Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ИНВАРИАНТОВ НАПРЯЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В. В. Новожилов

(Ленинград)

В теории пластичности используются следующие три независимых инварианта тензора напряжения [1]:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\tau_i = k\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \qquad (0.1$$

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \qquad \left(-\frac{1}{6}\pi \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{6}\pi\right)$$

Физический смысл первого из них вполне ясен и точно соответствует его наименованию: среднее нормальное напряжение.

Что касается инварианта τ_i, называемого обычно интенсивностью касательных напряжений, то для него было предложено несколько физических истолкований, которые, однако, как мне кажется, не раскрывают в полной мере его сущности. Так, например, истолкование τ_i как касательного напряжения на октаэдрических площадках (М. Рош и А. Эйхингер [2]) по существу ничего не дает, поскольку нельзя удовлетворительно ответить на вопрос, почему при формулировке законов теории пластичности должно быть отдано предпочтение именно октаэдрическим, а не каким-либо другим площадкам. Неудовлетворительной представляется и трактовка τ_i^2 как параметра, пропорционального энергии деформации сдвигов, вычисленной в предположении, что материал изотропен и следует закону Гука (Г. Генки [3]). В самом деле, при такой интерпретации τ_i оказывается не характеристикой напряженного состояния, а более сложной характеристикой, зависящей также и от свойств рассматриваемой среды, причем сразу возникает вопрос, каков же будет механический смысл τ_i, если среда анизотропна и не следует закону Гука?

В связи со сказанным представляет интерес найти такое физическое истолкование τ_i, которое было бы свободно от указанных недостатков. Желательно, кроме того, дать наглядное истолкование и третьему инварианту — параметру $\xi(\mu)$.

Ниже доказывается, что параметр τ_i (при некоторой определенной величине постоянного множителя k) равен среднему значению касательного напряжения в рассматриваемой точке тела. Кроме того, доказывается, что задание параметра ξ равносильно заданию отношения среднего и максимального значений касательного напряжения.

§ 1. О среднем значении касательного напряжения. К понятию среднего касательного напряжения в некоторой точке тела можно подойти следующим образом. Выделим вокруг рассматриваемой точки бесконечно малый объем. На элементарной площадке $d\Omega$ поверхности, ограничивающей данный объем, будет действовать касательное напряжение τ, причем, как известно:

$$\tau^2 = \sigma_1^2 l_1^2 + \sigma_2^2 l_2^2 + \sigma_3^2 l_3^2 - (\sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2)^2 \qquad (1.1)$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения, а l_1, l_2, l_3 — направляющие косинусы, определяющие ориентацию нормали к площадке $d\Omega$ по отношению к триэдру главных направлений тензора напряжения.

Определим среднее касательное напряжение как предел выражения

$$\tau_i = \left(\frac{1}{\Omega}\int \tau^2 d\Omega\right)^{1/2} \tag{1.2}$$

при Ω, стремящемся к нулю. Здесь Ω — площадь поверхности, ограничивающей объемный элемент. Интегрирование распространено по всей этой поверхности.

Заметим, что указанный выше предел будет зависеть как от формы выделенного элемента, так и от его ориентации по отношению к главным осям тензора напряжения. В самом деле, если взять, например, элементарный объем в форме прямоугольного параллелепипеда, то результат формулы (1.2) будет меняться с изменением направления ребер этого параллелепипеда.

В частности, если последние совместить с главными направлениями, то получим $\tau_i = 0$. Таким образом, прямоугольный параллелепипед является не подходящей для нас формой элементарного объема.

Причиною этому является то, что боковая поверхность параллелепипеда представляет только шесть из всего бесчисленного множества элементарных площадок, которые могут быть проведены через рассматриваемую точку тела. Не подходящей будет и любая другая форма объемного элемента, кроме сферы, поскольку только на сфере (ввиду ее полной симметрии) будут в равной мере представлены все без исключения направления площадок.

Совмещая центр сферы с рассматриваемой точкой тела и используя сферические координаты, будем иметь

$$\begin{gathered} l_1 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad l_2 = \sin\theta\cos\varphi \qquad l_3 = \cos\theta \\ d\Omega = r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta, \qquad \Omega = 4\pi r^2 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \tau_i^2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \{&\sigma_1^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \sigma_2^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sigma_3^2\cos^2\theta - \\ &-(\sigma_1\sin^2\theta\sin^2\varphi + \sigma_2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sigma_3\cos^2\theta)^2\}\sin\theta\, d\theta \end{aligned} \tag{1.4}$$

Выполнив в (1.4) интегрирование, находим

$$\tau_i^2 = \frac{1}{15}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \tag{1.5}$$

Таким образом,

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{15}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2} \tag{1.6}$$

Из изложенного выше следует, что между инвариантами σ и τ_i существует аналогия, выражающаяся в том, что если первый инвариант является средним нормальным напряжением в рассматриваемой точке тела, то второй (при указанном выше значении $k = 1/\sqrt{15}$) является средним касательным напряжением в этой же точке.

Кроме того, доказанное выше позволяет следующим образом истолковать различие между критериями текучести Сен-Венана и Мизеса: первый критерий утверждает, что состояние текучести наступает, когда максимальное касательное напряжение достигает некоторого предельного значения, а второй утверждает, что это состояние наступает, когда достигает некоторого предельного значения среднее касательное напряжение.

§ 2. **Соотношение между τ_i и τ_{max}.** Чтобы получить представление о взаимосвязи между τ_i и максимальным касательным напряжением

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{2.1}$$

воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\left(\xi + \frac{2}{3}\pi\right) + \sigma \\ \sigma_2 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\xi \qquad\qquad + \sigma \\ \sigma_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{s_2}\sin\left(\xi + \frac{4}{3}\pi\right) + \sigma \end{aligned} \tag{2.2}$$

в которых, кроме обозначений, введенных ранее,

$$s_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \frac{5}{2}\tau_i^2 \tag{2.3}$$

В первых двух формулах (2.2) в отличие от работы [4] переставлены индексы при σ с тем, чтобы имели место обычные неравенства $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. На основании (2.2)

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{s_2}\cos\xi = \sqrt{\frac{5}{2}}\,\tau_i\cos\xi \tag{2.4}$$

Отсюда

$$\frac{\tau_i}{\tau_{max}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\,\frac{1}{\cos\xi} \approx \frac{0.633}{\cos\xi} \tag{2.5}$$

Таким образом, задание угла ξ (угла вида напряженного состояния [5]) эквивалентно заданию отношения максимального и среднего касательных напряжений в рассматриваемой точке тела.

Так как согласно (0.1)

$$1 \geqslant \cos\xi \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$

то из (2.5) следуют неравенства

$$0.731 \geqslant \frac{\tau_i}{\tau_{max}} \geqslant 0.633. \tag{2.6}$$

из которых вытекает, что изменение τ_i / τ_{max} ограничено относительно узкими пределами. Именно поэтому между критериями текучести Сен-Венана и Мизеса нет значительной разницы. Как видно из (2.6), среднее значение касательного напряжения всегда ближе к τ_{max}, чем к $\tau_{min} = 0$. Любопытно, кроме того, отметить, что τ_i / τ_{max} больше в случае одноосного растяжения (или сжатия), чем в случае чистого сдвига.

Поступила 17 IV 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.
2. Poš M. u. Eichinger A. Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr. Verhandl. d. II inter. Kongr. f. techn. Mech. Zürich. 1926.
3. Hencky H. Zur Theorie der plastischen Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. Z. a. M. M. Bd. 4. H. 4. 1924.
4. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругих телах. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
5. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическим деформациям. Машгиз. 1949.