

ОБЗОР РАБОТ ПО ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ

Е. А. Бейлин и Г. Ю. Джанелидзе

(Ленинград)

Суть проблемы динамической устойчивости состоит в изучении движений упругих систем, вызванных действием переменных во времени внешних нагрузок, причем последние считаются приложенными так, что равноценные по направлению и месту приложения неизменные во времени нагрузки могут вызвать статическую потерю устойчивости. Классическим прообразом таких задач является обобщение задачи Эйлера на случай переменных во времени сил.

Ниже приводятся обзор работ, опубликованных в СССР; сначала дается разбор первых исследований (в хронологическом порядке), затем излагаются некоторые общие теоремы и в заключение рассматриваются работы последних лет.

§ 1. Первый этап исследования задач динамической устойчивости упругих систем (1924—1942). Впервые вопрос о динамической устойчивости упругих систем поставлен в 1924 г. Н. М. Беляевым^[4], который рассмотрел устойчивость прямолинейного призматического стержня (фиг. 1), опертого по концам и сжатого продольной синусоидально изменяющейся со временем силой $P(t) = P_1 \cos \omega t$.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний такого стержня легко получается из соответствующего уравнения свободных колебаний добавив к нему отнесенной к единице длины стержня разности перерезывающих сил, действующих по концам элемента стержня длины dx

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -P_1 \cos \omega t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

где ρ — линейная плотность, EI — жесткость стержня на изгиб, v — перемещение по оси y .

Разыскивая решение (1.1) в форме $v(x, t) = V(x)T(t)$, имеем после подстановки

$$EIT \frac{d^4 V}{dx^4} + \rho V \frac{d^2 T}{dt^2} + P_1 \cos \omega t T \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

или

$$\frac{1}{V} \left[\frac{d^4 V}{dx^4} + \frac{P_1}{EI} \cos \omega t \frac{d^2 V}{dx^2} \right] + \frac{\rho}{EI} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \quad (1.2)$$

Из (1.2) видно, что решение вида $v(x, t) = V(x)T(t)$ возможно, если первые два члена зависят только от t , т. е. если

$$\frac{d^4 V}{dx^4} = \alpha V \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\alpha \beta V \quad (1.4)$$

где α и β — постоянные разделения. Тогда (1.2) принимает вид

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{\alpha}{\rho} (EI - P_1 \beta \cos \omega t) T = 0 \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Из уравнений (1.3) и (1.4) легко установить связь между α и β ; действительно, дифференцируя (1.4) два раза по x , исключая d^2V/dx^2 и сравнивая результат с (1.3), имеем

$$\alpha = \beta^{-2} \quad \text{или} \quad \alpha\beta = \frac{1}{\beta}$$

Общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$V = C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{\beta}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

Таким образом, при разделении переменных можно удовлетворить только граничным условиям на концах опертого стержня, так как иначе нехватит произвольных постоянных. Дело в том, что наличие члена с $P_1 \cos \omega t$ привело к появлению, наряду с обычным уравнением четвертого относительно V порядка (1.3), уравнения второго порядка (1.4). Удовлетворяя граничным условиям

$$V = 0, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l \quad (1.6)$$

имеем

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin \frac{l}{\sqrt{\beta}} = 0 \quad (1.7)$$

Отсюда или $C_2 = 0$, что соответствует только продольному движению¹ точек стержня, или $1/\sqrt{\beta} = n\pi/l$, что соответствует появлению, наряду с продольными перемещениями, и поперечных. Таким образом, в рассматриваемой задаче имеется полная аналогия с соответствующей задачей статической устойчивости — вместо двух возможных форм равновесия существуют две различные формы движения.

Перейдем к определению $T(t)$. Так как $\beta^{-1} = n^2\pi^2/l^2$ и, следовательно, $\alpha = \beta^{-2} = n^4\pi^4/l^4$, то (1.5) записывается в виде:

$$\ddot{T}(t) + \nu_n^2 \left(1 - \frac{P_1}{Q_n} \cos \omega t\right) T(t) = 0 \quad \left(\ddot{T}(t) = \frac{d^2T}{dt^2}\right) \quad (1.8)$$

где ν_n означает n -ную собственную частоту поперечных колебаний опертого стержня, а Q_n — n -ную критическую силу в задаче о статической устойчивости рассматриваемого стержня

$$\nu_n^2 = \frac{EI}{\rho l^4} n^4\pi^4, \quad Q_n = \frac{EI}{l^2} n^2\pi^2$$

Таким образом, определение функции $T(t)$ сводится к решению уравнения типа Матве. Н. М. Беляев получил также для стержня, нагруженного силой $P_0 + P_1 \cos \omega t$, уравнение

$$\ddot{T}(t) + \nu_n^2 \left(1 - \frac{P_0}{Q_n}\right) \left(1 - \frac{P_1}{Q_n - P_0} \cos \omega t\right) T(t) = 0 \quad (1.9)$$

или

$$\ddot{T} + \nu_{np}^2 (1 - \mu \cos \omega t) T = 0 \quad \left(\mu = \frac{P_1}{Q_n - P_0}, \quad \nu_{np} = \nu_n \sqrt{1 - \frac{P_0}{Q_n}}\right) \quad (1.10)$$

где μ — коэффициент пульсации, а ν_{np} означает n -ную частоту свободных колебаний стержня, нагруженного продольной постоянной силой P_0 .

¹ Уравнение продольных перемещений имеет вид

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

где F — площадь поперечного сечения стержня, u — продольное перемещение; для рассматриваемой задачи граничные условия, как известно, будут $u = 0$ при $x = 0$ и $EF \partial u / \partial x = P_1 \cos \omega t$ при $x = l$.

