Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Н. П. Еругин

(Ленинград)

В вып. 3 журнала за этот год И. Г. Малкин[1] рассмотрел следующую задачу [1]. Дана система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + cy \tag{1}$$

где a, b и c — постоянные, $f(x)$ подчинена условиям

$$x[f(x) + cx] < 0 \qquad f(0) = 0 \tag{2}$$

$$x[cf(x) - abx] > 0 \qquad (x \neq 0) \tag{3}$$

Автор предполагает еще (считая это, как само собой разумеющееся, также и в заметке [2] М. А. Айзермана, который предложил эту задачу), что система (1) удовлетворяет условию теоремы единственности при всех значениях x, y.

Требуется доказать, что состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Доказательство проводится следующим образом. Строится функция

$$2V = 2\int_0^x [cf(x) - abx]\,dx + (cx - ay)^2 \qquad (a \neq 0) \tag{4}$$

По условию (3)

$$x\varphi(x) = x[cf(x) - abx] > 0 \tag{5}$$

Поэтому

$$V(x, y) > 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 > 0, \qquad V(0, 0) = 0$$

Как легко видеть, в силу системы (1) на основании условий (2) и (3) имеем

$$\frac{dV}{dt} = [f(x) + cx][cf(x) - abx] \leqslant 0 \tag{6}$$

Отсюда И. Г. Малкин заключает: «Таким образом, при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям (2) и (3), V будет являться для уравнений (1)

---

[1] Некоторые замечания к работе И. Г. Малкина, содержащиеся в этой заметке, были сделаны по просьбе редакции ПММ. При этом в моем распоряжении имелся первоначальный текст статьи И. Г. Малкина. При чтении последней корректуры И. Г. Малкин внес в свою работу ряд изменений; так, например, им было добавлено ранее отсутствовавшее условие (2.3), которое в нашей записи имеет вид

$$c\frac{f(x)}{x} - ab > \varepsilon \qquad (|x| > \varepsilon)$$

и которое для наших рассуждений не требуется,— (*Н. Е.*).

функцией Ляпунова. Отсюда немедленно вытекает устойчивость равновесия $x = y = 0$.

Легко видеть, что при этом устойчивость будет асимптотической, несмотря на то, что функция V является не знакоопределенной, а только знакопостоянной.

Действительно, dV / dt обращается в нуль только при $x = 0$ и, следовательно, интегральные кривые во всех точках, не лежащих на оси y, пересекают семейство замкнутых кривых $V = \mathrm{const}$ снаружи во внутрь.

Но то же самое будет, очевидно, иметь место и в точках, лежащих на оси y, так как при $x = 0$, как это следует из уравнений (1), $dx / dt \neq 0$.

Разница будет лишь в том, что на оси y интегральные кривые, входя внутрь кривых $V = \mathrm{const}$, будут при этом их касаться».

На этом автор и заканчивает доказательство.

Нам кажется полезным это краткое рассуждение провести несколько подробнее [1].

Заметим, что, не ограничивая общности в случае $a \neq 0$, можно считать $a > 0$.

Согласно обозначению (5) формулу (4) можно записать в виде

$$V = 2\int_0^x \varphi(x)\, dx + (cx - ay)^2 \tag{7}$$

Предположим сначала, что

$$F(x) = 2\int_0^x \varphi(x)\, dx \to \infty \qquad \text{при } x \to \pm\infty \tag{8}$$

Кривые, определяемые равенством

$$V(x, y) = k^2 \tag{9}$$

можно, как видно из (7), записать и так:

$$ay = cx \pm \sqrt{k^2 - F(x)} \tag{10}$$

На основании (8) при любом $k \neq 0$ кривая (9) будет замкнутой, так как при $x \to x_1$, когда $F(x_1) = k^2$, два значения y, определяемые равенством (10), совпадают. Найдется одно $x_1 > 0$ и одно $x_2 < 0$, при которых значения y совпадают, и вне промежутка (x_2, x_1) кривая (10) при фиксированном k не существует.

Таким образом, действительно, как отмечено у И. Г. Малкина, равенство (9) определяет семейство замкнутых [2] кривых, и, добавим, заполняющих всю плоскость x, y, стягивающихся к точке (0, 0) при $k \to 0$.

