Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О КРИТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО БЕЗМОМЕНТНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДЛИННОЙ КАТЕНОИДНОЙ ОБОЛОЧКИ

Н. А. Алумяэ
(Таллин)

В книге «Общая теория оболочек» В. З. Власова [1] указано на различие между оболочками вращения положительной и отрицательной гауссовой кривизны с точки зрения реализации безмоментного напряженного состояния. Решение же задачи о реализации безмоментного напряженного состояния у оболочек отрицательной гауссовой кривизны имеется в работе [2] В. В. Новожилова, где установлены условия для исключения бесконечно малых изгибаний срединной поверхности оболочки, а вместе с тем и условия для осуществления безмоментного напряженного состояния.

В данной статье определяется критическое значение осесимметричного безмоментного напряженного состояния длинной катеноидной оболочки, находящейся под действием контурной нагрузки. Таким образом, настоящая работа является естественным продолжением решения упомянутого выше вопроса. Отметим, что впервые эта задача была поставлена К. Федерхофером[3]. Однако К. Федерхофер ограничился рассмотрением только осесимметричной деформации при потере устойчивости безмоментного напряженного состояния; это приводит, как показано ниже, к завышенному значению критической нагрузки.

Решение данной задачи обнаруживает еще раз значительное различие между оболочками положительной и отрицательной гауссовой кривизны, заставляющее разработать новый вариант основных соотношений в разделе 1 и новый прием решения задачи в разделе 4. Обусловливается это тем, что в центре выпучивания катеноидной оболочки деформация срединной поверхности оказывается весьма малой — происходит почти что изгибание срединной поверхности. В свою очередь это вызывает потерю точности, потому что некоторые величины образуются как малые разности больших чисел. Исходя из этого, в работу включен качественный анализ точности упрощенных соотношений.

1. Сводка основных соотношений теории местной потери устойчивости. Пусть T^{ij} будет критическое значение тензора тангенциальных усилий безмоментного начального напряженного состояния. При критическом значении нагрузки по определению существует, кроме безмоментного начального состояния T^{ij}, еще по крайней мере одно состояние равновесия, бесконечно близкое к начальному состоянию. Пусть это состояние характеризуется тензором тангенциальных усилий $T^{ij} + S^{ij}$ и тензором моментов M^{ij}. Деформацию срединной поверхности оболочки при потере устойчивости, т. е. при переходе от состояния T^{ij} в состояние $T^{ij} + S^{ij}$, M^{ij} опишем вектором перемещения v_i, w и тензорами деформации ε_{ij}, μ_{ij}. Коэффициенты первой и второй квадратичных форм a_{ij}, b_{ij} и дискриминантный тензор первой квадратичной формы c_{ij} предполагаются отнесенными к состоянию T^{ij}.

При отсутствии приведенной к срединной поверхности внешней нагрузки условия равновесия элемента оболочки требуют [4]

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} + c^{i}_{.\beta} T^{\alpha\beta} c^{\rho\gamma} \nabla_\gamma \varepsilon_{\rho\alpha} - b_\alpha^{\ i} \nabla_\beta M^{\beta\alpha} = 0 \tag{1.1}$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} = 0 \tag{1.2}$$

$$c_{\beta\alpha} M^{\gamma\beta} b_\gamma^{\ \alpha} + c_{\beta\gamma} \varepsilon_\alpha^{\ \beta} T^{\alpha\gamma} + c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.3}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) - b_{ij} w \tag{1.4}$$

$$\mu_{ij} = -\nabla_j (\nabla_i w + b_i^{\ \alpha} v_\alpha) + \frac{1}{2} b_j^{\ \alpha} c_{\alpha i} c^{\gamma\rho} \nabla_\rho v_\gamma \tag{1.5}$$

