Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

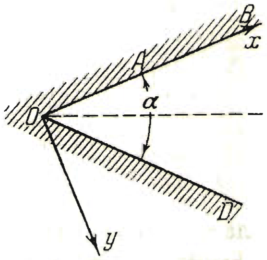
ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ ДЛЯ ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ДИФФУЗОРЕ

В. П. Шестопалов

(Харьков)

§ 1. Рассмотрим задачу о плоском ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя плоскими стенками OAB и OGD, расположенными (фиг. 1) под углом α. Пусть одна из стенок нагревается, например стенка OAB. Необходимо определить распределение температур в области пограничного слоя, когда жидкость образует сходящееся течение в диффузоре. Задачу решаем на основании обычной теории Прандтля, т. е. будем исследовать случай, когда поле скоростей определяется известными уравнениями пограничного слоя

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\qquad \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{1,1}$$



Фиг. 1

а уравнение температурного пограничного слоя будет:

$$v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\nu}{C_p}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 \tag{1.2}$$

где v_x и v_y — проекции скорости на оси x и y (оси выбираются согласно фиг. 1), ρ — плотность жидкости, p — нормальное давление, ν — кинематическая вязкость жидкости, T — температура, χ — коэффициент температуропроводности, C_p — теплоемкость при постоянном давлении. Как видно из (1.2), теплом, которое получается от рассеяния, мы не пренебрегаем.

Определение поля температур в пограничном слое сведется к решению системы дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) при определенных граничных условиях.

Для пограничного слоя скоростей (1.1) в случае сходящегося течения задача решена полностью[1]. При этом получены следующие равенства:

$$v_x=\frac{Q}{\alpha x}u(\xi)=V(x)\,u(\xi),\qquad v_y=\xi\frac{Q}{\alpha x}u(\xi)=\xi V(x)\,u(\xi)\qquad \left(V(x)=\frac{Q}{x\alpha}\right) \tag{1.3}$$

где $V(x)$ — скорость течения вне пограничного слоя, Q — обильность источника (величина для сходящегося течения в диффузоре всегда отрицательна). Для функции $u(\xi)$ получено такое равенство:

$$u(\xi)=3\,\mathrm{th}^2\left\{\ln\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\xi\sqrt{\frac{R}{2\alpha}}\right\}-2\qquad \left(\xi=\frac{y}{x},\ R=-\frac{Q}{\alpha},\ Q<0\right) \tag{1.4}$$

Функция $u(\xi)$ при $0\leqslant u\leqslant 1$ удовлетворяет уравнениям [1]

$$u''=\frac{Q}{\nu\alpha}(1-u^2),\qquad u'^2=-\frac{2}{3}\frac{Q}{\nu\alpha}(u-1)^2(u+2) \tag{1.5}$$

Здесь штрихи обозначают производные по ξ.

Введем новые переменные x и $\xi = y/x$ и новую функцию $\theta(\xi)$ по формуле

$$T = \frac{1}{x^2}\theta(\xi) + T_1 \tag{1.6}$$

где T_1 — температура T при $x \to \infty$. Тогда (1.2) при помощи (1.6) и найденных соответствующим образом производных

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{2}{x^3}\theta - \frac{y}{x^4}\theta', \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{x^3}\theta', \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{x^4}\theta'', \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{Q}{\alpha x^2}u' \tag{1,7}$$

прибретает следующий вид:

$$\theta'' + \frac{2Q}{\alpha\chi}u\theta + \frac{\nu}{C_p}\frac{Q^2}{\alpha^2\chi}u'^2 = 0 \tag{1.8}$$

Здесь штрихи обозначают производные по ξ. Предположим, что

$$\theta(\xi) = Y\{u(\xi)\} \tag{1.9}$$

Подставляя θ и $\theta'' = Y_{uu}'' u_\xi'^2 + Y_u' u_{\xi\xi}''$ в (1.8) и используя (1.5), получаем

$$Y'' + \frac{3}{2}Y'\frac{u+1}{(u-1)(u+2)} - 3aY\frac{u}{(u-1)^2(u+2)} + b = 0 \quad \left(a = \frac{\nu}{\chi},\ b = \frac{\nu}{C_p}\frac{Q^2}{\alpha^2\chi}\right) \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) представляет собой уравнение класса Фукса; при помощи подстановки $t = -{}^1/_3(u-1)$ оно приводится к виду уравнения Гаусса

$$Y'' + Y'\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1}\right) + aY\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - \frac{2}{t-1}\right) + 9b = 0 \tag{1.11}$$

