^{(k)} w^{k-1} - P \sum_{k=0}^{\infty} k\varphi_1^{(k)} w^{k-1} \tag{6.7}$$

Если возьмем

$$F_1 = \varphi_1^{(1)} w, \qquad F_2 = \varphi_2^{(1)} w \tag{6.8}$$

то (6.7) переходит в

$$\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} w + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y} w = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)} \tag{6.9}$$

Отсюда

$$w = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)}}{\dfrac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}} \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial Q}{\partial x}\varphi_2^{(1)} - \dfrac{\partial P}{\partial x}\varphi_1^{(1)} + Q\dfrac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x} - P\dfrac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)^2}\left(\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right) -$$

$$- \frac{\left[\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)}\right]\left(\dfrac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial x \partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)^2} \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\left[\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\varphi_2^{(1)} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\varphi_1^{(1)} + Q\dfrac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y} - P\dfrac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial y}\right]\left(\dfrac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)^2} -$$

$$- \frac{\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)}\right]\left(\dfrac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial y^2}\right)}{\left(\dfrac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)^2} \tag{6.12}$$

Подставляя найденные выражения w, $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$ в равенства (6.3) и заменяя F_1, F_2 согласно (6.8), получим

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x}\varphi_2^{(1)} - \frac{\partial P}{\partial x}\varphi_1^{(1)} + Q\frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x} - P\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)$$

$$-\left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)}\right]\left(\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial x \partial y}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)^2 - \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)}\right]\left[\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right]\varphi_2^{(1)} \quad (6.13)$$

$$\left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\varphi_2^{(1)} - \frac{\partial P}{\partial y}\varphi_1^{(1)} + Q\frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y} - P\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right] -$$

$$-\left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)}\right]\left[\frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial y^2}\right] =$$

$$= \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)}\right]\left(\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)\varphi_1^{(1)} - Q\left(\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y}\right)^2$$

Предположим, что нам удалось найти какие-нибудь частные значения $\varphi_1^{(1)}$ и $\varphi_2^{(1)}$, удовлетворяющие (6.13). Если при этом

$$\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y} \neq 0 \quad (6.14)$$

то w найдем в виде (6.10) и тем самым найдем интегральную кривую (1.2) уравнений (1.1):

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)} = 0 \quad (6.15)$$

Например, для системы

$$\frac{dx}{dt} = -2a_1 x - 2a_2 y + a_3 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \quad 2a_3 x + a_3 x^2 y + a_1 x y^2 + a_2 y^3$$

имеем равенства (6.13) при $\varphi_1^{(1)} = x$, $\varphi_2^{(1)} = y$. Поэтому, согласно (6.15), интегральной кривой будет

$$a_3 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 = a_1$$

Заметим, что для рассматриваемой системы характеристические числа первого приближения определяются равенством

$$\lambda_{1,2} = -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_3}$$

Следовательно, здесь возможны все случаи характеристических чисел. При $a_1^2 - 4a_2 a_3 < 0$ характеристические числа будут комплексные. Пусть

$$a_1 < 0, \quad a_3 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_1^2 - 4a_2 a_3 < 0$$

Тогда невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым, а найденная кривая будет предельным циклом, окружающим область устойчивости.[1]

[1] Обозначая

$$v = a_3 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 - a_1, \quad u = \frac{y}{x}, \quad \alpha = (4a_2 a_3 - a^2{}_1)^{-1/2}$$

получим

$$v = (v + a_1)\, C_1 \exp 2\alpha \operatorname{arc\,tg} \alpha\,(2a_2 u + a_1)$$

$$\alpha \operatorname{arc\,tg} \alpha\,(2a_2 u + a_1) = 2t + C_2$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Заметим еще, что если найденные из уравнений (6.13) $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ содержат произвольную постоянную, то эта произвольная постоянная войдет и в $w(x, y)$ и мы тем самым получим общий интеграл уравнений (1.1).

Предположим теперь, что

$$\frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y} = 0 \tag{6.16}$$

Тогда из (6.9) получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q\varphi_2^{(1)} - P\varphi_1^{(1)} = 0 \tag{6.17}$$

Если таким образом найдены функции $\varphi_1^{(1)}$ и $\varphi_2^{(1)}$, удовлетворяющие уравнениям (6.16) и (6.17), то система уравнений (6.3), имеющая в этом случае вид:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_1^{(1)} w - Q, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = P - \varphi_2^{(1)} w \tag{6.18}$$

совместна, т. е. отсюда можно найти $w(x, y)$. Найденная функция $w(x, y)$, как известно, будет содержать произвольное постоянное и таким образом будет получен обший интеграл системы (1.1).

