Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

П. П. Куфарев

(Томск)

В работе рассматривается задача о струйном обтекании дуги окружности бесконечным потоком несжимаемой жидкости. Задача эта была решена А. И. Некрасовым еще в 1922 г. [1]. Способ решения, предлагаемый здесь, насколько мне известно, не указывался. Недостатком его является то, что существование решения интегрального уравнения, к которому сводится задача, доказывается только для случая, когда некоторый параметр, характеризующий профиль, мал по сравнению со скоростью потока; но, с другой стороны, способ решения довольно прост и, может быть, найдет применение для решения некоторых других аналогичных задач.

§ 1. Граничная задача. Для простоты рассмотрим случай симметричного обтекания дуги окружности AOA' (фиг. 1). Примем ось симметрии за ось x плоскости течения z. Положим, что скорость набегающего потока v_∞ равна единице. Обозначим длину обтекаемой дуги через l и кривизну через $\varkappa$. Функция

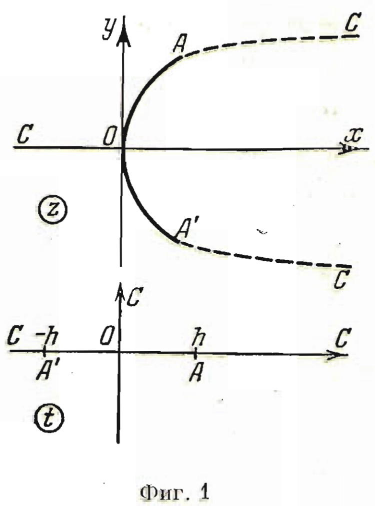
$$t = \sqrt{w(z)}, \qquad t(-1) = i\,|t(-1)| \tag{1.1}$$

где $w(z)$ — комплексный потенциал течения, отображает область течения на полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$, причем дуге окружности $A'OA$ соответствует некоторый отрезок $(-h \leqslant t \leqslant h)$ границы $\operatorname{Im} t = 0$. На линии ACA', соответствующей при отображении границам струи, $|q(t)| = |dw/dz| = 1$. Поэтому для голоморфной в верхней полуплоскости функции

$$u(t) = \frac{d}{dw} \log \frac{dz}{dw} \tag{1.2}$$

выполняется условие

$$\operatorname{Re} u = 0 \qquad \text{на } ACA' \tag{1.3}$$



Фиг. 1

Из принципа симметрии следует, что функции $q(t)$ и $u(t)$ аналитически продолжаемы через ACA' в нижнюю полуплоскость и оказываются однозначными и голоморфными в области B, получаемой из плоскости t проведением разреза по отрезку $A'OA$.

При $t \to \infty$, $\operatorname{Im} t \geqslant 0$ имеем $q(t) \to 1$, а так как $q(\bar{t}) = \overline{[q(t)]^{-1}}$, то и при $t \to \infty$, $\operatorname{Im} t \leqslant 0$ также $q(t) \to 1$.

Следовательно, $t = \infty$ — устранимая особенность для $g(t)$ и разложение $g(t)$ в ряд Лорана в $|t| > h$ имеет вид:

$$g(t) = 1 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \cdots \tag{1.4}$$

Отсюда по (1.2) и (1.1) следует, что $u(t)$ разлагается в $|t| > h$ в ряд вида

$$u(t) = \frac{d_1}{t^3} + \frac{d_2}{t^4} + \frac{d_3}{t^5} + \cdots \tag{1.5}$$

Отметим, что

$$d_1 = \frac{c_1}{2}, \qquad d_2 = c_2 - \frac{c_1^2}{2}, \qquad c_2 = 2d_1^2 + d_2 \tag{1.6}$$

Выясним далее поведение $u(t)$ в окрестности точки O. По принципу симметрии $z(t)$ голоморфна в точке O (имеется в виду продолжение из верхней полуплоскости). Отсюда, используя формулу (1.2) и учитывая, что $dw/dz = 0$ в O, находим, что разложение в ряд Лорана в $|t| < h$ для $u_+(t)$ — аналитического продолжения $u(t)$ через $A'OA$ из верхней полуплоскости

$$u_+(t) = -\frac{1}{2t^2} + \frac{a_{-1}i}{t} + a_0 + a_1 it + \cdots \tag{1.7}$$

Из вещественности $u(t)$ на мнимой полуоси OC следует, что в этом ряде коэффициенты a_n вещественны.