Как известно, решение уравнения (1.10) можно представить в виде

$$T(t) = C_1 e^{rt} \varphi(t) + C_2 e^{-rt} \varphi(-t) \quad (1.11)$$

где r — функция параметров μ и ν_{np} , а $\varphi(t)$ — периодическая функция времени [37]. Поэтому вопрос о характере $T(t)$ решается коэффициентом r : при r чисто мнимом движение является периодическим, а при наличии у r вещественной части $T(t)$ неограниченно возрастает со временем. В последнем случае говорят, что имеет место динамическая неустойчивость. Параметр r зависит от соотношений коэффициентов μ и ν_{np} ; следовательно, для того чтобы исследовать динамическую устойчивость, нужно найти такие соотношения между μ и ν_{np} , которые соответствуют переходу от колебательного решения к неограниченному возрастанию во времени.

Исследуя уравнение (1.10) методом Хилла, можно показать, что потеря динамической устойчивости происходит вблизи значений параметров, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{\omega}{2\nu_{np}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \quad (1.12)$$

В задачах динамической устойчивости Н. М. Беляев отметил случай $\omega / 2\nu_{np} = 1$, остальные указаны А. А. Андроновым и М. А. Леонтовичем [2].

Точки неустойчивости в плоскости параметров $\omega / 2\nu_{np}$ и μ заполняют целые области, которые принято называть зонами динамической неустойчивости. Существует ряд таких зон, лежащих вблизи отдельных значений (1.12). Область, соответствующая значению $\omega / 2\nu_{np} = 1$, называется первой, или основной, областью вблизи значения $\omega / 2\nu_{np} = 1/2$ — второй и т. д.

Н. М. Беляев использовал для определения границы первой зоны следующую приближенную формулу, легко получаемую по методу Хилла:

$$\frac{\omega}{2\nu} = 1 \pm \frac{1}{4} \mu \quad (1.13)$$

На фиг. 2 изображены приближенные границы области неустойчивости, а на фиг. 3 — точные.

В 1935 г. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов [23], не зная, повидному, о работе Н. М. Беляева, обратились к задаче о динамической устойчивости стержней, которую поставили в более общем виде.

Записав уравнение для $T(t)$ в форме (1.10), эти авторы положили

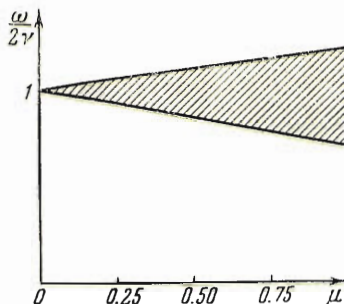
$$T(t) = A(t) \sin\left(\frac{r}{s} \omega t + \varphi\right), \quad \frac{dT}{dt} = A \frac{r}{s} \omega \cos\left(\frac{r}{s} \omega t + \varphi\right)$$

где r и s — целые числа, A и φ — искомые функции времени. Тогда уравнения для определения $A(t)$ и $\varphi(t)$ принимают вид

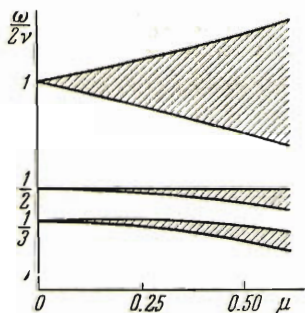
$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon \nu A F(\omega t; \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \nu \Phi(\omega t, \varphi) \quad \left(\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\nu - r\omega/s}{\nu}\right)^2 + \mu^2}\right)$$

где F и Φ суть известные функции соответствующих аргументов.

Считая ε малым параметром и применяя метод усреднения, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов получают систему усредненных уравнений, правые части которой оказываются отличными от нуля только при $r = 1$ и $s = 2$.



Фиг. 2



Фиг. 3

В переменных $u = A \cos \varphi$ и $v = -A \sin \varphi$ эти уравнения имеют вид:

$$\frac{du}{dt} = \left(\nu - \frac{\omega}{2} \right) v + \frac{1}{4} \mu \nu u, \quad \frac{dv}{dt} = - \left(\nu - \frac{\omega}{2} \right) u - \frac{1}{4} \mu \nu v \quad (1.14)$$

Решение полученной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами уже не представляет затруднений. Корни характеристического уравнения системы (1.14)

$$\lambda^2 = \left(\frac{1}{4} \nu \mu \right)^2 - \left(\nu - \frac{\omega}{2} \right)^2 \quad (1.15)$$

определяют характер движения. Вещественные λ отвечают неустойчивым движениям, мнимые — устойчивым. Равенство $\lambda = 0$ определяет границы области неустойчивости. Из (1.15) видно, что они совпадают с приближением Н. М. Беляева (1.13). В этой же работе рассматривается задача о динамической устойчивости стержня под действием произвольной полигармонической силы при различных условиях закрепления концов. Авторы используют вариационный метод Б. Г. Галеркина, задавая $v(x, t)$ в форме $v(x, t) = V(x) T(t)$, где $V(x)$ — заданная функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи. Умножая дифференциальное уравнение на вариацию δv , они получают после интегрирования по x дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{T} + \nu_n^{\circ} \left[1 - \frac{P(t)}{Q_n^{\circ}} \right] T = 0 \quad (1.16)$$

где ν_n° и Q_n° — приближенные значения частоты собственных колебаний и статической критической нагрузки. (Данный в работе вывод выражений этих параметров через $V(x)$ пригоден только для основных случаев закрепления концов, что не отмечается авторами.) Разлагая $P(t)$ в ряд Фурье и применяя метод усреднения так же, как и в вышеописанной задаче, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов получили границы зон устойчивости.

В приложении к переводу книги Стретта^[37] А. М. Эфрос воспроизвел в 1935 г. результаты Н. М. Беляева.

В 1936 г. Г. В. Бондаренко^[7] рассмотрел несколько простейших задач динамической устойчивости стержней: 1) невесомый стержень с массой по середине пролета, опертый по концам, 2) невесомый консольный стержень с массой на конце.

В 1938—1939 гг. В. Н. Челомей^[40—42] разобрал ряд задач динамической устойчивости стержней, неразрезных балок, плит и оболочек, собранных в его книге^[43].