Если начальное напряженное состояние T^{ij} отсутствует, то законы упругости можно выразить в виде [5]

$$\begin{aligned} S^{mn} &= B E^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + D F^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} \\ M^{mn} &= D G^{mn\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} + D H^{mn\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \qquad \left(B = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad D = B\frac{t^2}{12} \right) \tag{1.6}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, t — толщина оболочки. В статье [5] приведены выражения для тензоров E, F, G, H, вычисленные, исходя из гипотезы Кирхгофа-Лава. Поскольку, однако, выводимые при помощи трехмерной теории упругости физические соотношения вносят поправки в тензоры F, H, а также в часть тензора $E^{mn\alpha\beta}$, содержащий множитель t^2, постольку тензоры E, F, G, H служат в основном для качественной оценки погрешности, которая возникает при замене соотношений (1.6) приближенными:

$$\begin{aligned} S^{mn} &= B (a^{m\alpha} a^{n\beta} + \nu c^{m\alpha} c^{n\beta}) \varepsilon_{\alpha\beta} \\ M^{mn} &= D (a^{m\alpha} a^{n\beta} + \nu c^{m\alpha} c^{n\beta}) \mu_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Наличие начального напряженного состояния T^{ij} обуславливает анизотропию упругих свойств оболочки и, таким образом, также вносит поправки в законы упругости (1.6). Если через σ обозначить максимальное напряжение начального состояния, то эти поправки будут порядка σ / E по сравнению с единицей и поэтому могут быть отброшены при определении критического напряжения, потому что при современных материалах в упругой стадии σ / E — заведомо малая величина.

Точные статические и геометрические соотношения (1.1) — (1.5) допускают значительные упрощения, если поле перемещений v_i, w имеет местный характер или же является осциллирующим с сравнительно короткими полуволнами. Упрощенные соотношения

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} = 0, \qquad c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.8}$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\beta\alpha} = 0 \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) - b_{ij} w, \qquad \mu_{ij} = -\nabla_j \nabla_i w \tag{1.10}$$

предложены Х. М. Муштари [6]. Во многих случаях возможно дальнейшее упрощение соотношений (1.8) — (1.10), состоящее в том, что ковариантное дифференцирование заменяется простым. Этим путем получены предложенные Ю. Н. Работновым уравнения [7] местной потери устойчивости.

Для определения критической нагрузки катеноидной оболочки простейший вариант основных соотношений имеет вид:

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} = 0, \qquad c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.11}$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + \partial_\alpha \partial_\beta M^{\beta\alpha} = 0 \tag{1.12}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) - b_{ij} w, \qquad \mu_{ij} = - \partial_j \partial_i w \tag{1.13}$$

где ∂_i — символ простого частного дифференцирования. К этим соотношениям присоединяем законы упругости (1.7).

Умножим уравнение (1.12) на w, а первое уравнение (1.11) на v_i и суммируем по i; сложим эти выражения и проинтегрируем по всей области, занятой срединной поверхностью оболочки. Преобразуя полученный интеграл при помощи интегрирования по частям и учитывая при этом принадлежащие к этой задаче однородные краевые условия, а также соотношения (1.13), получим

$$\Pi = \iint (S^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha} + T^{\alpha\beta} \partial_\alpha w \partial_\beta w) \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 = 0 \tag{1.14}$$

Если в (1.14) выразить $S^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ через ε_{ij}, μ_{ij} по формулам (1.7), а затем ε_{ij}, μ_{ij} — через v_i, w, то приходим к однородному относительно компонент вектора перемещения v_i, w квадратичному функционалу. Легко найти, что уравнение (1.12) и первое из уравнений (1.11) являются условиями стационарности функционала Π:

$$\delta \Pi = 0 \tag{1.15}$$

Таким образом, условие (1.15) равносильно уравнениям (1.11), (1.12). При этом, конечно, допускаемые в сравнение в функционале Π функции v_i, w должны удовлетворять геометрическим краевым условиям.

Отметим еще, что условие (1.15) можно заменить условием

$$\delta T = 0 \tag{1.16}$$

где

$$T = - \frac{\iint (S^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha}) \sqrt{a}\, dx^1 dx^2}{\iint \tau^{\alpha\beta} \partial_\alpha w \partial_\beta w \sqrt{a}\, dx^1 dx^2}, \qquad \tau^{\alpha\beta} = \frac{1}{T} T^{\alpha\beta} \tag{1.17}$$

2. Точность упрощенных соотношений. Установим точность системы уравнений (1.11) — (1.13), (1.7), предполагая, что поле v_i, w имеет характер так называемой осциллирующей функции в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Пусть ρ будет радиус экватора катеноида, определяющий, как известно, форму катеноида. Для облегчения качественного анализа положим $\rho = 1$ и отнесем срединную поверхность катеноидной оболочки к координатной системе, где на экваторе катеноида $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$. Тогда в экваториальной зоне $a_{11} \sim a_{22} \sim 1$, $b_{11} \sim b_{22} \sim 1$, где знак $\sim$ здесь и в дальнейшем означает соизмеримость соответствующей величины. Введем в рассмотрение еще малую величину $\lambda = t_0 / \rho$, где t_0 — толщина оболочки на экваторе.