Так как согласно (6) производная $dV / dt \leqslant 0$, то функция $V(x(t), y(t)) = V(t)$ убывает при $t \to \infty$.

Воспользуемся теоремой Бендиксона [1], согласно которой рассматриваемое движение $M(t)$, оставаясь в ограниченной части плоскости $V(x, y) < V(x_0, y_0)$, где (x_0, y_0) — начальная точка движения $M(t)$, либо приближается к точке равновесия, либо является периодическим движением, либо наматывается на периодическое движение как спираль.

Так как $dV / dt = 0$ только при $x = 0$, то точками равновесия могли бы быть только точки оси y, но мы видели, что точки оси y не являются точками равновесия. Мы видели также, что движение $M(t)$ не может оставаться на кривой $V(x, y) = k^2$ и тем более не может вернуться в прежнюю точку какой-либо кривой $V(x, y) = k^2$. Отсюда следует, что движения, определяемые системой (1), не могут быть и периодическими, а следовательно, не могут быть и спиралями, наматывающимися на периодическое решение.

Согласно высказанной теореме Бендиксона всякое движение, определяемое системой (1), при условии (8) обладает свойством $M(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

---

[1] Во-первых, потому, что оно ничего не доказывает, кроме того, что $V(t)$ убывает при $t \to \infty$, и, во-вторых, потому, что кривые $V = \mathrm{const}$ могут быть незамкнутыми.

[2] Только при условии (8).

Теорема Бендиксона доказана при выполнении условий теоремы единственности решений во всей плоскости.

Докажем, однако, факт асимптотической устойчивости, пользуясь только предположением непрерывности функции $f(x)$. Рассмотрим убывающую функцию $V(t)$.

Предположим
$$V(t) \to k_1^2 \neq 0 \qquad \text{при } t \to \infty$$

Найдется такое t_1, при котором $V(t_1)$ будет в наперед заданной, как угодно малой окрестности k_1^2. Пусть $V(t_1) = k_1^2 + \beta$, где $\beta > 0$ — как угодно малое.

Очевидно, ординаты кривой $V = k_1^2$ при $x = 0$ будут $y(0) = \pm k_1 / a$. Рассмотрим замкнутую область A, ограниченную замкнутыми кривыми $V = k_1^2$ и $V = k_1^2 + \beta$.

Пусть A_ε — часть этого кольца, соответствующая промежутку $-\varepsilon < x < \varepsilon$, и $A - A_\varepsilon$ — остальная часть кольца. Покажем, что всякое движение $M(t)$ в конечный момент $t_2 > t_1$ достигает кривой $V = k_1^2$, а тогда согласно предыдущему оно войдет и внутрь области, ограниченной этой кривой.

Предположим, движение $M(t)$ входит в область $A - A_\varepsilon$ при $t > t_1$ и остается там при этих значениях t.

Так как в области $A - A_\varepsilon$ $|x|$ ограничено, а также $|x| > \varepsilon$, то согласно (2), (3), (6) и непрерывности функции $f(x)$ имеем в этой области
$$\frac{dV}{dt} < -\delta \qquad (\delta = \text{const} > 0)$$

Следовательно, пока $M(t)$ остается в области $A - A_\varepsilon$:
$$V(t) - V(t_1) = \int_{t_1}^{t} V'\,dt < -\delta(t - t_1) \quad \text{или} \quad V(t_1) - V(t) > \delta(t - t_1)$$

Отсюда видим, что точка $M(t)$ либо достигает кривой $V = k_1^2$ в области $A - A_\varepsilon$ в момент $t = t_3 > t_1$, либо входит в область A_ε.

Предположим, точка $M(t)$ входит в область A_ε в момент $t = t_2$ и затем остается в области A_ε при $t > t_2$. Из системы (1) имеем
$$\frac{dx}{dt} = f(x) + ay$$

Возьмем ε и β настолько малыми, что
$$|f(x) + ay| = |f(x) + a(k_1 + \Delta y)| > m > 0$$
в области A_ε, где m — постоянное. Это возможно, так как функция $f(x)$ непрерывная, $f(0) = 0$ и $\Delta y \to 0$ при $\beta \to 0$ и $\varepsilon \to 0$.

