Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Е. А. Барбашин
(Свердловск)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0 \tag{1}$$

где a — постоянная, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, а функция $\varphi(y)$ непрерывна при всех значениях аргумента.

В дальнейшем введем в рассмотрение функцию

$$w(x, y) = aF(x) + f(x)\,y + \Phi(y) \qquad \left(F(x) = \int_0^x f(x)\,dx,\ \Phi(y) = \int_0^y \varphi(y)\,dy\right) \tag{2}$$

Теорема 1. Если $a > 0$ и функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ в уравнении (1) удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = f(0) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{f(x)}{x} > 0 \qquad \text{при}\quad x \neq 0 \tag{4}$$

$$\frac{\varphi(y)}{y} - f'(x) > 0 \qquad \text{при}\quad y \neq 0 \tag{5}$$

$$\lim_{r\to\infty} w(x, y) = \infty, \quad \text{где}\quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6}$$

то тривиальное решение $x = 0$ уравнения (1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Докажем теорему. Вводя обозначения

$$y = \frac{dx}{dt}, \qquad z = \frac{dy}{dt} + ay$$

уравнение (1) приведем к системе

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = z - ay, \qquad \frac{dz}{dt} = -\varphi(y) - f(x) \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$v = a\,F(x) + f(x)\,y + \Phi(y) + \tfrac{1}{2}z^2 = w(x, y) + \tfrac{1}{2}z^2 \tag{8}$$

Для производной dv/dt имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}y + \frac{\partial v}{\partial y}(z - ay) - \frac{\partial v}{\partial z}(\varphi(y) + f(x)) = \left[f'(x) - a\frac{\varphi(y)}{y}\right]y^2$$

Отсюда

$$\frac{dv}{dt} < 0 \quad \text{при}\ y \neq 0, \qquad \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{при}\ y = 0$$

Покажем теперь, что функция w является определенно положительной. Согласно (2) ее можно представить в виде

$$w(x, y) = \frac{(2\Phi(y) + yf(x))^2}{4\Phi(y)} + \frac{4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x)}{4\Phi(y)}$$

Заметим, что $\Phi(y) > 0$ при $y \neq 0$. В самом деле, так как $f(x)$ меняет знак в точке $x = 0$, то $f'(x)$ принимает положительные значения для некоторых значений x; эти значения, как видно из условия (5), не превышают нижней грани значений $a\varphi(y) / y$, что и обеспечивает нам положительность $\varphi(y)/y$ или, что то же самое, положительность интеграла $\Phi(y)$.

Покажем далее, что функция

$$u(x, y) = 4aF(x)\Phi(y) - y^2f^2(x) \tag{9}$$

положительна при $x \neq 0$, $y \neq 0$. В самом деле, имеем

$$u(x, y) = 4\int_0^x f(x)\left[\int_0^y \left(a\frac{\varphi(y)}{y} - f'(x)\right) y\, dy\right] dx \tag{10}$$

условие (5) обеспечивает нам положительность внутреннего интеграла, а условие (4) — положительность функции $u(x, y)$.

Итак, $w(x, y)$ является определенно положительной функцией аргументов x и y и, следовательно, функция $v(x, y, z) = w(x, y) + {}^1/_2\, z^2$ является определенно положительной функцией аргументов x, y, z.

Пусть теперь $P(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка фазового пространства и обозначим через γ какую-либо траекторию системы (7), заданную уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и выходящую из точки P. Так как $dv / dt \leqslant 0$, то

$$v(x(t), y(t), z(t)) \leqslant v(x_0, y_0, z_0) \qquad \text{при } t > 0$$

и функция $v(x(t), y(t), z(t))$ как невозрастающая и неотрицательная функция времени t имеет определенный предел v_0 при $t \to \infty$. Допустим пока, что $v_0 \neq 0$. Так как условие (6) теоремы 1 обеспечивает ограниченность области $v < v(x_0, y_0, z_0)$, то существует по крайней мере одна ω-предельная точка $Q(x_1, y_1, z_1)$ траектории γ, т. е. такая точка, что можно указать последовательность чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$, обладающую тем свойством, что $\lim t_n = \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x(t_n), y(t_n), z(t_n)) = Q(x_1, y_1, z_1)$$

Так как функция $v(x, y, z)$ является непрерывной функцией, то мы должны иметь $v(x_1, y_1, z_1) = v_0$ для любой такой ω-предельной точки.

Покажем теперь, что в любой ω-предельной точке Q производная функции v по времени равна нулю. В самом деле, если $dv / dt < 0$ в точке Q, то все траектории, выходящие из точки Q, должны попасть при $t > 0$ в область $v < v_0$. Но известно[2], что совокупность ω-предельных точек траектории γ состоит из целых траекторий, поэтому существует среди полутраекторий, выходящих из Q, ω-предельная полутраектория, увлекающая за собой внутрь области $v < v_0$ точки траектории γ. Но в силу выбора v_0 на траектории γ не может быть точек, лежащих внутри области $v < v_0$; таким образом, предположение, что $dv / dt < 0$ в точке Q, приводит к противоречию.