Предположим, что при дифференцировании порядок неизвестных величин v_i, w, S^{ij}, M^{ij}, ε_{ij}, μ_{ij} увеличивается в λ^{-k} раз, так что, например, $\nabla_i v_j \sim \lambda^{-k} v_j$. Пусть

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) - b_{ij} w$$

представляет малую разность больших чисел, что с сохранением характера осциллирующих функций для v_i, w по обеим координатам x^1, x^2 возможно у оболочек отрицательной гауссовой кривизны. В этом случае, очевидно, $v_i \sim \lambda^k w$. Допустим, что деформация срединной поверхности при потере устойчивости начального напряженного состояния будет нежесткая r-го порядка, т. е. $\varepsilon_{ij} \sim \lambda^r w$. Величина r зависит, вообще говоря, от краевых условий, конфигурации оболочки и закона изменения толщины.

Так как $\mu_{ij} \sim w\lambda^{-2k}$, то соотношения упругости дают оценки $S^{ij} \sim B\lambda^r w$, $M^{ij} \sim B\lambda^{2-2k} w$. Теперь можно определить $T^{\alpha\beta}$ и k как функции от r.

Из энергетической формулы (1.16) следует, что значение тензора $T^{ij} \sim B\lambda^{1+c}$ будет наименьшим, если $2k = 1 - r$, причем $c = r$. После выяснения качественной картины поля перемещений мы можем установить точность приближенных соотношений (1.7), (1.11) — (1.13), подразумевая под этим порядок отношения отбрасываемых из точных соотношений членов к главным членам, удерживаемым в упрощенных соотношениях. Ради конкретности ограничимся частным случаем $r = k$. Тогда, согласно изложенному, $k = c = \frac{1}{3}$.

Обращаясь прежде всего к уравнению (1.12), заметим, что $S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \sim Bw\lambda^{1/3}$, а $T^{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha} \sim \partial_\alpha \partial_\beta M^{\beta\alpha} \sim Bw\lambda^{2/3}$. Отсюда следует, что в случае нежесткой деформации срединной поверхности порядка $\frac{1}{3}$ главное значение суммы $S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$ будет величина порядка $\lambda^{1/3}$ по сравнению со слагаемыми.

Сравнение законов упругости (1.7) и (1.6) показывает, что законы (1.7) имеют точность λ. Поскольку, однако, нам необходимо определить малую сумму $S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}$, постольку их точность не превышает $\lambda^{2/3}$. Уравнения (1.11) по сравнению с уравнениями (1.1), (1.3) имеют точность λ, но точность уравнения (1.12) и второго выражения (1.13) будет порядка $\lambda^{1/3}$. В это же время точность второго выражения (1.10) и вместе с тем системы (1.7) — (1.10) будет порядка $\lambda^{2/3}$.

Таким образом, соотношениями (1.7), (1.11) — (1.13) предложенный вариант, имеющий точность $\lambda^{1/3}$ по сравнению с единицей, практически может быть применен для определения критической нагрузки весьма тонкостенных оболочек. Тем не менее данный вариант применим для выяснения асимптотических свойств решения при $\lambda \to 0$, что будет предметом дальнейшего изложения.

3. Уравнения местной потери устойчивости катеноидной оболочки, находящейся под действием контурной нагрузки. Введем в рассмотрение декартовы координаты x, y, z и пусть $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ будут соответствующие орты. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки катеноида можно задать уравнением

$$\mathbf{r} = \rho\alpha\, \mathbf{u}_x + \rho \operatorname{ch} \alpha\, (\mathbf{u}_y \cos\beta + \mathbf{u}_z \sin\beta) \tag{3.1}$$

где ρ — радиус кривизны экватора катеноида, β — угол долготы точки.