Записав уравнение динамической устойчивости стержня в общей форме

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2} \left[EI(x) \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} \right] + P(t) \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \rho(x) \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} = 0 \quad (1.17)$$

и представив искомый прогиб в виде ряда по собственным функциям $V_k(x)$ задачи о свободных колебаниях

$$v(x, t) = V_1(x) T_1(t) + V_2(x) T_2(t) + \dots \quad (1.18)$$

В. Н. Челомей использует метод Б. Г. Галеркина и приходит к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\ddot{T}_n(t) + \nu_n^2 \left[1 - \frac{P(t)}{Q_n^{\circ}} \right] T_n = \frac{P(t)}{Q_n^{\circ}} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{kn} T_k(t) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.19)$$

внутри у суммы означает пропуск члена с $k=n$, где ν_n — точное значение n -ной собственной частоты, Q_n° — приближенное значение критической силы:

$$\alpha_{kn} = \nu_n^2 \frac{J_2}{J_1}, \quad Q_n^{\circ} = \frac{J_3}{J_1} \quad (1.20)$$

при этом

$$J_1 = \int_0^l [V_n'(x)]^2 dx, \quad J_2 = \int_0^l V_k'(x) V_n'(x) dx, \quad J_3 = \int_0^l EI(x) [V_n''(x)]^2 dx \quad (1.21)$$

Данный В. Н. Челомеем вывод выражения Q_n° пригоден только в простейших случаях закрепления (в книге [43] это не отмечено).

Далее автор пренебрегает правыми частями системы (1.19) и заменяет приближенное значение критической силы Q_n° на точное Q_n . Тогда решение задачи сведется к изучению системы раздельных уравнений

$$\ddot{T}_n + v_n^2 \left[1 - \frac{P(t)}{Q_n} \right] T_n = 0 \quad (1.22)$$

Используя изложенный прием, В. Н. Челомей рассмотрел динамическую устойчивость стержней с первоначальной малой погybью и показал, что она не влияет на характер явления; затем он изучил динамическую устойчивость неразрезных балок на упругих и жестких опорах, и устойчивость стержней, нагруженных продольными периодическими меняющимися распределенными по длине усилиями.

В. Н. Челомей принадлежит постановка задачи о динамической устойчивости плит и оболочек. Применение энергетического метода к задаче о динамической устойчивости плиты, нагруженной по кромкам переменными во времени силами, приводит (при представлении прогиба плиты в виде ряда по собственным функциям задачи о собственных колебаниях) к бесконечной системе дифференциальных уравнений, имеющих ту же структуру, что и (1.19).

В первом приближении В. Н. Челомей приближенно разделяет систему на отдельные уравнения и решает задачи об устойчивости пластин, подкрепленных точечными или линейными жесткими и упругими опорами.

В книге В. Н. Челомей [43] рассмотрена и динамическая устойчивость оболочек. Здесь разобраны следующие задачи: 1° динамическая устойчивость круговых труб, сжатых приложенными на торцах силами $P(t)$; 2° динамическая устойчивость круговых цилиндрических оболочек, нагруженных такими же силами; 3° те же задачи в случае подкрепления оболочек жесткими опорами или пружинами.

Для конкретного определения границы области неустойчивости В. Н. Челомей использовал метод А. М. Ляпунова — Линштедта.

В 1938 г. Б. А. Боднер [5], независимо от В. Н. Челомей, решил ряд задач динамической устойчивости плит. Для свободно опертой плиты им получено точное решение, а для других случаев закрепления краев, при помощи метода Б. Г. Галеркина, — приближенное.

В 1940 г. Г. Ю. Джавелидзе и М. А. Радциг [17] поставили задачу о динамической устойчивости криволинейных стержней, именно, исследовали поведение кругового кольца, нагруженного в своей плоскости радиальной, периодически меняющейся во времени по гармоническому закону, равномерно распределенной нагрузкой $\sigma(t) = \sigma_1 \cos \omega t$.

Оказалось, что кольцо имеет два типа потери динамической устойчивости (аналогично устойчивости статической): первый тип — потеря устойчивости в своей плоскости и второй — соответствующий выходу кольца из плоскости.

Первой форме отвечает дифференциальное уравнение вида ¹

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma_1 a^3}{B} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \cos \omega t = \frac{\rho a^4}{B} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (1.23)$$

а вторая определяется из уравнения

$$\frac{\partial^6 \gamma}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma_1 a^3}{A} \left(\frac{\partial^4 \gamma}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} \right) \cos \omega t = \frac{\rho a^4}{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{A}{C} \gamma - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} \right) \quad (1.24)$$

¹ В работе [17] по ошибке пропущен член в правой части уравнения (1.23).

где u — перемещение по радиусу, γ — угол поворота вокруг касательной к недеформированной оси кольца. A, B — жесткости кольца на изгиб, C — жесткость кольца на кручение, a — радиус кольца, ρ — линейная плотность.

Разделение переменных приводит к уравнениям Матье, имеющим ту же структуру, как и (1.22), с соответствующей заменой собственных частот и критических сил. Поэтому все выводы Н. М. Беляева, как и график, данный на фиг. 3, полностью переносятся и на задачу о кольце¹.

§ 2. Теоремы о разделении переменных в задачах о динамической устойчивости. В работе [17] была высказана мысль, что «для обширного класса упругих систем исследование динамической устойчивости приводит к уравнениям типа (1.22)».

В интересной работе Б. З. Брачковского [8], показано, что решение задачи динамической устойчивости при действии нагрузок вида $\mu + h \cos \omega t$ точно сводится к уравнению Матье только для таких упругих систем, у которых статические формы потери устойчивости совпадают с соответствующими формами свободных колебаний. Эту первую общую теорему в теории динамической устойчивости упругих систем в дальнейшем будем называть теоремой о разделении переменных; следует отметить, что эта теорема не получила должного распространения в литературе. Ее доказательство можно провести и для более общего случая загрузки, нежели в оригинальной работе.

Представим уравнение динамической устойчивости упругой системы в виде

$$L_0(w) + P(t)L_1(w) = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_2(w) \quad (2.1)$$

где w — перемещение, $L_0(w), L_1(w), L_2(w)$ — линейные дифференциальные операторы, определяемые видом упругой системы, $P(t)$ — переменная сила, вызывающая потерю динамической устойчивости.