Пусть, например, $\varphi_1^{(1)} = y$, $\varphi_2^{(1)} = x$. Тогда условие (6.16) выполняется, а уравнение (6.17) принимает вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Qx - Py = 0 \tag{6.19}$$

Уравнения (6.18) в этом случае будут

$$\frac{\partial w}{\partial y} = yw - Q, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = P - xw \tag{6.20}$$

Из первого уравнения получаем

$$w = e^{1/2\, y^2}\left[c(x) - \int_0^y Q e^{-1/2\, y^2}\, dy\right] \tag{6.21}$$

Подставляя это во второе, можем получить

$$e^{1/2\, y^2}[c'(x) + xc(x)] = P + e^{1/2\, y^2}\int_0^y \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + xQ\right) e^{-1/2\, y^2}\, dy$$

В силу (6.19) это запишем в виде

$$e^{1/2\, y^2}[c'(x) + xc(x)] = P + e^{1/2\, y^2}\int_0^y \left(Py - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e^{-1/2\, y^2}\, dy =$$

$$= P - e^{1/2\, y^2}\int_0^y (Pe^{-1/2\, y^2})'\, dy$$

Отсюда получаем

$$c'(x) + xc(x) = P(x, 0), \quad c(x) = e^{-1/2\, x^2}\left[C + \int_0^x P(x, 0)\, e^{1/2\, x^2} dx\right]$$

где C — произвольная постоянная.

Следовательно, из формулы (6.21) имеем

$$w = e^{1/2\,y^2}\left\{e^{1/2\,x^2}\left(C + \int_0^x P(x,\ 0)\,e^{1/2\,x^2}\,dx\right) - \int_0^y Q(x,\ y)\,e^{1/2\,y^2}\,dy\right\}$$

и общее решение получаем в виде

$$Ce^{-1/2\,x^2} + e^{-1/2\,x^2}\int_0^x P(x,\ 0)\,e^{1/2\,x^2}\,dx - \int_0^y Q(x,\ y)\,e^{-1/2\,y^2}\,dy = 0 \qquad (6.22)$$

Предположим, $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ суть полиномы. Тогда после интегрирования по частям из (6.22) будем иметь

$$Ce^{-1/2\,x^2} + P_1(x) + C_1 e^{-1/2\,x^2}\int_0^x e^{1/2\,x^2}\,dx + C_2 e^{-1/2\,x^2} +$$

$$+ Q_1(x,\ y)\,e^{-1/2\,y^2} + Q_2(x)\int_0^y e^{-1/2\,y^2}\,dy - Q_1(x,\ 0) = 0 \qquad (6.23)$$

где C_1 и C_2 — определенные постоянные, а P_1, Q_1, Q_2 — полиномы.

Предположим, оказалось

$$Q_2(x) \equiv 0, \qquad C_1 = 0, \qquad P_1(x) - Q_1(x,\ 0) \equiv 0$$

Тогда равенство (6.23) принимает вид:

$$C + C_2 + Q_1(x,\ y)\,e^{1/2\,(x^2 - y^2)} = 0 \qquad (6.24)$$

Если $Q_1(x,\ y)$ — постоянное (что возможно только в том случае, когда $Q(x,\ y) = ay$ при постоянной a), то семейство гипербол $x^2 - y^2 = C$, где C — произвольное постоянное, доставляет все семейство интегральных кривых. Если же $Q_1(x,\ y)$ есть полином, то, полагая произвольную постоянную в (6.24) $C = -C_2$, получим одну алгебраическую интегральную кривую $Q_1(x,\ y) = 0$.

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие того, чтобы в случае (6.19) (и когда $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ — полиномы) существовала алгебраическая интегральная кривая $Q_1(x,\ y)$, где $Q_1(x,\ y)$ суть полином. Такая интегральная кривая будет изолированной. Может, конечно, случиться, что кривая $Q_1(x,\ y) = 0$ распадается на несколько кривых, одни из которых будут замкнутые, а другие не замкнутые, уходящие в бесконечность. Эти кривые, повидимому, будут границами различных качественных топологических ячеек, порождаемых совокупностью точек равновесия.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $\varphi_2^{(1)} = a$, $\varphi_1^{(1)} = b$, где a и b — постоянные. Тогда имеем равенство (6.16); равенства (6.17), (6.18) принимают вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Qa - Pb = 0 \qquad (6.25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - bw = -Q, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + aw = P \qquad (6.26)$$

Таким образом, здесь предполагается лишь, что правые части системы (1.1) удовлетворяют равенству (6.25) при каких-нибудь постоянных a и b.

Из уравнений (6.26) на основании (6.25) легко находим

$$w(x, y) = e^{by-ax}\left[C - \int_0^y Q(0, y)\,e^{-by}\,dy\right] + e^{-ax}\int_0^x P(x, y)\,e^{ax}\,dx$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно, имеем общее решение

$$e^{by}C - e^{by}\int_0^y Q(0, y)\,e^{-by}\,dy + \int_0^x P(x, y)\,e^{ax}\,dx = 0 \tag{6.27}$$

Предположим еще, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ суть полиномы. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$e^{by}(C - A) + Q_1(y) + P_1(x, y)\,e^{ax} - P_1(0, y) = 0 \tag{6.28}$$

где A — постоянная и $Q_1(y)$, $P_1(x, y)$ — полиномы. Предположим, получилось

$$Q_1(y) - P_1(0, y) \equiv 0 \tag{6.29}$$

Тогда имеем

$$e^{by}(C - A) + P_1(x, y)\,e^{ax} = 0 \tag{6.30}$$

Если $a = b$, то мы имеем общее решение в виде полинома

$$C - A + P_1(x, y) = 0$$

Если же $a \neq b$, то, полагая произвольную постоянную $C = A$, получим изолированную алгебраическую интегральную кривую $P_1(x, y) = 0$.