Отнеся срединную поверхность катеноидной оболочки к гауссовым координатам α и β, имеем

$$a_{\alpha\alpha} = a_{\beta\beta} = \sqrt{a} = \rho^2 \operatorname{ch}^2 \alpha, \qquad a_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.2}$$

$$b_{\alpha\alpha} = -\rho, \qquad b_{\beta\beta} = \rho, \qquad b_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.3}$$

Главные кривизны катеноида равны, но обратного знака:

$$\frac{1}{R_\alpha} = -\frac{1}{\rho \operatorname{ch}^2 \alpha}, \qquad \frac{1}{R_\beta} = \frac{1}{\rho \operatorname{ch}^2 \alpha} \tag{3.4}$$

Пусть катеноидная оболочка находится в безмоментном осесимметричном напряженном состоянии под действием контурной нагрузки. Тангенциальные усилия $T^{\alpha\alpha}$, $T^{\beta\beta}$ этого напряженного состояния удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dT^{\alpha\alpha}}{d\alpha} + (3T^{\alpha\alpha} - T^{\beta\beta}) \operatorname{th} \alpha = 0, \qquad T^{\alpha\alpha} - T^{\beta\beta} = 0 \tag{3.5}$$

Решение системы (3.5)

$$T^{\alpha\alpha} \operatorname{ch}^2 \alpha = T^{\beta\beta} \operatorname{ch}^2 \alpha = \frac{T}{\rho^2} = \mathrm{const} \tag{3.6}$$

показывает, что физические составляющие тензора тангенциальных усилий $T_\alpha = T^{\alpha\alpha} \rho^2 \operatorname{ch}^2 \alpha$, $T_\beta = T^{\beta\beta} \rho^2 \operatorname{ch}^2 \alpha$ не зависят от координаты α.

Качественный характер потери устойчивости начального состояния (3.6) определяется длиной, изменением толщины и видом краевых закреплений оболочки. Если оболочка короткая, то деформация срединной поверхности при потере устойчивости начального состояния будет жесткая; если оболочка длинная, но изменение толщины стенки такое, что центр выпучивания находится в краевой зоне, то деформация срединной поверхности при этом опять-таки окажется жесткой. И только в случае, когда закон изменения толщины стенки обуславливает потерю устойчивости в зоне, достаточно удаленной от краев, можно ожидать нежесткую деформацию срединной поверхности при потере устойчивости безмоментного напряженного состояния. Далее очевидно, что при данной длине и законе изменения толщины оболочки местоположение центра выпучивания стенки оболочки зависит от характера краевых закреплений. Если при наличии некоторого числа статических краевых условий центр выпучивания стенки находится в краевой зоне, то полная или частичная замена статических краевых условий более жесткими геометрическими условиями отодвинет, как правило, центр выпучивания от краевой зоны.

Для того чтобы сопоставить в смысле устойчивости начального напряженного состояния катеноидную оболочку ($R_\alpha = -R_\beta$) при рассматриваемом напряженном состоянии ($T_\alpha = T_\beta$) со сферической оболочкой ($R_\alpha = R_\beta = \mathrm{const}$), находящейся под равномерным внешним давлением ($T_\alpha = T_\beta$) с постоянной толщиной стенки, примем следующий закон изменения толщины катеноидной оболочки:

$$\frac{T}{t} = \frac{t}{R_\beta} \times \mathrm{const}, \qquad \text{или} \qquad t(\alpha) = t_0 \operatorname{ch} \alpha \tag{3.7}$$

При таком выборе закона изменения толщины оболочки имеем:

$$\Pi = \frac{B_0}{\rho^2} \iint \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \left[(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta})^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_{\alpha\alpha}\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{t_0^2}{12} \operatorname{ch} \alpha \left[(\mu_{\alpha\alpha} + \mu_{\beta\beta})^2 - 2(1-\nu)(\mu_{\alpha\alpha}\mu_{\beta\beta} - \mu_{\alpha\beta}\mu_{\beta\alpha}) \right] \right\} d\alpha\, d\beta +$$

$$+ T \iint \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right\} d\alpha\, d\beta \tag{3.8}$$