Пусть $dx/dt > m > 0$ в области A_ε. Тогда
$$x(t) - x(t_2) > m(t - t_2)$$
и, следовательно, при некотором $t = t_3 > t_2$ точка $M(t)$ выйдет из области A_ε. К такому же результату приходим при $-m < f(x) + ay$. Таким образом, мы видим, что точка $M(t)$ в некоторый момент $t = t_3$ либо достигает кривой $V = k_1^2$ в области A_ε, либо выходит из области A_ε и входит в область $A - A_\varepsilon$, не пересекая кривой $V = k_1^2$.

Отсюда следует, что точка $M(t)$ всякого движения либо пересекает кривую $V = k_1^2$, либо наматывается на эту кривую, как спираль (так как $V(t)$ убывает).

Предположим, движение $M(t)$ наматывается на кривую $V = k_1^2$, как спираль. Система (1) имеет угловой коэффициент траекторий
$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx + cy}{f(x) + ay} \tag{11}$$

Из уравнения (10) найдем угловой коэффициент касательной к кривой (9):

$$a\frac{dy}{dx} = c \pm \frac{cf(x) - abx}{\sqrt{k_1^2 - F(x)}} \tag{12}$$

Пусть $k_1^2 = F(x_1)$. В точке $(x = x_1 > 0,\ y = cx_1 / a)$ кривая (10) замыкается. В этой точке касательная к кривой параллельна оси y.

Предположим, в момент $t = t_2$ точка $M(t)$ движения попадает на прямую $ay = cx$ в точке $(x = x_2 > 0,\ y = cx_2 / a)$. Найдем в этой точке скорость изменения абсциссы движения $M(t)$.

Из уравнений (1) согласно условию (2) имеем в точке $x = x_2,\ y = cx_2 / a$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + ay|_2 = f(x_2) + cx_2 < 0 \tag{13}$$

Отсюда видим, что в точках прямой $ay = cx$ справа от оси y функция $x(t)$ убывает, т. е. $x(t) < x_2$ при $t_2 < t$.

Пусть $(x_2,\ y = cx_2 / a)$ — некоторая точка прямой $ay = cx$. Из уравнения (11) имеем значения y интегральной кривой, проходящей через точку $(x_2,\ y = ex_2 / a)$ в момент $t = t_2$:

$$y_2 = \frac{c}{a}x_2 + \int\limits_{x_2}^{x} \frac{bx + cy_2}{f(x) + ay_2}\,dx \tag{14}$$

Значения y для кривой $V(x, y) = k_1^2$ находим из уравнения (10) на основании (8) и $k_1^2 = F(x_1)$ в виде

$$y = \frac{c}{a}x \pm \frac{\sqrt{2}}{a}\left(\int\limits_{x}^{x_1} [cf(x) - abx]\,dx\right)^{1/2} \tag{15}$$

Так как предположено, что движение $M(t)$ наматывается на кривую $V = k_1^2$, как спираль, то найдется x_2, как угодно мало отличное от x_1, такое, что через точку прямой $ay = xc$ при $x = x_2$ будет проходить рассматриваемое нами движение.

Покажем, что при x_2, достаточно близких к x_1, рассматриваемая интегральная кривая (14) пересекает кривую $V = k_1^2$, данную уравнением (15).

С этой целью покажем, что при x_2, достаточно близких к x_1, значение y_2 будет меньше большего значения y кривой $V = k_1^2$ (т. е. меньше ординаты верхней ветви) и больше меньшего значения y, данных формулой (15).

Составим разность $y_2 - y$. Имеем

$$J = y_2 - y = \frac{c}{a}(x_2 - x) + \int\limits_{x_2}^{x} \frac{bx + cy_2}{f(x) + ay_2}\,dx \mp$$

$$\mp \frac{\sqrt{2}}{a}\left(\int\limits_{x}^{x_1}[cf(x) - abx]\,dx\right)^{1/2} = \frac{c}{a}(x_1 - x) + \int\limits_{x_1}^{x} \frac{bx + cy_1}{f(x) + ay_1}\,dx \mp$$

$$\mp \frac{\sqrt{2}}{a}\left(\int\limits_{x}^{x_1} [cf(x) - abx]\,dx\right)^{1/2} + \frac{c}{a}(x_2 - x_1) + \int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{bx + cy_2}{f(x) + ay_2}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x}\left[\frac{bx + cy_2}{f(x) + ay_2} - \frac{bx + cy_1}{f(x) + ay_1}\right]dx$$