Принимая функции F_1 и F_2 в виде полиномов, согласно (6. 6) можно изучить многие другие классы уравнений. Вообще, полагая

$$\frac{\partial \varphi_1{}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2{}^{(1)}}{\partial y} \neq 2Q\varphi_2{}^{(2)} - 2P\varphi_1{}^{(2)}$$

можно найти w из (6.7) в виде $w = F(\varphi_1{}^{(k)}, \varphi_2{}^{(k)})$.

Можно найти $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$ из (6.7) в виде отношения рядов относительно w. Подставляя тогда выражения $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$ в уравнения (6.3) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, найдем две бесконечные системы уравнений для определения $\varphi_1{}^{(k)}$ и $\varphi_2{}^{(k)}$.

7. Проведенные рассуждения легко переносятся на системы трех и более уравнений. Так, например, если будем искать системы вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \tag{7.1}$$

для которых интегральной кривой будет кривая

$$D_1(x, y, z) = 0 \qquad D_2(x, y, z) = 0$$

то легко найдем

$$\frac{\partial D_1}{\partial x}P + \frac{\partial D_1}{\partial y}Q + \frac{\partial D_1}{\partial z}R = M(D_1, D_2, x, y, z)$$

$$\frac{\partial D_2}{\partial x}P + \frac{\partial D_2}{\partial y}Q + \frac{\partial D_2}{\partial z}R = N(D_1, D_2, x, y, z)$$

где функции M и N обладают свойством

$$M(0, 0, x, y, z) = N(0, 0, x, y, z) \equiv 0 \tag{7.2}$$

Отсюда находим выражения для функций P, Q и R в виде

$$\begin{aligned} P &= p(D_1, D_2, x, y, z) + \left[\frac{\partial D_1}{\partial y}\frac{\partial D_2}{\partial z} - \frac{\partial D_1}{\partial z}\frac{\partial D_2}{\partial y}\right] M(x, y, z) \\ Q &= q(D_1, D_2, x, y, z) + \left[\frac{\partial D_1}{\partial z}\frac{\partial D_2}{\partial x} - \frac{\partial D_1}{\partial x}\frac{\partial D_2}{\partial z}\right] M(x, y, z) \\ R &= r(D_1, D_2, x, y, z) + \left[\frac{\partial D_1}{\partial x}\frac{\partial D_2}{\partial y} - \frac{\partial D_1}{\partial y}\frac{\partial D_2}{\partial x}\right] M(x, y, z) \end{aligned} \tag{7.3}$$

где функции p, q и r обладают свойством (7.2) функций M и N.

Можно считать, что функции P и Q, определенные равенствами (1.7), содержат и независимую переменную t, именно t может произвольным образом входить в функции F_1, F_2 и $M(x, y)$, но функции F_1 и F_2 подчиняются условию (1.8):

$$F_1(0, \zeta, \eta, t) \equiv 0, \qquad F_2(0, \zeta, \eta, t) \equiv 0 \tag{7.4}$$

Тогда снова кривая (1.2) будет интегральной кривой.

Пусть теперь интегральная кривая задана в параметрическом виде

$$w_1(x, y, t) = 0, \qquad w_2(x, y, t) = 0 \tag{7.5}$$

как движение; пусть при этом

$$\Delta = \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial w_2}{\partial x} \neq 0 \tag{7.6}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x} P + \frac{\partial w_1}{\partial y} Q + \frac{\partial w_1}{\partial t} &= F_1(w_1, w_2, x, y, t) \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} P + \frac{\partial w_2}{\partial y} Q + \frac{\partial w_2}{\partial t} &= F_2(w_1, w_2, x, y, t) \end{aligned} \tag{7.7}$$

где

$$F_1(0, 0, x, y, t), = F_2(0, 0, x, y, t) \equiv 0$$

Из (7.7) найдем

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\Delta}\Big(F_1(w_1, w_2, x, y, t)\frac{\partial w_2}{\partial y} - F_2(w_1, w_2, x, y, t)\frac{\partial w_1}{\partial y} + \\ &\qquad + \frac{\partial w_2}{\partial t}\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial w_2}{\partial y}\Big) \\ Q &= \frac{1}{\Delta}\Big(F_2(w_1, w_2, x, y, t)\frac{\partial w_1}{\partial x} - F_1(w_1, w_2, x, y, t)\frac{\partial w_2}{\partial x} + \\ &\qquad + \frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial t}\Big) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Этим найдем общий вид дифференциальных уравнений (1.1), для которых заданное движение (7.5) будет интегральной кривой.

Поступила 31 III 1952