Так как точка Q была произвольной ω-предельной точкой траектории γ, то мы приходим к выводу, что совокупность всех ω-предельных точек этой траектории, состоящая из целых траекторий, расположена на плоскости $y = 0$. Мы утверждаем, однако, что не может быть точек, кроме начала координат, остающихся на плоскости $y = 0$ при движении по траекториям системы (7). В самом деле, если бы $x = \psi_1(t)$, (t), $z = \psi_3(t)$ было решением системы (7) и $\psi_2(t) \equiv 0$, то из второго уравнения этой системы мы получили бы $\psi_3(t)\equiv 0$ и из третьего уравнения имели бы, учитывая (4), $\psi_1(t)\equiv 0$. Таким образом, число v_0 может быть только нулем. Ясно теперь, что $\lim x(t)=0$, $\lim y(t)=0$, $\lim z(t)=0$ при $t\to\infty$. Теорема доказана [1].

Заметим теперь, что функция v, использованная в доказательстве теоремы, построена по методу И. Г. Малкина. Этот метод, успешно примененный недавно И. Г. Малкиным для исследования системы двух уравнений, состоит в предварительном отыскании функции Ляпунова для соответствующей линейной системы с последующим усложнением и приспособлением найденной функции для рассматриваемой системы. Естественно поэтому, что условия (3), (4), (5) нашей теоремы превращаются в линейном случае в условия Рауза-Гурвица и являются, следовательно, необходимыми и достаточными в этом частном случае.

Теорема 2. Пусть $a>0$ и существуют положительные числа h_1 и h_2 такие, что $ah_2-h_1>0$ и

$$\frac{f(x)}{x}>h_1 \quad \text{при } x\neq 0 \tag{11}$$

$$a\frac{\varphi(y)}{y}-f'(x)>ah_2-h_1 \tag{12}$$

Если $f(0)=\varphi(0)=0$, то тривиальное решение уравнения (1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Чтобы применить в этом случае теорему 1, достаточно показать, что $\lim w(x,y)=\infty$ при $r\to\infty$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Так как $f(x)$ меняет знак при $x=0$, то существует положительная верхняя грань m значений производной, ибо из условий (12) следует

$$a\frac{\varphi(y)}{y}>m+h_2 \tag{13}$$

Рассмотрим теперь квадратичную форму

$$u(x,y)=\tfrac{1}{2}ah_1x^2+h_1xy+\tfrac{1}{2}h_2y^2 \tag{14}$$

Так как $h_1>0$, $h_2>0$, $ah_2-h_1>0$, то форма $u(x,y)$ должна быть определенно положительной.

Рассмотрим функцию

$$w_1(x,y)=w(x,y)-u(x,y)$$

где $w(x,y)$ определена согласно (2). Введем обозначения

$$f_1(x)=f(x)-h_1x, \quad \varphi_1(y)=\varphi(y)-h_2y \tag{15}$$

Имеем

$$w_1(x,y)=a\int_0^x f_1(x)\,dx+f_1(x)\,y+\int_0^y\varphi_1(y)\,dy \tag{16}$$

Покажем, что функция $w_1(x,y)$ определенно положительна. Очевидно, функция $w_1(x,y)$ также строится из функций $f_1(x)$, $\varphi_1(y)$, как функция $w(x,y)$ из функций $f(x)$, $\varphi(y)$; поэтому, если мы покажем, что функции $f_1(x)$, $\varphi_1(y)$ удовлетворяют условиям (3), (4), (5) теоремы 1, то этим и будет доказана определенная положительность функции $w_1(x,y)$. Но условия (11) и (12) доказываемой теоремы дают нам $f_1(x)/x>0$ и $a\varphi_1(y)/y-f_1'(x)>0$, поэтому далее доказательство определенной положительности функции $w_1(x,y)$ проводится так же, как доказательство положительной определенности функции $w(x,y)$ в теореме 1.

[1] На возможность обобщения теоремы на случай, когда уравнение (1) не обладает свойством единственности, мне указал Н. П. Еругин.

Итак, $w_1(x, y) > 0$ и $w(x, y) > u(x, y)$ при $r^2 = x^2 + y^2$. Так как $\lim u(x, y) = \infty$ при $r \to \infty$, то имеем $\lim w(x, y) = \infty$ при $r \to \infty$. Далее применяем теорему 1.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + bx = 0 \tag{17}$$

где $\varphi(y)$ — непрерывная функция.

Теорема 3. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и функция $\varphi(y)$ в уравнении (17) удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\varphi(y)}{y} > \frac{b}{a} \qquad \text{при } y \neq 0 \tag{19}$$

$$\lim\left[\int_0^y \varphi(y)\,dy - \frac{by^2}{2a}\right] = \infty \qquad \text{при } |y| \to \infty \tag{20}$$

Тривиальное решение $x = 0$ уравнения (17) будет асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

В самом деле, чтобы применить теорему 1, достаточно положить $f(x) = bx$. Нужно показать только, что

$$\lim_{r\to\infty} w(x, y) = \lim_{r\to\infty}\left[\frac{ab}{2}x^2 + bxy + \int_0^y \varphi(y)\,dy\right] = \infty$$

но имеем, очевидно,

$$w(x, y) = \frac{b}{2a}(ax + y)^2 + \int_0^y \varphi(y)\,dy - \frac{by^2}{2a}$$

Условие (20) теоремы 3 обеспечивает неограниченное возрастание функции $w(x, y)$ при неограниченном возрастании r.

Поступила 21 IV 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 3.
2. Барбашин Е. А. К теории обобщенных динамических систем. Ученые записки МГУ. 1949. Т. II. Вып. 135. Стр. 110—134.