Подставляя сюда

$$x_1 - x = \int\limits_{x}^{x_1} dx, \qquad x_2 - x_1 = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx$$

и объединяя первое и второе, а также четвертое и пятое слагаемые, имеем

$$J = \int_x^{x_1} \frac{cf(x) - abx}{a[f(x) + ay_1]} dx \mp \frac{\sqrt{2}}{a}\left(\int_x^{x_1} [cf(x) - abx]\, dx\right)^{1/2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} \frac{cf(x) - abx}{a[f(x) + ay_2]} dx + \int_{x_1}^{x} \frac{(y_2 - y_1)(cf(x) - abx]}{[f(x) + ay_1][f(x) + ay_2]} dx \tag{17}$$

Так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывные[1], то, вводя обозначение

$$cf(x) - abx = \varphi(x), \qquad f(x) + ay_k(x) = \psi_k(x) \qquad (k = 1,2)$$

и пользуясь теоремой о среднем значении, это равенство (17) представим в виде

$$J = \frac{\varphi(\xi_1)(x_1 - x)}{a\psi_1(\xi_1)} \mp \frac{\sqrt{2}}{a}\sqrt{\varphi(\xi_2)}\sqrt{x_1 - x} + \\ + \frac{\varphi(\xi_3)(x_2 - x_1)}{a\psi_2(\xi_3)} + \frac{[y_2(\xi_4) - y_1(\xi_4)]\varphi(\xi_4)(x - x_1)}{\psi_1(\xi_4)\psi_2(\xi_4)} \tag{18}$$

где

$$x < \xi_1 < x_1, \qquad x < \xi_2 < x_1, \qquad x_1 < \xi_3 < x_2, \qquad x < \xi_4 < x_1$$

Заметим теперь следующее. Кривая $y_2 = y_2(x)$ начинается в точке прямой $ay = cx$ и, оставаясь внутри кривой

$$V = \int_0^{x_2} 2\varphi(x)\, dx$$

обладает свойством

$$cx - \sqrt{2}\left(\int_x^{x_2} \varphi(x)\, dx\right)^{1/2} < ay_2(x) < cx + \sqrt{2}\left(\int_x^{x_2} \varphi(x)\, dx\right)^{1/2} \tag{19}$$

Также получаем

$$cx - \sqrt{2}\left(\int_x^{x_1} \varphi(x)\, dx\right)^{1/2} < ay_1(x) < cx + \sqrt{2}\left(\int_x^{x_1} \varphi(x)\, dx\right)^{1/2} \tag{20}$$

Поэтому

$$y_1(x) \to \frac{cx_1}{a}, \qquad y_2(x) \to \frac{cx_1}{a} \qquad \text{при } x \to x_1 \text{ и } x_2 \to x_1$$

Отсюда согласно условиям (2) и (3) следует, что

$$\psi_1(x) \to f(x_1) + cx_1 < 0 \qquad \text{при } x \to x_1,$$

$$\psi_2(x) \to f(x_1) + cx_1 < 0 \qquad \text{при } x \to x_1 \text{ и } x_2 \to x_1$$

$$\varphi(x) \to cf(x_1) - abx_1 > 0 \qquad \text{при } x \to x_1 > 0$$

Далее

$$\xi_1 \to x_1, \quad \xi_2 \to x_1, \quad \xi_3 \to x_1 \quad \xi_4 \to x_1 \qquad \text{при } x \to x_1 \text{ и } x_2 \to x_1$$

Но тогда ясно, что третье и четвертое слагаемые в равенстве (18) суть малые более высокого порядка, чем $x_1 - x$, при соответствующем выборе величины x_2, достаточно близком к x_1.

Следовательно, знак величины J при таком выборе x_2 будет определяться первыми двумя слагаемыми при малых $x_1 - x$. Но так как $a > 0$, $\psi_1(x_1) = f(x_1) + cx_1 < 0$

[1] Функция $y_1(x)$ соответствует интегральной кривой, проходящей через точку $(x_1, cx_1/a)$.