(штрихи обозначают производные по t), его особыми точками (1.11) являются точки $t=0$, $t=1$ и $t=\infty$. Уравнение (1.11) приводится к гипергеометрическому уравнению. Корни определяющих уравнений имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{a}, & \beta_1 &= 0, & \gamma_1 &= \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+48a}\right) \\ \alpha_2 &= -\sqrt{a}, & \beta_2 &= \tfrac{1}{2}, & \gamma_2 &= \tfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{1+48a}\right) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Подстановка

$$Y(t) = t^{\sqrt{a}}v(t) \tag{1.13}$$

приводит уравнение (1.11) к гипергеометрическому виду

$$v'' + \frac{-2(2\sqrt{a}+1) + (1+2\sqrt{a}+{}^1/_2)t}{t(t-1)}v' + \frac{-2a+{}^1/_2\sqrt{a}}{t(t-1)}v + 9bt^{-\sqrt{a}} = 0 \tag{1.14}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде гипергеометрического ряда $F(\alpha, \beta, \gamma; t)$, причем

$$\alpha = \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+48a}\right) + \sqrt{a},\ \beta = \tfrac{1}{4}\left(1-\sqrt{1+48a}\right) + \sqrt{a},\ \gamma = 2\sqrt{a}+1 \tag{1.15}$$

Используя (1.15), запишем однородное уравнение, соответствующее (1.14), в следующем виде:

$$v'' + \frac{-\gamma + (1+\alpha+\beta)t}{t(t-1)}v' + \frac{\alpha\beta}{t(t-1)}v = 0 \tag{1.16}$$

Так как $t = -{}^1/_3(u-1)$ и $0 \leqslant u \leqslant 1$, то $0 \leqslant t \leqslant {}^1/_3$, т. е. решение уравнения (1.16) нужно рассматривать в окрестности $t=0$.

Частными решениями урания (1.16) будут следующие функции:

$$v_1 = F(\alpha, \beta; \gamma; t), \qquad v_2 = t^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma; t) \tag{1.17}$$

Составляя общее решение $v = C_1 v_1 + C_2 v_2$ и пользуясь методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$C_1(t) = 9b \int^{t} t^{1-\sqrt{a}} (1-t)^{-1/2} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; t)\, dt + A_1$$

$$C_2(t) = -9b \int^{t} t^{1+\sqrt{a}} (1-t)^{-1/2} F(\alpha, \beta, \gamma; t)\, dt + A_2 \qquad (1.18)$$

Таким образом, общее решение (1.14) будет

$$v(t) = \left\{9b \int_{1/3}^{t} t^{1-\sqrt{a}} (1-t)^{-1/2} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; t)\, dt\right\} F(\alpha, \beta, \gamma; t) -$$

$$- \left\{9b \int_{1/3}^{t} t^{1+\sqrt{a}} (1-t)^{-1/2} F(\alpha, \beta, \gamma; t)\, dt\right\} t^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; t) +$$

$$+ A_1 F(\alpha, \beta, \gamma; t) + A_2 t^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; t) \qquad (1.19)$$

Для определения произвольных постоянных A_1 и A_2 используем граничные условия. В качестве граничных условий принимаем

$$u = 0, \qquad \theta = T_0, \qquad T = \frac{T_0}{x^2} + T_1 \qquad \text{при } \xi = 0 \qquad (1.20)$$

$$u = 1, \qquad \theta = 0, \qquad T = T_1 \qquad \text{при } \xi = \infty \qquad (1.21)$$

$$v\left(\tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-\sqrt{a}} T_0, \quad v(t)\Big|_{t=0} \sim A t^{-\sqrt{a}+\varepsilon} \qquad (1.22)$$

где $\varepsilon > 0$ и как угодно мало. Первое условие (1.22) приводит к равенству

$$A_1 F\left(\alpha, \beta, \gamma; \tfrac{1}{3}\right) + A_2 3^{\gamma-1} F\left(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma; \tfrac{1}{3}\right) = 3^{\sqrt{a}} T_0 \qquad (1.23)$$