Так как $u(\bar{t}) = -\overline{u(t)}$ в области B [см. (1.3)], то для $u_-(t)$ — аналитического продолжения $u(t)$ через $A'OA$ из нижней полуплоскости — имеем в $|t| < h$ разложение

$$u_-(t) = \frac{1}{2t^2} + \frac{a_{-1}i}{t} - a_0 + a_1 it - a_2 t^2 + \cdots \tag{1.8}$$

Посмотрим еще, что можно сказать о поведении $u(t)$ вблизи точек A, A'. Для кривизны $\varkappa$ дуги OA имеет место формула

$$\varkappa = \frac{x_w' y_w'' - x_w'' y_w'}{\left(x_w'^2 + y_w'^2\right)^{3/2}} = \frac{\operatorname{Im} u}{|dz/dw|} \tag{1.9}$$

Так как $|dz/dw| = 1$ в A и непрерывен вместе со скоростью течения в точке A, то из (1.9) видно, что

$$\lim \operatorname{Im} u = \varkappa \quad \text{при} \quad t \to h - 0 \tag{1.10}$$

Аналогично устанавливается, что $\operatorname{Im} u(t)$ непрерывна справа в точке $t = -h$. Модуль $u(t)$ может быть неограниченным в B в окрестности точек $t = \pm h$. Однако

$$\lim (t^2 - h^2)\, u(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm h \text{ из } B \tag{1.11}$$

Действительно, предполагая, естественно, что

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| \leqslant \left|\frac{dw}{dz}\right|_A = 1 \qquad \text{на } A'OA$$

легко показать, что область B отображается функцией

$$\nu = \log \frac{dz}{dw} = f(t)$$

на область D, которая принадлежит области H, получаемой из плоскости ν проведением резрезов по лучам

$$\operatorname{Re} \nu = 0, \quad \gamma \leqslant \operatorname{Im} \nu < \infty, \quad -\infty < \operatorname{Im} \nu \leqslant -\gamma, \quad \gamma = \arg \left(\frac{dz}{dw}\right)_A$$

причем точкам $t = \pm h$ соответствуют граничные точки $\nu = \pm \gamma i$ области B. Функция

$$\nu = F(t) = -\frac{h\gamma i}{t} \tag{1.12}$$

отображающая B на H, удовлетворяет в B при $|t| > \frac{1}{2} h$ неравенству $|F'(t)| < 4h\gamma$. Далее, пусть t_0 — произвольная, близкая к $t = h$ или $t = -h$ точка области B, $f(t_0) = \nu_0$ и $F^{-1}(\nu_0) = \tau_0$. Очевидно,

$$\lim \tau_0 = h \quad \text{при} \quad t_0 \to h, \qquad \lim \tau_0 = -h \quad \text{при} \quad t_0 \to -h$$

Функции

$$\varphi(t) = f\left(\frac{h^2 + tt_0}{t_0 + t}\right), \qquad \psi(t) = F\left(\frac{h^2 + t\tau_0}{\tau_0 + t}\right) \tag{1.13}$$

отображают B соответственно на D и H так, что $t = \infty$ переходит в $\nu = \nu_0$. По принципу Линделефа $\lim |\varphi'(t) / \psi'(t)| < 1$ при $t \to \infty$.

Отсюда после простого подсчета находим

$$|(t_0^2 - h^2) f'(t_0)| < |F'(t_0)| \, |\tau_0^2 - h^2| < 4h\gamma \, |\tau_0^2 - h^2|$$

Следовательно,

$$\lim (t^2 - h^2) f'(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm h \ \text{из} \ B$$

Отсюда следует (1.11), так как $u = 2tf'(t)$.