где $B_0 = \frac{Et_0}{1-\nu^2}$, и на основании формул (1.13)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} - v_\alpha \operatorname{th} \alpha + \rho w, & \mu_{\alpha\alpha} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} + v_\alpha \operatorname{th} \alpha - \rho w, & \mu_{\beta\beta} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_\alpha}{\partial \beta} - 2 v_\beta \operatorname{th} \alpha \right), & \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\, \partial \beta} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Отметим, что

$$\frac{v_\alpha}{\rho \operatorname{ch} \alpha}, \qquad \frac{v_\beta}{\rho \operatorname{ch} \alpha}, \qquad w$$

являются физическими составляющими вектора перемещения.

Ищем решение задачи (1.15) в форме

$$v_\alpha = u(\alpha) \cos s\beta, \qquad v_\beta = v(\alpha) \sin s\beta, \qquad w = w(\alpha) \cos s\beta \tag{3.10}$$

где s — пока неизвестное целое число, подлежащее определению из условия (1.15). При функциональных аргументах $u(\alpha)$, $v(\alpha)$, $w(\alpha)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= (u^{\cdot} - u \operatorname{th} \alpha + \rho w) \cos s\beta, & \mu_{\alpha\alpha} &= -w^{\cdot\cdot} \cos s\beta \\ \varepsilon_{\beta\beta} &= (sv + u \operatorname{th} \alpha - \rho w) \cos s\beta, & \mu_{\beta\beta} &= s^2 w \cos s\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(v^{\cdot} - su - 2v \operatorname{th} \alpha) \sin s\beta, & \mu_{\alpha\beta} &= s w^{\cdot} \sin s\beta \end{aligned} \tag{3.11}$$

где точкой обозначено дифференцирование по α.

Приводим еще условия стационарности функционала Π относительно $u(\alpha)$, $v(\alpha)$, $w(\alpha)$, которые нужны при применении метода наискорейшего спуска для приближенного решения вариационной задачи (1.15):

$$\left\{ u^{\cdot\cdot} - \frac{1-\nu}{2} s^2 u + \frac{1+\nu}{2} s v^{\cdot} + (1-\nu)\rho w^{\cdot} - u^{\cdot} \operatorname{th} \alpha - (2-\nu) s v \operatorname{th} \alpha + \right.$$

$$\left. + (1-\nu)\rho w \operatorname{th} \alpha - (1-\nu) u \right\} \frac{1}{\operatorname{ch}^3 \alpha} = 0 \tag{3.12}$$

$$\left\{ -\frac{1+\nu}{2} s u^{\cdot} + \frac{1-\nu}{2} v^{\cdot\cdot} - s^2 v + (1-\nu)\rho s w - \frac{3(1-\nu)}{2} s u \operatorname{th} \alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\nu}{2} v^{\cdot} \operatorname{th} \alpha - (1-\nu) v \right\} \frac{1}{\operatorname{ch}^3 \alpha} = 0 \tag{3.13}$$

$$\left\{ -(1-\nu)\rho (u^{\cdot} - sv + 2\rho w - 2u \operatorname{th} \alpha) + \frac{T}{B_0} \rho^2 (w^{\cdot\cdot} - s^2 w) \operatorname{ch} \alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{t_0^2}{12} (w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - 2s^2 w^{\cdot\cdot} + s^4 w) \operatorname{ch}^2 \alpha \right\} \frac{1}{\operatorname{ch}^3 \alpha} = 0 \tag{3.14}$$

4. Приближенное определение критической нагрузки. Рассмотрим длинную катеноидную оболочку, симметричную относительно экватора ($\alpha = 0$). Положим, что при законе изменения толщины оболочки (3.7) центр выпучивания находится на экваторе, а краевые условия не оказывают существенного влияния на критическую нагрузку, т. е. предположим, что в экваториальной зоне происходит местная потеря устойчивости начального напряженного состояния. В этом случае можно ожидать нежесткую деформацию срединной поверхности в экваториальной зоне.