При $L_2(w) = 0$ и $P(t) = P_1 = \text{const}$ уравнение (2.1) переходит в уравнение статической устойчивости рассматриваемой системы; при $P(t) = P_1 = \text{const}$ уравнение (2.1) представляет собой дифференциальное уравнение свободных колебаний системы, нагруженной постоянными силами P_1 ; при $P(t) = 0$ получается обычное уравнение свободных колебаний. Будем разыскивать частное решение уравнения (2.1) в виде $w = V(x)T(t)$; подставляя это выражение в (2.1), имеем

$$L_0(V) + P(t)L_1(V) = -\rho L_2(V) \frac{\ddot{T}}{T} \quad \left(\ddot{T} = \frac{d^2 T}{dt^2} \right) \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) может быть удовлетворено только, если

$$\frac{L_0(V)}{L_2(V)} = \rho\alpha \quad \text{и} \quad \frac{L_1(V)}{L_2(V)} = -\rho\alpha\beta \quad (2.3)$$

где α и β — постоянные разделения.

В силу (2.1) уравнение (2.2) сводится к трем следующим:

$$\dot{T} + \alpha[1 - \beta P(t)]T = 0 \quad (2.4)$$

$$L_0(V) - \alpha\rho L_2(V) = 0 \quad (2.5)$$

$$L_1(V) + \alpha\beta\rho L_2(V) = 0 \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) представляет собой результат подстановки выражения вида $w = V(x)T(t)$ в уравнение свободных колебаний системы (при $P(t) = 0$). Поэтому, в силу граничных условий задачи, постоянная α равна λ_k^2 , где λ_k — частота свободных колебаний системы.

¹ Утверждение, высказанное в книге А. Ф. Смирнова [31] на стр. 267, не точно, так как результаты для кольца и прямого стержня в координатах ω/ν_n и σ_1/σ_n не близки друг к другу, а просто идентичны.

Исключая из уравнений (2.5) и (2.6) оператор $L_2(V)$, имеем

$$L_0(V) + \frac{1}{\beta} L_1(V) = 0 \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) с точностью до обозначений совпадает с уравнением статической устойчивости рассматриваемой системы. Следовательно, на основании (2.7) и граничных условий, постоянная β^{-1} равна Q_k . Функция $V(x)$ должна одновременно удовлетворять двум различным дифференциальным уравнениям, что возможно только при совпадении решений указанных уравнений (2.5) и (2.7). Последнее имеет место лишь у таких систем, для которых формы свободных колебаний совпадают с соответствующими формами статической потери устойчивости.

В итоге получается не одно частное решение вида $w = V(x) T(t)$, а множество таких, причем функции $T_k(t)$ определяются из линейного уравнения с переменным коэффициентом

$$\ddot{T}_k(t) + \lambda_k^2 \left[1 - \frac{P(t)}{Q_k} \right] T_k = 0$$

Если нагрузка $P(t)$ состоит из постоянной и переменной частей $P(t) = P_0 + P_1(t)$, то, повторяя выкладки, аналогичные приведенным, можно получить уравнение

$$\ddot{T}_k(t) + \nu_{кр}^2 \left[1 - \frac{P_1(t)}{Q_k - P_0} \right] T_k(t) = 0 \quad (2.8)$$

где $\nu_{кр}$ — частота собственных колебаний системы, определенная при учете действия постоянной слагающей силы $P(t)$.

При $P_1(t) = P_1 \cos \omega t$ уравнение (2.8) переходит в уравнение Матье. При $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$ и $L_2(w) = w$ получается теорема Б. З. Брачковского.

То обстоятельство, что функция $V(x)$ должна одновременно удовлетворять двум дифференциальным уравнениям различного порядка, причем порядок (2.6) обычно ниже порядка (2.5), — см., например, уравнение (1.4) и (1.3), весьма сужает класс граничных условий, при которых возможно точное разделение переменных. Для основных операторов, имеющих практическое значение, это условие сводится к требованию свободного опирания краев или концов.

При помощи метода Б. Г. Галеркина можно исследовать вопрос о приближенном разделении переменных в задачах динамической устойчивости, описываемых уравнением (2.1), в тех случаях, когда точное разделение невозможно.

Задавая $w(x, t)$ в виде $w = V^*(x) T(t)$, где V^* — какая-либо функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи, и используя метод Галеркина, имеем:

$$\int_D \{ [L_0(V^*) + P(t) L_1(V^*)] T(t) + \rho L_2(V^*) \ddot{T}(t) \} V^*(x) \delta T(t) d\Omega = 0$$

где δT — вариация искомой функции, а интегрирование распространено по области D изменения пространственных координат системы. После преобразований имеем

$$\ddot{T}(t) + \nu^{*2} \left[1 - \frac{P(t)}{Q^*} \right] T(t) = 0 \quad (2.9)$$

Здесь ν^* — приближенное значение частоты собственных колебаний упругой системы, Q^* — приближенное значение статической критической нагрузки:

$$\nu^{*2} = \frac{J_0}{J_1}, \quad Q = -\frac{J_0}{J_2}$$

$$J_0 = \int_D L_0(V^*) V^* d\Omega, \quad J_1 = \int_D \rho L_2(V^*) V^* d\Omega, \quad J_2 = \int_D L_1(V^*) V^* d\Omega$$

Если $V^*(x)$ является точной формой свободных колебаний или формой потери устойчивости, то в уравнение (2.9) входит точное значение соответствующей величины ν или Q .

Аналогичным образом можно получить в случае силы $P(t) = P_0 + P_1(t)$ и уравнение типа (2.8).

Несмотря на то, что работа Б. З. Брачковского опубликована в 1942 г., а метод Б. Г. Галеркина использовался для приближенного решения частных задач Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым еще в 1935 г.¹, до настоящего времени продолжается публикация отдельных статей и заметок, в которых слишком подробно рассматриваются задачи, являющиеся весьма частными случаями вышеприведенных теорем.

В заключение заметим, что использование метода Б. Г. Галеркина в случае упругих систем, динамическая устойчивость которых определяется несколькими уравнениями в частных производных, приводят к системе уравнений в полных производных с переменными коэффициентами.