Установим теперь граничное условие, которому удовлетворяет функция $u(t)$ на границе области B — отрезке $A'OA$. Рассмотрим для этого производную Шварца

$$\{z\}_w = \frac{d^2 \log dz / dw}{dw^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log dz / dw}{dw}\right)^2 = \frac{du}{dw} - \frac{1}{2} u^2$$

Так как на OA (или OA')

$$\log \frac{dz}{dw} = \log \left| \frac{dz}{dw} \right| + i\vartheta, \qquad \vartheta = \arg dz, \qquad \frac{d\vartheta}{|dz|} = \varkappa$$

то, дифференцируя по w (которое вещественно на $A'OA$), имеем

$$u = \frac{d}{dw} \log \left| \frac{dz}{dw} \right| + i\varkappa \left| \frac{dz}{dw} \right|$$

$$\frac{du}{dw} = \frac{d^2}{dw^2} \log \left| \frac{dz}{dw} \right| + i\varkappa \frac{d}{dw} \left| \frac{dz}{dw} \right| + i \frac{d\varkappa}{dw} \left| \frac{dz}{dw} \right|$$

Отсюда

$$\frac{du}{dw} - \frac{1}{2} u^2 = \frac{d^2}{dw^2} \log \left| \frac{dz}{dw^2} \right| - \frac{1}{2} \varkappa^2 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dw} \log \left| \frac{dz}{dw} \right|\right)^2 + i \frac{d\varkappa}{dw} \left| \frac{dz}{dw} \right| \tag{1.14}$$

Но $d\varkappa / dw = 0$. Поэтому [1]

$$\operatorname{Im}\left(\frac{du}{dw} - \frac{1}{2} u^2\right) = 0 \tag{1.15}$$

или, переходя к аргументу t:

$$u'(t) - \overline{u'(t)} = t\,(u(t) - \overline{u(t)})\,(u(t) + \overline{u(t)} \qquad \text{при} \quad -h < t < h \tag{1.16}$$

Замечание. Основываясь на (1.16), (1.9), (1.2), можно показать, что функция $z(t)$ удовлетворяет на $A'OA$ условию

$$z_+'(t)\, z_-'(t) = -4\varkappa^2 \left(z_+(t) + \frac{1}{\varkappa}\right)^2 t^2$$

§ 2. Интегродифференциальное уравнение. Учитывая (1.7), можно записать граничное условие (1.16) в виде

$$u_+'(t) + u_-'(t) = t\,(u_+(t) + u_-(t))\,(u_+(t) - u_-(t)) \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g(t) = 2t^2 \sqrt{h^2 - t^2}\, u(t) \tag{2.2}$$

Функция $g(t)$ голоморфна в B, включая и $t = \infty$, и удовлетворяет на $A'OA$ условию

$$\begin{aligned} t\,(h^2 - t^2)\,(g_+'(t) - g_-'(t)) + (3t^2 - 2h^2)\,(g_+(t) - g - (t)) = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 - t^2}\,(g_+(t) - g_-(t))\,(g_+(t) + g_-(t)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

По (1.11)

$$\lim \sqrt{t^2 - h^2}\, g(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm h$$

Далее по (1.7) и (1.8) разложения функций $g_+(t)$ и $g_-(t)$ в $|t| < h$ имеют вид:

$$\begin{aligned} g_+(t) &= -h + 2ha_{-1}it + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 i t^3 + \cdots \\ g_-(t) &= -h - 2ha_{-1}it + \alpha_2 t^2 - \alpha_3 i t^3 + \cdots \end{aligned} \tag{2.4}$$

где коэффициенты $a_{-1}, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ вещественны. Поэтому имеет место следующее разложение

$$\varphi(t) = -i\,[g_+(t) - g_-(t)] = 4a_{-1}t + 2\alpha_3 t^3 + 2\alpha_5 t^5 + \cdots \quad |t| < h \tag{2.5}$$