Воспользуемся вторым условием (1.22); оценивая члены выражения (1.19), легко установить, что они в той последовательности, как записаны, имеют соответствующий порядок:

$$t^{2-\sqrt{a}}, \qquad t^{2-\sqrt{a}}, \qquad 1, \qquad t^{-2\sqrt{a}}. \qquad (1.24)$$

Следовательно, $A_2 = 0$. Тогда из (1.23) легко определяется A_1 и решение (1.19) записывается в следующем виде:

$$v(t) = F(\alpha, \beta, \gamma; t) \left\{9b \int_{1/3}^{t} t^{1-\sqrt{a}} (1-t)^{-1/2} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; t)\, dt +\right.$$

$$\left. + \frac{3^{\sqrt{a}} T_0}{F(\alpha, \beta, \gamma; 1/3)}\right\} - 9b t^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; t) \times$$

$$\times \int_{1/3}^{t} t^{1+\sqrt{a}} (1-t)^{-1/2} F(\alpha, \beta, \gamma; t)\, dt$$

где α, β, γ определяются по (1.15).

Для определения $T(x, y)$ необходимо последовательно подставить в (1.6) все величины на основании формул (1.25), (1.13) и (1.9).

§ 2. Произведем некоторые расчеты, связанные с определением температуры в пограничном слое при течении жидкости в диффузоре.

Функция $\theta(\xi)$ определяется через $v(t)$ следующим образом:

$$\theta(\xi) = Y(u) = t^{\sqrt{a}}\, v(t) \qquad \left(t = -\tfrac{1}{3}(u-1),\ a = \frac{\nu}{\chi}\right) \tag{2.1}$$

где u определяется по формуле (1.4) величина a — согласно (1.10). Подставляя вместо u его значение по (1.4) в выражение для t, получаем

$$t = -\frac{1}{3}(u-1) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\{\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \xi\sqrt{R/2\alpha}\}} \tag{2.2}$$

где R определяется по (1.4). Теперь, если требуется производить расчет профиля температур $T(x, y)$, то необходимо для нахождения изменения t при определении $v(t)$ знать увеличение ξ, а через посредство ξ согласно (2.2) находить величину t. Все гипергеометрические ряды в выражении (1.24) сходятся.

Для удобства вычислений приведем для $F(\alpha, \beta, \gamma; t)$ известные формулы:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_n \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{t^n}{n!}, \quad F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} F(\alpha, \beta, \gamma;\ t) = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)} F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n; t)$$

Рассмотрим один случай. Пусть втекающая в диффузор жидкость — воздух:

$$\gamma = 21.6, \quad \alpha = 28.3, \quad \beta = -7.4, \quad a \approx 0.8, \quad C_p \approx 1, \quad \nu = 0.15\,\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}, \quad \chi = 0.2$$

Оценим величину остаточного члена в выражениях гипергеометрических рядов. Известно, что остаточный член выражается при помощи следующей формулы:

$$R_n(C, t) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}\, t_n \qquad \left(0 \leqslant C \leqslant \tfrac{1}{3}\right)$$

Для нашего случая

$$F^{(n)}(\alpha, \beta, \gamma; t) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n; t)$$

Определим остаточный член при $n = 6$, $C = 0$ и $C = 1$. Получаем

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+5)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+5)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+5)} < 7!4$$

Таким образом, имеем

$$R_5\left(0, \tfrac{1}{3}\right) < \tfrac{4!7}{6!}\,\tfrac{1}{3^6} = 0.038$$

Кроме того, можно указать, что $F^{(6)}(\alpha, \beta, \gamma; 1) \approx 7!4$. Для остаточного члена R_5 получаем $R_5(^1/_3) \approx 0.034$. Расчет также показал, что

$$R_5\left\{\binom{1}{0}, \tfrac{1}{6}\right\} \approx 0.0005$$

Для $F(\alpha, \beta, \gamma; t)$ в нашем случае получаем значение: $F(\alpha, \beta, \gamma; t) \approx 10^{-5}0.84$

Таким образом, из этих оценок видно, что полученное решение (1.25) для $v(t)$ хорошо сходится, так как пределы изменения t лежат между 0 и $^1/_3$.

В заключение приношу благодарность В. Л. Герману за предложенную тему и советы при ее выполнении.

Поступила 9 IV 1952

Харьковский государственный педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. II. § 33. Гостехиздат. 1948.