§ 3. Дальнейшее развитие теории динамической устойчивости упругих систем (1942—1951). Начиная с 1944 г. резко возрастает число исследований, посвященных динамической устойчивости,

Ряд задач динамической устойчивости упругих систем исследован И. И. Гольденблатом [10—15]. Интересующие нас вопросы затронуты в первой части книги [11]. Здесь поставлена и рассмотрена задача о динамической устойчивости тонкостенных стержней, поставлена задача о динамической устойчивости плоской формы изгиба и ряд других.

Заметим, что для тонкостенных стержней получена система трех линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Исследование этой системы в общем виде хотя и возможно, но настолько затруднительно, что автору пришлось ограничиться рассмотрением случая, когда стержень, опертый по концам, имеет две оси симметрии и загружен центрально приложенной силой. В работе также подробно намечен способ исследования устойчивости в более общем случае опертого стержня с одной осью симметрии, сжимаемого силой, приложенной в центре изгиба.

Рассмотренная И. И. Гольденблатом задача о динамической устойчивости призматического стержня с опертыми концами, находящегося в упругой среде, полностью подпадает под условия первой из теорем § 2.

И. И. Гольденблатом также выполнено исследование нелинейной задачи динамической устойчивости стержня и проведены специальные экспериментальные исследования, о которых будет сказано ниже.

Этим же автором рассмотрено поведение балок, плит, а также целых сооружений (мостов) под действием движущихся масс. При этом установлено, что при определенных скоростях движения масс, превышающих некоторые критические пределы, возможна динамическая неустойчивость системы.

В 1945 г. В. М. Макушина [25] изучил динамическую устойчивость стержня под действием приложенных на концах продольных сил, меняющихся по кусочно-постоянному закону, и показал, что зоны неустойчивости в этой задаче близки к таковым в задаче Н. М. Беляева. Позднее, в 1947 г., В. М. Макушина рассмотрел поведение криволинейных стержней при потере последними динамической устойчивости [26], причем ограничился изучением устойчивости кольца, разобрав в отличие от Г. Ю. Джанелидзе и М. А. Радцига [17] несколько случаев возможного изменения нагрузки в пространстве.

Ряд интересных задач изучил в 1947 г. А. Ф. Смирнов [34], пользуясь методом матричного исчисления. В частности им рассмотрена динамическая устойчивость стержня, нагруженного произвольно распределенными продольными, переменными во времени силами и решено несколько частных задач (например, решена задача о динамической устойчивости балки на упругих опорах с произвольной продольной нагрузкой). А. Ф. Смирнов убедительно показал необходимость пере-

¹ Частные случаи уравнения (2.9) получены также в работах В. И. Челомей [43] и В. М. Макушина [26].

хода к нелинейной задаче при $\mu > 0.8$. Им также предложено построение зон неустойчивости в случае нагрузки вида $P_0 + P_1 \cos \omega t$ в плоскости параметров ω/ν_1 и P_0/Q_1 (при разных P_1 получаем семейство границ).

В. А. Гастев^[9], используя операционное исчисление, рассмотрел динамическую устойчивость опертого по концам призматического стержня, нагруженного импульсной силой вида

$$P(t) = P_1 [\sigma_1(t) + \sigma_1(t - \tau) + \sigma_1(t - 2\tau) + \dots]$$

соответствующей периодически повторяющимся ударам ($\sigma_1(t)$ — импульсная функция). В работе доказано существование зон неустойчивости при действии импульсивной нагрузки.

В 1949 г. А. Н. Марков^[29] исследовал динамическую устойчивость анизотропных (ортотропных) цилиндрических оболочек под действием гармонических сил. В этой работе рассмотрен только случай свободного опирания торцов.

Вопросу о динамической устойчивости цилиндрических оболочек посвящена также работа О. Д. Ониашвили^[31], использовавшего вариационный метод Б. Г. Галеркина. Им изучена сложная задача об одновременном действии переменных продольных и радиальных усилий.

В 1950 г. динамическую устойчивость плоской формы изгиба двутавра и полосы при чистом изгибе приближенно рассмотрел В. Е. Салион^{[32], [33]}. Пренебрегая силами инерции, соответствующими повороту сечения, В. Е. Салион получил уравнение вида

$$B \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{M_1^2}{C} \cos^2 \omega t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

приведение которого к уравнению Матье показывает, что зона неустойчивости соответствует только значениям $\omega/\nu = 1, 2, 3, \dots$ (Эта своеобразная особенность задачи исчезает при некотором обобщении ее постановки, например, при действии момента вида $M_0 + M_1 \cos \omega t$.) Задача об устойчивости плоской формы изгиба была также изучена И. А. Бурнашевым (диссертация, 1951; опубликован автореферат).

Дальнейшее развитие задачи о динамической устойчивости дано в работе Е. А. Бейлина^[3]. В этой диссертации рассмотрены динамическая устойчивость прямолинейного стержня с упруго-закрепленными концами и динамическая устойчивость круговой арки с упруго-закрепленными пятнами.

Применение метода Б. Г. Галеркина в соответствии со второй теоремой § 2 дает

$$\ddot{T}(t) + \nu^{*2} \left[1 - \frac{q(t)}{Q^*} \right] T(t) = 0$$

Здесь ν^* — приближенное значение частоты свободных колебаний круговой арки, Q^* — приближенная величина статической критической силы для арки

$$\nu^{*2} = \frac{B J_3}{\rho a^4 J_1}, \quad Q^* = -\frac{B J_3}{a^3 J_2}$$

при этом

$$J_1 = \int_0^\alpha (u^{*IV} - u^*) u^* d\theta, \quad J_2 = \int_0^\alpha (u^{*IV} + u^{*IV}) u^* d\theta, \quad J_3 = \int_0^\alpha (u^{*VI} + 2u^{*IV} + u^{*IV}) u^* d\theta$$

причем u^* — функция, аппроксимирующая радиальные перемещения в момент потери динамической устойчивости, α — центральный угол между радиусами, проходящими через концы арки. Подсчеты показывают, что величины ν^* и Q^* получаются близкими к точным значениям, если в качестве аппроксимирующей функции u^* принять формы свободных колебаний прямолинейного стержня, заменив в их выражениях аргумент $n\pi x/l$ аргументом $n\pi\theta/\alpha$. В работе также даны упрощенные приближенные формулы для ν^* и Q^* , облегчающие построение зон неустойчивости.