Функция $\varphi(t)$, очевидно, нечетна, вещественна на $A'OA$ и $\varphi(0) = 0$. Кроме того, из (1.10) следует, что

$$\lim \frac{\varphi(t)}{\sqrt{h^2 - t^2}} = 4\varkappa h^2 \qquad \text{при} \quad t \to +h \tag{2.6}$$

Как известно [2], при этих условиях функция $g(t)$ может быть представлена в B интегралом

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{h} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t} + g(\infty) \tag{2.7}$$

---

[1] Граничное условие (1.15) может быть также установлено из свойства инвариантности производной Шварца при линейных преобразованиях.

и при $-h<t<h$

$$g_+(t)+g_-(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-h}^{h}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+2g(\infty) \tag{2.8}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Подставляя (2.5) и (2.8) в (2.3), находим для $\varphi(t)$ сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$t(h^2-t^2)\varphi'(t)+(3t^2-2h^2+c\sqrt{h^2-t^2})\varphi(t)=$$

$$=\sqrt{h^2-t^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-h}^{h}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-h}^{h}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau}\right) \tag{2.9}$$

где

$$c=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-h}^{h}\frac{\varphi(\tau)}{\tau}\,d\tau-g(\infty)=-g(0)=h \tag{2.10}$$

Далее сделаем замену:

$$t=hx,\quad \tau=h\xi,\quad \varphi(t)=t\,(h\sqrt{h^2-t^2}+h^2-t^2)\frac{f(x)}{h^2} \tag{2.11}$$

Для $f(x)$ получается уравнение

$$f'(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}+1-\xi^2}{\xi-x}f(\xi)\,d\xi \tag{2.12}$$

Кроме того, из (2.6) следует, что

$$f(\pm 1)=4\varkappa h^2=\lambda \tag{2.13}$$

Заметим еще, что по (2.11) и (2.5) $f(x)$ голоморфна вместе с $\varphi(hx)$ в $|x|<1$, четна и вещественна на $A'OA$.

Итак, задача сводится к определению решения уравнения (2.12), удовлетворяющего условиям (2.13).

§ 3. Существование решения. 1°. Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. Пусть четная функция $y(x)$ удовлетворяет на интервале $-1<x<1$ условию

$$|y'(x)|\leqslant\frac{m\lambda^2}{\sqrt{1-x^2}},\qquad m=4,\qquad y(\pm 1)=\lambda \tag{3.1}$$

Тогда функция $z(x)$, для которой

$$z'(x)=\frac{y(x)\,Y(x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad z(\pm 1)=\lambda,\qquad Y(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}+1-\xi^2}{\xi-x}\,y(\xi)\,d\xi \tag{3.2}$$

также четная и удовлетворяет при $|\lambda|<\frac{1}{10}$ тому же неравенству (3.1).

Доказательство. Легко видеть, что $z'(x)$ вместе с $Y(x)$ нечетна, следовательно, $z(x)$ — четная функция. Поэтому достаточно доказать оценку (3.1) для $z(x)$ на $0\leqslant x<1$.

Из (3.1) имеем

$$|y(x)-\lambda| \leqslant m\lambda^2 \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant 2m\lambda^2 \sqrt{1-x^2} \tag{3.3}$$

и затем

$$\left| \left[\sqrt{1-x^2}\,(y(x)-\lambda)\right]_x' \right| \leqslant |y'(x)| \sqrt{1-x^2} + x\,\frac{|y(x)-\lambda|}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant 3m\lambda^2 \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что функция $\sqrt{1-x^2}\,(y(x)-\lambda)$ удовлетворяет условию Липшитца с коэффициентом $3m\lambda^2$.