Если это так, то характеризующие деформацию при потере устойчивости начального напряженного состояния функции u, v, w в экваториальной зоне должны быть близкими к функциям u, v, w при бесконечно малом изгибании катеноида, которое определяется условиями

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = 0, \qquad \varepsilon_{\beta\beta} = 0, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \tag{4.1}$$

Решение системы (4.1) дано в монографии [2] В. В. Новожилова. Ограничиваясь рассмотрением только симметричной относительно экватора катеноида формы изгибания, имеем

$$u(\alpha) = -\frac{\sqrt{s^2-1}}{s}\operatorname{ch}\alpha\sin\sqrt{s^2-1}\,\alpha - \frac{1}{s}\operatorname{sh}\alpha\cos\sqrt{s^2-1}\,\alpha \tag{4.2}$$

$$v(\alpha) = \operatorname{ch}\alpha\cos\sqrt{s^2-1}\,\alpha \tag{4.3}$$

$$\rho w(\alpha) = \left(s\operatorname{ch}\alpha - \frac{1}{s}\operatorname{sh}\alpha\operatorname{th}\alpha\right)\cos\sqrt{s^2-1}\,\alpha - \frac{\sqrt{s^2-1}}{s}\operatorname{sh}\alpha\sin\sqrt{s^2-1}\,\alpha \tag{4.4}$$

Проведенный в разделе 2 качественный анализ показал, что s — большое число порядка $\lambda^{-1/2}$ (в случае $r = k$). Вместе с тем при больших значениях s выражения (4.2)—(4.4) могут быть значительно упрощены:

$$u = -\operatorname{ch}\alpha\sin s\alpha, \qquad v = \operatorname{ch}\alpha\cos s\alpha, \qquad \rho w = s\operatorname{ch}\alpha\cos s\alpha \tag{4.5}$$

Выражения (4.5) служат отправным пунктом при выборе первого приближения для функций потери устойчивости u, v, w. Положим

$$u_1 = -\operatorname{ch}^{1-p}\alpha\sin s\alpha, \qquad v_1 = \operatorname{ch}^{1-p}\alpha\cos s\alpha, \qquad \rho w_1 = s\operatorname{ch}^{1-p}\alpha\cos s\alpha \tag{4.6}$$

где p, так же как и s,— пока неизвестное число, подлежащее определению из условия минимума параметра нагрузки T. Очевидно, что потеря устойчивости будет иметь местный характер, если $p > 1$.

Подставляя (4.6) в выражения тензоров деформации (3.11) и вычисляя затем Π по формуле (3.8), находим, что $-T$ принимает наименьшее значение

$$-T = 3.29\,\lambda^{4/3} B_0 \qquad \left(\lambda^2 = \frac{t_0^2}{12\,\rho^2}\right) \tag{4.7}$$

при $s^2 = 0.880\,\lambda^{-2/3}$, $p = 2.60$. Здесь и в дальнейших вычислениях значение коэффициента Пуассона ν принято равным $\frac{1}{3}$.

Отсюда следует, что, поскольку p не зависит от λ, постольку деформация срединной поверхности при потере устойчивости будет нежесткой порядка $\frac{1}{3}$, так как тензоры $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, $\varepsilon_{\beta\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ определяются при функциях (4.6) как малые разности порядка $p / s \sim \lambda^{1/3}$ по сравнению с главными членами правых частей (3.11).

Возвращаясь временно к изложенному в разделе 2, отметим, что, согласно приближенному решению, $k = \frac{1}{3}$, т. е. $r = k$, а вместе с тем имеет место указанная там точность приближенных соотношений (1.7), (1.11) — (1.13).

Решение задачи во втором приближении может быть построено при помощи метода наискорейшего спуска. Для этого ищем решение в форме с неопределенным множителем η:

$$u = u_1 + \eta u_2, \qquad v = v_1 + \eta v_2, \qquad w = w_1 + \eta w_2 \tag{4.8}$$

причем $u_2(\alpha)$, $v_2(\alpha)$, $w_2(\alpha)$ можно приравнивать левым частям формул (3.12) — (3.14), где u, v, w следует заменить первым приближением u_1, v_1, w_1. Пренебрегая при этом членами, которые имеют порядок s^{-1} или же меньше по сравнению с главными членами, получим

$$\begin{aligned} u_2 &= \tfrac{2}{3}\, s\,(p-1)\,\mathrm{ch}^{-p}\,\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\cos s\alpha \\ v_2 &= -\tfrac{4}{3}\, s\,\mathrm{ch}^{-p}\,\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\sin s\alpha \\ w_2 &= \tfrac{2}{3}\,(p+1)\,\mathrm{ch}^{-p}\,\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha\sin s\alpha \end{aligned} \tag{4.9}$$

Нетрудно убедиться, что с точки зрения асимптотического решения можно принять $w_2(\alpha) = 0$. В самом деле, относительные поправки функций u, v будут в s^2 раз больше, чем относительная поправка функции w.