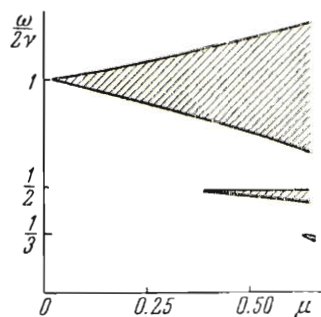
Своеобразный характер носят явления, обусловленные ударными воздействиями при внезапном приложении нагрузок.

М. А. Лаврентьев и А. Ю. Ишлинский [24] показали, что при внезапном приложении нагрузки, превышающей n -ную критическую статическую силу, оказывается возможным появление n -ной устойчивой формы равновесия, имеющей n полуволн. Этот результат подтвержден авторами экспериментально.

Заметим, что при центральном сжатии стержня статическими продольными силами, устойчива лишь та форма равновесия, которая получается при превышении первой (наименьшей) критической силы.

Н. К. Снитко [35] показал, что при быстро приложенной нагрузке устойчивость теряется при силе, значительно меньшей критической. Понижение границ устойчивости тем резче, чем выше скорость приложения нагрузки, и для очень гибких стержней это понижение достигает 60%.

Рассмотрение областей устойчивости решений уравнения Матье (фиг. 2, 3) приводит к парадоксальному выводу, что потеря динамической устойчивости может произойти при сколь угодно малой величине амплитуды возмущающей силы.



Фиг. 4

Учет трения позволяет устранить эту несообразность. Вводя в (1.10) член, соответствующий трению, пропорциональному скорости, имеем

$$\ddot{T}(t) + 2n\dot{T}(t) + \nu_n^2 [1 - \mu \cos \omega t] T(t) = 0 \quad (3.1)$$

где n — коэффициент трения.

Подстановка $T(t) = T^*(t) e^{-nt}$ приводит (3.1) к уравнению Матье для функции $T^*(t)$. Тогда решение уравнения (3.1) принимает вид (см. (1.11))¹

$$T(t) = C_1 e^{(r-n)t} t_\varphi(t) + C_2 e^{-(r+n)t} t_\varphi(-t) \quad (3.2)$$

Таким образом, вопрос устойчивости решений определяется уже соотношением трех параметров ω/ν , μ и n .

Исследование уравнения типа (3.1) занимались в 1927 г. А. А. Андронов и М. А. Леонтович [2], а в 1933 г. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Пападеки [28].

Специально для задачи динамической устойчивости стержня оно рассмотрено² К. А. Наумовым [33].

Этими авторами выяснено, что при наличии трения потеря устойчивости возможна только при $\mu > \mu_{\min}$, т. е. когда коэффициент пульсации больше некоторого значения (фиг. 4).

Приближенно границы первой (наиболее опасной) области динамической неустойчивости с учетом затухания определяются из соотношения

$$\frac{2\nu_{np}^*}{\omega} = \sqrt{1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mu^2 - 64 \frac{n^2}{\omega^2}}} \quad (\nu_{np}^* = \sqrt{\nu_{np}^2 - n^2}) \quad (3.3)$$

и минимальное значение коэффициента пульсации будет $\mu_{\min} = 8n/\omega$.

Вследствие влияния трения зоны неустойчивости сдвигаются вправо и сужаются. Поэтому потерю устойчивости, соответствующую второй области, трудно осуществить даже в лабораторных условиях [6].

Третья и высшие области неустойчивости при наличии затухания практически не имеют значения.

¹ В. Н. Челомей впервые пытался исследовать влияние трения в задачах динамической устойчивости упругих систем.

Однако он ограничился изучением устойчивости решения $T^*(t)$ вместо $T(t)$; это обстоятельство и привело автора к ошибочному выводу о расширении зон неустойчивости вследствие влияния трения.

² В работе К. А. Наумова [33] при определении границ зон и μ_{\min} допущена ошибка; правильный результат получается при замене употребляемого К. А. Наумовым коэффициента k на $k/2$.

В 1950 г. в работе К. Р. Коваленко [19] были подвергнуты критике основы теории динамической устойчивости упругих систем. Так, К. Р. Коваленко указывает, что «... применение теории зон устойчивости А. М. Ляпунова к задаче Н. М. Беляева приводит к следующему парадоксальному выводу: при сколь угодно малой продольной периодической силе и при сколь угодно медленном изменении ее (малой частоте) стержень может оказаться неустойчивым. К такому выводу приводит анализ известных решений задач динамической устойчивости пластины и оболочек. Этот парадокс является следствием чрезмерной идеализации расчетной схемы».

Далее К. Р. Коваленко пишет, «что учет только внешнего сопротивления, пропорционального скорости точек стержня, еще недостаточен для устранения... указанного парадокса, тогда как учет внутреннего сопротивления, пропорционального скорости деформации, устраняет этот парадокс» (цитируется по автореферату).

Однако, как нам кажется, в практических расчетах на динамическую устойчивость с учетом сил затухания, пропорциональных скорости движения (что является одной из гипотез и для определения сил внутреннего сопротивления, а не только внешнего, как пишет К. Р. Коваленко), указанный парадокс не будет существовать, так как потеря устойчивости в этом случае возможна не при сколь угодно малой величине амплитуды силы $P(t)$, а только при определенной минимальной ее величине (фиг. 4). Что же касается второго парадоксального вывода, что потеря устойчивости возможна при сколь угодно малой величине частоты силы $P(t)$, то из выражения (1.12) видно, что сколь угодно малой величине ω соответствует сколь угодно далекий член ряда (1.12), т. е. потеря устойчивости будет соответствовать сколь угодно большому номеру зоны динамической неустойчивости.