Для оценки интеграла $Y(x)$ представим его в виде

$$Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x) + Y_3(x) \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \sqrt{1-x^2}\,(y(x)-\lambda)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x}\,d\xi = \\ &= -\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi}\log\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\,x\sqrt{1-x^2}\right)(y(x)-\lambda) \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$Y_2(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}+1-\xi^2}{\xi-x}\,d\xi = -\lambda\left[\frac{2+\pi}{2\pi}\,x + \frac{1-x^2}{2\pi}\log\frac{1+x}{1-x}\right]$$

$$Y_3(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(1+\sqrt{1-\xi^2}\right)\frac{\sqrt{1-\xi^2}\,(y(\xi)-\lambda) - \sqrt{1-x^2}\,(y(x)-\lambda)}{\xi-x}\,d\xi$$

Из (3.3) и элементарных соображений имеем

$$|Y_1(x)| < \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi e}\right)2m\lambda^2 < m\lambda^2, \quad |Y_2(x)| < \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi e}\right)|\lambda| < 1.1\,|\lambda|$$

и в силу (3.4)

$$|Y_3(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(1+\sqrt{1-\xi^2}\right)3m\lambda^2 d\xi = \left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right)3m\lambda^2 < 1.8\,m\lambda^2$$

Следовательно,

$$|Y(x)| < 1.1\,|\lambda| + 2.8\,m\lambda^2 \tag{3.7}$$

Отсюда и из (3.3) вытекает, что

$$|z'(x)| = \frac{|y(x)\,Y(x)|}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{(|\lambda| + 2m\lambda^2)(1.1\,|\lambda| + 2.8m\lambda^2)}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{m\lambda^2}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.8}$$

при $m=4$ и $|\lambda| < \frac{1}{10}$.

Лемма 2. Пусть функции $y(x)$ и $y^*(x)$ удовлетворяют условиям леммы 1 и пусть, кроме того, для разности $p_n(x) = y(x) - y^*(x)$ выполняется неравенство

$$|p_n'(x)| \leqslant \frac{\mu\,|\lambda|^n}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.9}$$

Тогда при $|\lambda| < \frac{1}{10}$ разность $p_{n+1}(x) = z(x) - z^*(x)$ функций

$$z(x) = \lambda + \int_1^x \frac{y(x)\, Y(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad z^*(x) = \lambda + \int_1^x \frac{y^*(x)\, Y^*(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \tag{3.10}$$

удовлетворяет неравенству

$$|p'_{n+1}(x)| < \frac{10\mu\, |\lambda|^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.11}$$

Доказательство. Имеем

$$p_{n+1}(x) = \frac{p_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, Y(x) + \frac{[Y(x) - Y^*(x)]\, y^*(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.12}$$

По (3.7) и (3.9) находим

$$\left|\frac{Y(x)\, p_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| < \frac{1.1\,|\lambda| + 2.8m\lambda^2}{\sqrt{1-x^2}}\, \mu\lambda^n \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{2\,(1.1 + 2.8m\,|\lambda|)\, \mu\, |\lambda|^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.13}$$

С другой стороны, так же как в лемме 1, доказывается, что

$$|Y(x) - Y^*(x)| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2} + 1 - \xi^2}{\xi - x}\, p_n(\xi)\, d\xi\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1 + \sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x}\, d\xi \sqrt{1-x^2}\, p_n(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \left(1 + \sqrt{1-\xi^2}\right) \frac{\sqrt{1-\xi^2}\, p(\xi) - \sqrt{1-x^2}\, p(x)}{\xi - x}\, d\xi \right| < 2.8\mu\, |\lambda|^n$$

и, следовательно [см. (3.3)],

$$\frac{|y^*(x)\,(Y(x - Y^*(x)|}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{(|\lambda| + 2m\lambda^2)\, 2.8m\, |\lambda|^n}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) следует, что

$$|p'_{n+1}(x)| < \frac{(5 + 11.2m\,|\lambda|)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mu\, |\lambda|^{n+1} < \frac{10\mu\, |\lambda|^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.15}$$

2°. Теперь нетрудно доказать, что при $|\lambda| < \frac{1}{10}$ уравнение (2.12) имеет решение, удовлетворяющее условию (2.13).