Функции (4.9) при подстановке в выражения (3.11) уже не образуют малых разностей. Отсюда непосредственно следует, что определяемое из условия (1.16) значение множителя η будет порядка s^{-2}; если бы оно было порядка s^{-1}, то деформация срединной поверхности становится жесткой, а это приводит к более высокой критической нагрузке.

Получаемые по методу наискорейшего спуска следующие приближения имеют такой же характер, как и (4.8). Они определяют решение системы (3.12), (3.13) при $w = w_1$ и не позволяют корректировать медленно изменяющуюся амплитудную функцию $\mathrm{ch}^{1-p}\alpha$ главных членов решения u_1, v_1, w_1. Таким образом, асимптотическое решение не может быть построено при помощи метода наискорейшего спуска.

Вместе с тем нетрудно указать приближенный метод, который в данном случае приводит к цели. Метод этот основывается на результатах решения в первом приближении.

Введем в рассмотрение малый параметр $\gamma = \lambda^{1/3}$ и пусть будет

$$s = \sigma\gamma^{-1}, \qquad T = B_0\tau\gamma^4\,(1 + \tau_1\gamma + \cdots) \tag{4.10}$$

Ищем решение системы (3.12)—(3.14) в виде

$$\begin{aligned} u &= \gamma u_1(\alpha)\sin s\alpha + \gamma^2 u_2(\alpha)\cos s\alpha + \gamma^2 u_3(\alpha)\sin s\alpha + \cdots \\ v &= \gamma v_1(\alpha)\cos s\alpha + \gamma^2 v_2(\alpha)\sin s\alpha + \gamma^3 v_3(\alpha)\cos s\alpha + \cdots \\ \rho w &= w_1(\alpha)\cos s\alpha + \gamma w_2(\alpha)\sin s\alpha + \gamma^2 w_3(\alpha)\cos s\alpha + \cdots \end{aligned} \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) в уравнения (3.12)—(3.14), требуем, чтобы эти уравнения удовлетворялись при всяком малом значении γ. Если ограничимся первыми тремя компонентами разложения для u, v, w (бо̀льшая точность, очевидно, не совместима с точностью исходных уравнений), то приходим к девяти уравнениям для определения девяти неизвестных функций $u_1(\alpha), \ldots, w_3(\alpha)$. Эти уравнения, однако, имеют особую структуру, поскольку определители подсистем из трех уравнений для определения u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$ исчезают. Условия существования решения позволяют найти разрешающее дифференциальное уравнение для u_1, v_1, w_1 только из третьей тройки уравнений ($i = 3$).

Первая тройка уравнений дает

$$\sigma u_1(\alpha) = -w_1(\alpha), \qquad \sigma v_1(\alpha) = w_1(\alpha) \tag{4.12}$$

Из второй тройки с учетом соотношений (4.12) найдем (4.13)

$$\sigma^2 u_2(\alpha) = \sigma w_2 - \frac{2}{3} w_1^{\cdot} + \frac{2}{3} w_1 \operatorname{th}\alpha, \qquad \sigma^2 v_2(\alpha) = \sigma w_2 - \frac{1}{3} w_1^{\cdot} + \frac{4}{3} w_1 \operatorname{th}\alpha$$

где функция $w_2(\alpha)$ остается пока произвольной.