Из фиг. 4 видно, что с увеличением порядкового номера зоны неустойчивости постепенно вырождаются, а величина μ_{\min} увеличивается, из чего можно заключить, что при очень малых значениях отношения ω/ν практически невозможно добиться потери динамической устойчивости.

Следует также отметить математические работы М. Г. Крейна и К. Р. Коваленко [20, 22], посвященные дальнейшей разработке результатов А. М. Ляпунова по уравнениям с периодическими коэффициентами.

Изложенная выше линейная теория динамической устойчивости позволяет определять границы зон неустойчивости, однако она оставляет открытым вопрос о параметрах движения, которое устанавливается после потери устойчивости. Напомним, что аналогичное положение имеет место и в статической теории устойчивости, основанной на линеаризации уравнений, которая дает правильные значения критических сил, но оставляет неопределенными прогибы.

Совершенно ясно, что для выяснения характера процессов, происходящих при потере динамической устойчивости, необходимо перейти от линейной трактовки этой проблемы к нелинейной.

Несмотря на то, что такой переход в математически идентичной задаче из области электрических колебаний был сделан еще в 1934 г. Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [28], первая работа в этом направлении в области динамической устойчивости упругих систем появилась только в 1948 г. А именно, И. И. Гольденблат в монографии [12] рассмотрел динамическую устойчивость стойки, поддерживаемой упругим перекрытием. Схематически задача изображена на фиг. 5.

Рассматривая шарнирное закрепление концов и принимая изогнутую ось стойки за полуволну синусоиды, И. И. Гольденблат пришел к нелинейному уравнению

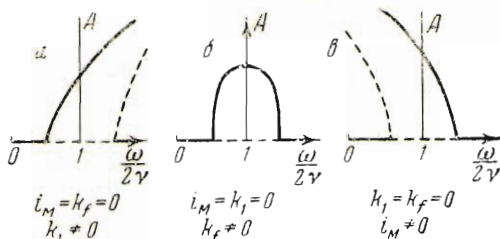
$$\ddot{T}(t) + \nu_{np}^2 (1 - \mu \cos \omega t) T(t) + \frac{\pi^4 k}{4\rho l^3} T^3(t) + \frac{\pi^4 M}{4\rho l^3} \{ [2\dot{T}(t)]^2 + 2T(t)\ddot{T}(t) \} T(t) = 0 \quad (3.4)$$

Величины k , характеризующая упругость перекрытия, и масса последнего M входят в два последних члена уравнения (3.4), которые, собственно говоря, обуславливают нелинейность уравнения.



Фиг. 5

В. В. Болотин [6], подробно исследовавший нелинейные задачи, величину $\pi^4 k / 4\rho l^3 = k_1$ назвал коэффициентом нелинейной упругости, а величину $\pi^4 M / 4\rho l^3 = i_m$ — коэффициентом нелинейной инерции сосредоточенной массы. Он же показал, что силы нелинейной инерции возникают не только при наличии сосредоточенной массы на подвижном конце стержня, но и обуславливаются наличием вертикального перемещения каждого элемента стержня, и определил соответствующий коэффициент



Фиг. 6

$$i_m = \frac{\pi^4}{4l^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{8\pi^2} \right)$$

В. В. Болотин указал, что при нелинейной трактовке динамической устойчивости должно учитываться и так называемое нелинейное сопротивление. Для соответствующей силы он получил выражение

$$2k_f T^2 (t) \dot{T} (t) \quad \left(k_f = \frac{\pi^4 k_2}{4\rho l^3} \right)$$

Здесь k_f — коэффициент нелинейного затухания (сила сопротивления $F = k_2 u$, где u — вертикальное перемещение конца стержня). Учитывая все перечисленные нелинейные факторы, уравнение динамической устойчивости можно написать в виде:

$$\dot{T} + \nu_{np}^2 (1 - \mu \cos \omega t) T + \Psi(T, \dot{T}, \ddot{T}) = 0 \quad (3.5)$$

Последний член представляет собой нелинейную функцию, имеющую вид

$$\Psi(T, \dot{T}, \ddot{T}) = k_1 T^3 + 2k_f T^2 \dot{T} + 2i_m T (\dot{T}^2 + T\ddot{T}) \quad (3.6)$$

И. И. Гольденблат, используя результаты К. Ф. Теодорчика [38], рассматривал уравнение (3.4) сначала в предположении $M = 0$, $k \neq 0$, а затем $k = 0$, $M \neq 0$, причем в первом случае он получил выражение для установившихся амплитуд.

В. В. Болотин, пользуясь методом Б. Г. Галеркина совместно с методом усреднения, приблизительно исследовал уравнение (3.5) с учетом всех трех нелинейных факторов, при этом он также получил выражение для величины амплитуд установившихся колебаний. Зависимость амплитуд A от соотношения $\omega / 2\nu_{np}$ для трех основных случаев учета нелинейных факторов изображена на фиг. 6.

Основания всех кривых (отрезки на оси абсцисс, соответствующие ненулевым значениям ординат) совпадают с интервалом неустойчивости линейного решения (для соответствующего значения коэффициента пульсации μ).

В случае нелинейной упругости и нелинейной инерции (фиг. 6а и фиг. 6в) для амплитуды A имеются два решения, одно из которых является неустойчивым (шпунтирная кривая). Основные результаты теории динамической устойчивости были подвергнуты экспериментальной проверке в опытах со стержнями. И. И. Гольденблат [12] на довольно элементарной установке исследовал поведение шарнирно опертого стержня под действием силы $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$; он получил некоторое подтверждение теоретических соотношений (1.12).

Более детальное экспериментальное исследование поведения стержня при потере им динамической устойчивости проведено в 1951 г. в работе В. В. Болотина [6].

Последним была экспериментально проверена формула (1.13) для определения границ основной зоны неустойчивости для нагрузке вида $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$, причем сила P_1 возрастала пропорционально квадрату частоты ω .

В. В. Болотин исследовал также характер установления параметрических колебаний при помощи осциллографа.