Построим последовательность функций:

$$f_1(x) = \lambda$$

$$f_2(x) = \lambda + \int_1^x \frac{f_1(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2} + 1 - \xi^2}{\xi - x}\, f_1(\xi)\, d\xi\, dx =$$

$$= \lambda + \lambda^2 \left\{ \frac{\pi + 2}{2\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2\pi} \int_x^1 \sqrt{1-x^2} \log \frac{1+x}{1-x}\, dx \right\} \tag{3.16}$$

. . . .

$$f_{n+1}(x) = \lambda + \int_1^x \frac{f_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2} + 1 - \xi^2}{\xi - x}\, f_n(\xi)\, d\xi\, dx$$

Функция $y(x) = f_1(x)$ удовлетворяет неравенству (3.1). Отсюда, последовательно применяя лемму 1, заключаем, что каждая функция $f_n(x)$ удовлетворяет этому неравенству. Далее легко устанавливается, что разность $p_2(x) = f_2(x) - f_1(x)$ удовлетворяет неравенству (3.9) при $n = 2$, $\mu \geqslant 2$. Поэтому, применяя последовательно лемму 2 к разностям $p_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, докажем, что при $|\lambda| < \frac{1}{10}$

$$|f'_n(x) - f'_{n-1}(x)| < \mu\lambda^2 \frac{|10\lambda|^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.17}$$

и, следовательно,

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leqslant 2\mu\lambda^2 |10\lambda|^{n-2} \tag{3.18}$$

Отсюда следует, что при $|\lambda| < \frac{1}{10}$ последовательности $f_n(x)$ и $f_n'(x)$ сходятся к предельным функциям $f(x)$ и соответственно $f'(x)$, причем для предельной функции выполняются неравенство (3.1) и вытекающее из (3.17) неравенство

$$|f'(x) - f_n'(x)| < \mu\lambda^2 \frac{|10\lambda|^{n-1}}{1-10\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.19}$$

Пользуясь этими неравенствами и леммой 2, обычным образом докажем, что $f(x)$ есть решение уравнения (2.12), причем, очевидно, $f(\pm 1) = \lambda$.

Можно также показать, что это единственное решение, удовлетворяющее неравенству вида (3.1) (и условию $f(\pm 1) = \lambda$), и единственное решение, голоморфное относительно λ вблизи $\lambda = 0$.

3°. Пусть $f(x)$, $f(\pm 1) = \lambda$ — решение уравнения (2.12). Определим функции $\varphi(t)$, $g(t)$, $u(t)$ по формулам (2.11), (2.7), (2.2) [причем $g(\infty)$ определяется из (2.10)].

Очевидно, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и условию (1.5) на ∞. Так как функция $\varphi(t)$ вещественна на AOA' и значение $g(\infty)$ также вещественно, то $iu(t)$ вместе с $g(t)$ вещественно на ACA' и условие (1.3) удовлетворяется. Отсюда следует, что $\overline{u_+(t)} = -u_-(t)$ на $A'OA$ и (2.1) можно записать в виде (1.15) [где $u_+(t)$ обозначено просто $u(t)$]. Далее, из (2.7) следует, что

$$g(t) - g(0) = \frac{t}{2\pi} \int_{-h}^{h} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} \frac{d\tau}{\tau - t} \tag{3.20}$$

Но $\varphi(\tau)/\tau$ дифференцируема при $-h < t < h$ вместе с $f(t/h)$ [см. 2.11)]. Поэтому по свойству интегралов типа Коши

$$\lim \frac{g(t) - g(0)}{t} \quad \text{при } t \to 0, \ \operatorname{Im} t \geqslant 0$$

существует.

Отсюда и из формулы (2.2) получается, что функция $t\left(u(t) + \frac{1}{2}t^{-2}\right)$ непрерывна ($\operatorname{Im} t \geqslant 0$) в точке $t = 0$ (следовательно, и всюду на $-h < t < h$, так как $t = 0$ — единственная точка этого интервала, где $u(t)$ не непрерывна).

