Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЖУКОВСКОГО

В. И. Меркулов

(Ростов-на-Дону)

Данная заметка посвящена анализу частного случая задачи Жуковского о движении тела с полостями, наполненными жидкостью, когда само тело осесимметрично, а полость двусвязная и является полостью вращения вокруг оси симметрии.

Будем рассматривать движения вокруг неподвижной точки, лежащей на оси симметрии, под действием силы тяжести. Обозначим через C полярный момент инерции «эквивалентного твердого тела» [1] относительно оси симметрии, которую примем за ось Oz подвижной системы координат. Очевидно, что он равен моменту инерции только твердого тела.

Обозначим через A экваториальный момент инерции в неподвижной точке O через p, q, r — проекции угловой скорости тела на оси подвижной системы $Oxyz$, через k — главную циркуляцию и через m — массу жидкости. Н. Е. Жуковский указал [1], что для всех полостей вращения момент количества движения жидкости в покоящемся теле равен $mk/2\pi$ и направлен по оси вращения полости. Поэтому кинетический момент системы имеет вид

$$\mathbf{Q} = Ap\mathbf{x}^\circ + Aq\mathbf{y}^\circ + \left(Cr + \frac{mk}{2\pi}\right)\mathbf{z}^\circ$$

Обозначая $\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{x}^0 + q\mathbf{y}^0$, теорему о моменте количества движения представим в виде

$$A\,\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \left(Cr + \frac{mk}{2\pi}\right)\frac{d\mathbf{z}^\circ}{dt} + C\,\frac{dr}{dt}\,\mathbf{z}^0 = Pa\,\boldsymbol{\zeta}^0 \times \mathbf{z}^0 \tag{1}$$

где P — вес всей системы, a — расстояние по оси Oz от неподвижной точки до центра масс, $\boldsymbol{\zeta}^0$ — орт вертикальной оси неподвижной системы.

Если уравнение (1) умножить скалярно на $\mathbf{z}^0$, то получим интеграл $r = r_0 = \mathrm{const}$. Так как $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{z}^0 \times \mathbf{z}^{0\prime}$, то уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$A\mathbf{z}^0 \times \mathbf{z}^{0\prime\prime} + \left(Cr + \frac{mk}{2\pi}\right)\mathbf{z}^0 - Pa\,\boldsymbol{\zeta}_0 \times \mathbf{z}^0 = 0 \tag{2}$$

или в проекциях:

$$\begin{aligned} &A\,(\beta\gamma'' - \beta''\gamma) + \left(Cr + \frac{mk}{2\pi}\right)\alpha' + Pa\beta = 0 \\ &A\,(\gamma\alpha'' - \gamma''\alpha) + \left(Cr + \frac{mk}{2\pi}\right)\beta' - Pa\alpha = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где α, β, γ — направляющие косинусы оси Oz в неподвижной системе.

Рассмотрим случай движения с малым углом нутации, т. е. будем считать $\gamma = 1$, α, β, α' и β' — малыми первого порядка.

Так как

$$\gamma'' = -\frac{(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 + (\alpha''\alpha + \beta''\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - 1) - \alpha'^2 - \beta'^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

то произведения $\gamma''\beta$ и $\gamma''\alpha$ — малые третьего порядка.

Отбрасывая малые величины третьего порядка, получим

$$A\beta'' - \left(Cr + \frac{mk}{2\pi}\right)\alpha' - Pa\beta = 0$$

$$A\alpha'' + \left(Cr + \frac{mk}{2\pi}\right)\beta' - Pa\alpha = 0$$

Вводя новое переменное $\psi = \alpha + i\beta$, найдем

$$A\frac{d^2\psi}{dt^2} - i\left(Cr + \frac{mk}{2\pi}\right)\frac{d\psi}{dt} - Pa\psi = 0$$

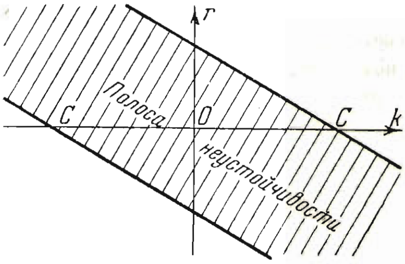
Найдем необходимые условия устойчивости.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - i\left(\frac{Cr}{A} + \frac{mk}{2\pi A}\right)\lambda - \frac{Pa}{A} = 0$$

имеет чисто мнимые корни тогда, и только тогда, когда

$$\left(\frac{Cr}{2A} + \frac{mk}{2\pi A}\right)^2 \geqslant \frac{Pa}{A}$$



Фиг. 1

Это неравенство позволяет провести на плоскости kr две прямые, определяющие полосу неустойчивости (фиг. 1). Точки

$$C = \pm\frac{4\pi}{m}\sqrt{PAa}$$

соответствуют тому значению циркуляции, которое обеспечивает устойчивость вертикального положения равновесия при неподвижном сосуде.

Поступила 7 VII 1952

Ростовский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельною жидкостью. Собр. соч. Т. II. 1949.