и $\varphi(x_1) = cf(x_1) - abx_1 > 0$, то знак величины J при x и x_2, соответственно выбранных вблизи x_1, будет, очевидно, определяться вторым слагаемым

$$\mp \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{\varphi(\xi_2)} \sqrt{x_1 - x}$$

т. е. когда здесь берем знак минус, то $J < 0$, и если знак плюс, то будет $J > 0$.

Таким образом, доказано, что рассматриваемое движение при x_2, близких к x_1, пересекает кривую $V(x, y) = k_1^2$. Следовательно, рассматриваемое движение не может асимптотически приближаться к замкнутой кривой $V(x, y) = k_1^2$ и неизбежно асимптотически приближается к точке равновесия.

В проведенном нами доказательстве асимптотической устойчивости невозмущенного движения для функции $f(x)$ требовались только непрерывность и выполнение условий (2), (3).

При этом, конечно, предполагалось, что рассматриваемое движение продолжимо при $t \to \infty$. Однако, как показано ранее [4,5], непродолжимых движений в данном случае быть не может. Но, как отмечено в работе[6], точка $M(t)$ может войти в точку покоя в конечный промежуток времени, если не потребовать выполнения условий единственности в точке равновесия (и только в ней, а не во всей плоскости) [1].

Чтобы исключить случай вхождения точки движения в конечный промежуток времени в точку покоя, достаточно, например, потребовать, чтобы в как угодно малой окрестности точки $x = 0$ функция $f(x)$ удовлетворяла условию $|f(x)| < M|x|$, где M — постоянная.

Действительно, тогда из системы (1) имеем

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = 2xf(x) + 2axy + 2bxy + 2cy^2$$

На основании условия для $f(x)$ получим

$$\left| \frac{d(x^2 + y^2)}{dt} \right| \leqslant A(x^2 + y^2) \qquad (A = \text{const} > 0)$$

Полагая $r^2 = x^2 + y^2$, получим

$$\left| \frac{dr}{r} \right| \leqslant \frac{A}{2} dt$$

Отсюда

$$-\int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r} \leqslant A(t - t_1) \qquad \text{если } r < r_1$$

Отсюда при $r \to 0$ будет $t \to \infty$.

Будем теперь предполагать функцию $f(x)$ в уравнениях (1) такой, что интеграл (8) сходится при $x \to \infty$, т. е. будем считать, что

$$F(x) = 2\int_0^x [cf(x) - abx]\, dx \to D > 0 \qquad \text{при } x \to \pm\infty \tag{21}$$

Из представления кривых (9) в форме (10)

$$ay = cx \pm \sqrt{k^2 - F(x)} \tag{22}$$

---

[1] Попутно заметим, что указание И. Г. Малкина на то, что М. А. Айзерман предполагал единственность в формулировке условий теоремы, повидимому, основано на недоразумении, как это видно из заметки М. А. Айзермана[2], а также из нашей работы[6], где эта формулировка воспроизведена с несколько уточненными условиями (формула (0.5), стр. 400).

видно, что эти кривые будут замкнутыми при всяком $k^2 < D$, так как в этом случае согласно (21) всегда найдутся такое $x = x_1 > 0$ и такое $x = x_2 < 0$, при которых верхняя и нижняя ветви соединяются в точке ($x = x_1$, $y = cx_1 / a$) на прямой

$$ay = cx \tag{23}$$

и в точке ($x = x_2 < 0$, $y = cx_2 / a$) на той же прямой.

Но при $k^2 \geqslant D$ и верхняя и нижняя ветви кривой (22) *удаляются в бесконечность*[1] и вправо и влево при $x \to \infty$, прибижаясь к прямой (23). Верхняя ветвь кривой (22) расположена выше прямой (23) и нижняя ниже прямой (23). Семейство замкнутых кривых, соответствующих $k^2 < D$, расположено внутри кривой, уходящей в бесконечность вдоль прямой (23) и соответствующей $k^2 = D$.