Третья же система имеет решение

$$\begin{aligned} \sigma^3 u_3(\alpha) &= -\sigma^2 w_3 - \frac{2}{3}\sigma w_2^{\cdot} + \frac{2}{3}\sigma w_2 \operatorname{th}\alpha - \frac{1}{6} w_1^{\cdot\cdot} + \frac{1}{3} w_1 (1 - \operatorname{th}^2\alpha) \\ \sigma^3 v_3(\alpha) &= \quad \sigma^2 w_3 + \frac{1}{3}\sigma w_2^{\cdot} - \frac{4}{3}\sigma w_2 \operatorname{th}\alpha + \frac{1}{2} w^{\cdot\cdot}{}_1 + \\ &\qquad + \frac{2}{3} w_1^{\cdot} \operatorname{th}\alpha - \frac{1}{3} w_1 (1 + 3\operatorname{th}^2\alpha) \end{aligned} \tag{4.14}$$

(где $w_3(\alpha)$ — пока произвольная функция), если только $w_1(\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$w_1^{\cdot\cdot} - w_1^{\cdot} \operatorname{th}\alpha - w_1\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha} + \frac{9}{2}\sigma^6 \operatorname{ch}^2\alpha + \frac{9}{4}\tau\sigma^4 \operatorname{ch}\alpha\right) = 0 \tag{4.15}$$

Функции $w_2(\alpha)$, $w_3(\alpha)$ могут быть определены, если в разложениях (4.11) удерживать компоненты до степени γ^5. В этом случае, конечно, необходимо увеличить и точность исходных уравнений.

Однако при этой точности упрощенные физические соотношения (1.7) уже не пригодны, и поэтому для определения $w_2(\alpha)$, $w_3(\alpha)$ приходится выйти из рамок теории оболочек.

Из эквивалентного дифференциальному уравнению (4.15) вариационного уравнения

$$\delta\Pi_1 = \delta \int_0^\infty \left\{ (w_1^{\cdot})^2 + w_1^2 \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha} + \frac{9}{2}\sigma^6 \operatorname{ch}^2\alpha + \frac{9}{4}\tau\sigma^4 \operatorname{ch}\alpha\right)\right\} \frac{d\alpha}{\operatorname{ch}\alpha} = 0 \tag{4.16}$$

причем

$$\Pi_1 = 0 \tag{4.17}$$

искомая величина τ может быть приближенно определена любым прямым методом вариационного исчисления.

Если в качестве первого приближения положим

$$w_1 = \mathrm{ch}^{1-p}\,\alpha \tag{4.18}$$

где p — неизвестная постоянная, подлежащая, как и σ, определению из уравнения (4.16), то найдем, что наименьшее значение $-\tau$

$$-\tau = 2.74 \tag{4.19}$$

имеет место при $p = 2.50$, $\sigma^2 = 0.718$.

Если же положить

$$w_1 = \mathrm{ch}^{-2}\alpha + c\,\mathrm{ch}^{-3}\alpha \tag{4.20}$$

то получим

$$-\tau = 2.63, \qquad \sigma^2 = 0.64 \tag{4.21}$$

Мы не будем уточнять значение критической нагрузки — даже точное значение критической нагрузки лишается практической ценности, если неизвестно поведение оболочки в послекритической стадии. Однако это — предмет самостоятельного исследования.

В заключение отметим, что в случае осесимметричной формы потери устойчивости начального напряженного состояния (3.6) К. Федерхофер [3] получил для критического напряжения на экваторе оболочки формулу

$$\sigma_{\text{кр}} = 2.12\,E\lambda \qquad \left(\text{при } \nu = \tfrac{1}{3}\right) \tag{4.22}$$

Следовательно, при малых значениях λ формула (4.21) дает меньшее значение для критического напряжения:

$$\sigma_{\text{кр}} = 2.63\,E\lambda^{4/3} \tag{4.23}$$

Формулой (4.22) определяется и критическое напряжение сферической оболочки с постоянной толщиной стенки, находящейся под равномерным внешним давлением.

Поступила 29 VIII 1952

Институт строительства и архитектуры
АН Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. 1949.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз. 1951.
3. Federhofer K. Zur Stabilität der Katenoidschale. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. Abt. IIa. 1939. Bd. 148. H. 1/2.
4. Алумяэ Н. А. Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 1.
5. Гольденвейзер А. Л., Лурье А. И. О математической теории равновесия упругих оболочек. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.
6. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применениями к решению задач устойчивости упругого равновесия. ПММ. 1939. Т. II. Вып. 4.
7. Работнов Ю. Н. Локальная устойчивость оболочек. ДАН СССР. 1946. Т. LII, № 2.