Как в опытах И. И. Гольденבלата, так и в опытах В. В. Болотина недостатком являлось то обстоятельство, что употреблявшиеся ими вибраторы не позволяли менять произвольно (независимо от частоты ω) динамическое слагаемое $P_1 \cos \omega t$ в силе $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$.

Этот недостаток не позволяет, например, исследовать влияние на потерю динамической устойчивости изменения амплитуды силы P_1 при постоянной частоте или, наоборот, влияние изменения частоты ω при постоянной амплитуде силы.

Необходимо отметить, что в области электрических колебаний аналогичные явления исследовались экспериментально ^[28] еще в 1933 г.

В последние годы проблема динамической устойчивости в связи с ее существенным практическим значением получила отражение и в учебной литературе ^[30, 36, 16]

Поступила 5 V 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Достаточное условие устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 3.
2. Андронов А. А., Леонтович М. А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. ЖРФХО. 1927. Т. 59. Вып. 5—6.
3. Бейлин Е. А. Некоторые вопросы динамической устойчивости прямолинейных и криволинейных стержней. Автореферат диссертации. Лен. инж.-строительн. институт. 1952.
4. Беляев Н. М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил. Сб. статей «Инженерные сооружения и строительная механика». Изд-во Путь. Л. 1924.
5. Боднер В. А. Устойчивость пластин под действием продольных периодических сил. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 1.
6. Болотин В. В. О поперечных колебаниях стержней, вызываемых периодическими продольными силами. Сб. статей Института машиноведения АН СССР «Поперечные колебания и критические скорости». Изд. АН СССР. 1951.
7. Бондаренко Г. В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. Изд. АН СССР. 1936.
8. Брачковский Б. З. О динамической устойчивости упругих систем. ПММ. 1942. Т. IV. Вып. 1.
9. Гастев В. А. Поперечные колебания и устойчивость стержней при действии периодически повторяющихся продольных импульсов. Тр. Ленинград. института авиаприборостроения. 1949. Вып. 1.
10. Гольденблат И. И. О некоторых проблемах динамики сооружений. Строительная промышленность. 1944. № 10—11.
11. Гольденблат И. И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений. Стройиздат. 1947.
12. Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. Стройиздат. 1948.
13. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы колебаний и динамической устойчивости упругих систем. Сб. статей «Исследовательские работы по инженерным конструкциям» под ред. В. В. Бургмана. Стройиздат. 1948.
14. Гольденблат И. И. Динамический продольный изгиб тонкостенных стержней. Инженерный сборник. 1948. Т. V. Вып. 1.
15. Гольденблат И. И. Некоторые новые проблемы динамики сооружений. Изв. АН СССР, ОТН. 1950. № 6.
16. Горелик Г. С. Колебания и волны. ГТТИ. 1950.
17. Джанелидзе Г. Ю., Радциг М. А. Динамическая устойчивость кольца под действием нормальных периодических сил. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 4.
18. Джанелидзе Г. Ю. Научно-техническая конференция ЛПИ им. М. И. Калинина. Тезисы доклада «Динамическая устойчивость стержней, плит и оболочек». Ленинград. 1951.
19. Коваленко К. Р. Автореферат диссертации «Основные положения теории зон устойчивости А. М. Ляпунова и их применение к некоторым вопросам динамической устойчивости стержней». Одесский институт инженеров Морского флота. 1950.

20. Коваленко К. Р. и Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР. 1950. Т. 73. Вып. 3.
21. Кочин Н. Е. О крутильных колебаниях валов. ПММ. 1934. Т. II. Вып. 1.
22. Крейн М. Г. О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН СССР. 1950. Т. 75. Вып. 4.
23. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня. Сб. статей «Исследование колебаний конструкции». ОНТИ. 1935.
24. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. ДАН СССР. 1949. Т. 65. № 6.
25. Макушин В. М. О динамической устойчивости стержней, нагруженных периодически изменяющимися продольными силами. Вестник машиностроения. 1945. № 6—7.
26. Макушин В. М. Динамическая устойчивость деформированного состояния упругих стержней. Тр. кафедры сопротивления материалов МВТУ им. Баумана, раздел III «Колебания, устойчивость и равновесие упругих систем». 1947.
27. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А. Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э. Новые исследования нелинейных колебаний. ГТТИ. 1936.
28. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний. ЖТФ. 1934. Вып. 3; Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. II. Изд. АН СССР. 1947.
29. Марков А. Н. Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 2.
30. Наумов К. А. Устойчивость призматического стержня с учетом затухания. Тр. МИИТ им. И. В. Сталина. Строительная механика и мосты. 1948. Вып. 69.
31. Оняшвили О. Д. О динамической устойчивости оболочек. Сообщения АН Груз. ССР. 1950. № 3.
32. Салион В. Е. Динамическая устойчивость плоской формы изгиба двутавровых балок. ДАН УРСР. 1950. № 5.
33. Салион В. Е. Динамическая устойчивость плоской формы изгиба. ДАН СССР. 1951. Т. 78. Вып. 6.
34. Смирнов А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат. 1947.
35. Снитко Н. К. Устойчивость слабо искривленных сжатых стальных стержней при вибрационной нагрузке. Тр. Военно-транспортной Академии Красной Армии. 1944. Вып. 2.
36. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Гостехиздат. 1951.
37. Стретт М. Д. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ. 1935.
38. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. ГТТИ. 1948.
39. Филиппов А. П. Методы расчета сооружений на колебания. Стройиздат. 1941.
40. Челомей В. Н. О колебаниях стержней, подверженных действию периодически меняющихся продольных сил. Тр. Киев. авиац. ин-та. 1938. Вып. 8.
41. Челомей В. Н. Об устойчивости стержней, подверженных действию продольных, периодически меняющихся распределенных по длине усилий. Тр. Киев. авиационного института. 1938. Вып. 10.
42. Челомей В. Н. Динамическая устойчивость пластин. Тр. Киев. авиационного института. 1938. Вып. 10.
43. Челомей В. Н. Динамическая устойчивость элементов авиационных конструкций. Изд. Аэрофлота. 1939.