Может, конечно, случиться, что при $x \to \infty$ имеем конечный предел $F(x)$, но при $x \to -\infty$ будет $F(x) \to \infty$. Тогда слева от оси y кривые $v = k^2$ замыкаются при всяком k, а справа замыкаются только при $k^2 < D$. Так как $dV / dt \leqslant 0$ согласно (6), то снова для рассматриваемого движения функция $V(x, y)$ убывает. Но при этом имеются две возможности. Или движение попадает в точку какой-нибудь из кривых (22), соответствующих $k^2 < D$, и тогда оно асимптотически приближается к точке покоя $x = 0$, $y = 0$, или это движение уходит в бесконечность при $t \to \infty$, так что $x \to \infty$, при этом $dv / dt \to 0$. Тогда[2]

$$V(t) \to k_2{}^2 \geqslant D > 0, \qquad k_2{}^2 < k_1{}^2$$

Точка этого движения остается, например, выше кривой $V(x, y) = D$, поэтому она не пересекает прямую $ay = cx$. Так как $a > 0$, то эта прямая проходит через первую и третью четверти, если $c > 0$, и через вторую и четвертую четверти при $c < 0$. Таким образом, полярный угол рассматриваемого движения остается ограниченным.

По теореме (10.1) работы [6], если для системы (1) $c^2 + ab \neq 0$, то для точки $M(t)$ всякого движения, определяемого уравнениями (1), имеет место один из двух случаев:

(а) точка $M(t)$ входит в точку равновесия (0, 0) при $t \to \infty$,

(б) полярный угол φ точки $M(t)$ неограниченно возрастает.

Так как случай (б) для рассматриваемого движения исключен, то это движение обладает свойством $M(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Заметим, однако, что, доказывая теорему (10.1), мы сначала имели в сущности такой результат. Если в системе (1) $c^2 + ab \neq 0$, то для точки $M(t)$ всякого движения, определяемого уравнениями (1), имеет место один из двух случаев:

(а) точка $M(t)$ остается в области, ограниченной дугой окружности с центром в начале координат, а также прямой и кривой, входящими в начало координат;

(б) полярный угол φ точки $M(t)$ неограниченно возрастает.

При доказательстве этого утверждения мы пользовались только непрерывностью функции $f(x)$ и условиями (2), (3). Далее в случае (а) мы без дополнительных рассуждений заключали, что так как, кроме точки (0, 0), нет точек равновесия, то $M(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

При этом мы имели в виду теорему Бенедиксона, которая требует выполнения условий теоремы единственности решений на всей плоскости (x, y).

Но из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы (10.1), легко получается утверждение о том, что $M(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и в том случае, когда $f(x)$ предполагается только непрерывной.

---

[1] Заметим, что если $F(x) \to D > 0$ при $x \to \infty$, но функция $\varphi(x) = cf(x) - abx > 0$ не ограничена при $x > 0$, то иногда и факт асимптотической устойчивости и роль параметров системы (1) в затухании процесса, а также в качественной картине легко исследуется. Но чем быстрее $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$, тем труднее выясняются подробная качественная картина и роль параметров (см.[6], § 19—27).

[2] Как и ранее, пусть движение начинается на кривой $V(x, y) = k_1{}^2$.

Можно это доказать и следующим образом. Рассматриваемое движение согласно теореме (10.1) остается в ограниченной части плоскости; если при этом $x(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$, то в силу непрерывности функции $f(x)$ и условий (2), (3) из (6) имеем

$$\frac{dV}{dt} < -\delta \qquad \text{при } t > t_0, \quad \sigma = \text{const} > 0$$

А тогда мы имеем

$$V(t) - V(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt < -\delta (t - t_0)$$

Но так как $V(t) > 0$ при $t > t_0$, то будем иметь противоречие при достаточно больших t. Следовательно, предположение, что $x(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$, неправильное. Таким образом, для рассматриваемого движения имеем

$$V(t) \to k_2{}^2 \geqslant D > 0, \qquad x(t) \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty$$

Отсюда следует на основании (7), что

$$y(t) \to \pm \frac{k_2}{a} \neq 0$$

Следовательно, точка $M(t)$ в рассматриваемом движении стремится или к точке $(0,\ k_2 / a)$, или к точке $(0,\ -k_2 / a)$. Тогда из первого уравнения системы (1) имеем

$$x - x_1 = \int_{t_1}^{t} [f(x) + ay]\, dt$$

где пусть x_1 взято вблизи нуля. Так как x_1 взято вблизи нуля и x также находится вблизи нуля и $ay \to k_2 \neq 0$ при $t \to \infty$, то в силу непрерывности функции $f(x)$ и условия $f(0) = 0$ можно считать, что

$$f(x) + ay > \frac{1}{2} k_2 > 0 \qquad \text{при} \quad t > t_1$$

Но тогда имеем

$$x - x_1 > \frac{1}{2} k_2 (t - t_1) \to \infty \qquad \text{при} \quad t \to \infty$$

а это противоречит тому, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Противоречие получено вследствие неправильного предположения о том, что $V(t) \to k_2{}^2 \geqslant D > 0$. Поэтому надлежит заключить, что $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда следует, что $x(t) \to 0$ и $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Этот результат снова получен, причем единственность решения в условия теоремы не входит.

Как и прежде, чтобы исключить случай вхождения точки $M(t)$ в точку равновесия (0, 0) в конечный промежуток времени, необходимо предположить лишь выполнение условий единственности решений в точке (0, 0), например, предполагая, что в окрестности точки $x = 0$ имеем $|f(x)| \leqslant M|x|$, где M — постоянная.

Предполагая функцию $f(x)$ только непрерывной, мы имеем и отсутствие решений системы (1), не продолжимых при $t > t_0$, где t_0 — конечное, и свойство асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0$, $y = 0$.

В случае $c^2 + ab = 0$ мы, как показано выше, всегда имеем область ассимптотической устойчивости, определенную неравенством

$$2\int_0^x [cf(x) - abx]dx + (ay - cx)^2 < D$$

где

$$D = \lim_{x \to \infty} 2\int_0^x [cf(x) - abx]dx$$

и если $D = \infty$, а область асимптотической устойчивости есть вся плоскость.

Теорема (28.1) в нашей работе [6] неверна (как показал Н. Н. Красовский [8]), но верно, в силу рассуждений, относящихся к теореме (28.1), что имеется область асимптотической устойчивости

$$x^2 + (ay - cx)^2 \leqslant r = \min \left\{ -\max_{x<0} \varphi(x), \max_{x>0} \varphi(x) \right\}$$

где

$$\varphi(x) = cf(x) - abx$$

Следовательно, если $-\max\limits_{x<0} \varphi(x) = \max\limits_{x>0} \varphi(x) = \infty$,

то область асимптотической устойчивости есть вся плоскость, хотя при этом может оказаться $D < \infty$.

И. Г. Малкин рассмотрел и систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = ax + f(y), \qquad \frac{dy}{dt} = bx + cy$$

при условии

$$a + c < 0, \qquad y[acy - bf(y)] > 0$$

При этом составлялась функция

$$2V = 2\int_0^y (acy - bf(y)\,dy + (bx - ay)^2$$

для которой имеем

$$\frac{dV}{dt} = (a + c)(acy - bf(y))\,y < 0$$

К этому, однако, полезно добавить предыдущие рассуждения и воспользоваться теоремой (1), приведенной в работе [5].

Отметим в заключение, что метод функции Ляпунова, рассмотренный здесь, не позволяет дать весьма многообразную качественную картину исследуемой системы дифференциальных уравнений и выяснить роль параметров этой системы при рассмотрении вопросов быстроты затухания процесса. На этой основе нельзя установить и тот факт, что в случае существования изолированных областей вокруг начала координат все множество решений в случае голоморфной функции $f(x)$ доставляется неголоморфными рядами Пуанкаре и граница этих зон соответствует единственному голоморфному в окрестности точки (0, 0) решению уравнения (11). (В случае неголоморфной функции $f(x)$ неясен аналитический характер решения, представляющего границы этих изолированных секторов.)

Поступила 19 III 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 3.
2. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. Успехи математических наук. 1949. Т. IV. Вып. 4.
3. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уранениями. Успехи математических наук. 1941. Вып. 9.
4. Еругин Н. П. О продолжении решений дифференциальных уравнений. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 1.
5. Еругин. Н. П. Теоремы о неустойчивости. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 3.
6. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.
7. Еругин Н. П. Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 6.
8. Красовский Н. Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 5.