Учитывая это и полагая $dw/dz=0$, $z=0$ при $t=0$ и $|dz/dw|=1$ при $t=h$, находим из (1.2)

$$\frac{dw}{dz}=e^{-i\gamma}\left(\exp-\int_h^t 2\,tu\,dt\right)=ct\exp\left(-\int_0^t 2t\left(u+\frac{1}{2t^2}\right)dt\right) \tag{3.21}$$

$$z=2e^{+i\gamma}\int_0^t t\exp\left(\int_h^t 2\,tu\,dt\right)dt \tag{3.22}$$

Пусть G — область, на которую отображается полуплоскость $\operatorname{Im} t>0$ функцией $z(t)$. Так как $u(t)$ удовлетворяет условию (1.15), то, как видно из (1.14), (1.9), (3.21), кривизна $\varkappa$ граничной дуги $A'OA$ области G, соответствующей отрезку $-h<t<h$, непрерывна и постоянна. Итак, $A'OA$ — дуга окружности длины

$$l=2\left|\frac{\pi}{2}-\gamma\right|\frac{1}{|\varkappa|} \tag{3.23}$$

С другой стороны, так как $\operatorname{Re} u=0$ на ACA', то здесь по (3.21) $|dw/dz|=1$. Таким образом, формулы (3.21), (3.22) дают решение задачи.

§ 4. Приближенное решение при малых $|\lambda|$. В заключение рассмотрим первое приближение к решению задачи в случае, когда параметр λ мал.

Положим

$$f(x)=f_1(x)=\lambda \tag{4.1}$$

Подсчитывая $g(t)$ по формулам (2.11), (2.7), (2.10), находим

$$g(t)=-h+\frac{\lambda}{\pi h^2}\left\{\frac{\pi}{2}ht\sqrt{h^2-t^2}+\frac{1}{2}t(h^2-t^2)\log\frac{t-h}{t+h}-\frac{2+\pi}{2}ht^2\right\} \tag{4.2}$$

и, следовательно [см. (2.2)],

$$u(t)=-\frac{h}{2t^2\sqrt{h^2-t^2}}+\varkappa\left\{\frac{hi}{t}+\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{h^2-t^2}}{t}\log\frac{t-h}{t+h}-\frac{\pi+2}{\pi}\frac{h}{\sqrt{h^2-t^2}}\right\} \tag{4.3}$$

Для определения параметра h имеем условие

$$l=2\int_0^A|dz|=4\int_0^h t\exp\left(\int 2\operatorname{Re} u(t)\,dt\right)dt \tag{4.4}$$

Так как

$$2\int_h^t \operatorname{Re} ut\,dt=\log\frac{h+\sqrt{h^2-t^2}}{t}+2\varkappa\left(\frac{\pi+2}{\pi}h\sqrt{h^2-t^2}+\frac{1}{\pi}\int_t^h\sqrt{h^2-t^2}\log\frac{h+t}{h-t}\,dt\right)$$

то, обозначая

$$J(x)=\frac{\pi+2}{\pi}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{\pi}\int_x^1\sqrt{1-x^2}\log\frac{1+x}{1-x}\,dx \tag{4.5}$$

находим приближенно

$$l=4\int_0^h\left(h+\sqrt{h^2-t^2}\right)e^{2\varkappa h\,J(t/h)}dt=4\int_0^h\left(h+\sqrt{h^2-t^2}\right)\left(1+2\varkappa h^2 J\left(\frac{t}{h}\right)\right)dt$$

или

$$l = (\pi + 4)\, h^2 + 8\varkappa h^4 p \qquad \left(p = \int\limits_0^1 (1 + \sqrt{1 - x^2})\, J(x)\, dx\right) \tag{4.6}$$

или после преобразования двойного интеграла и элементарных вычислений

$$p = \frac{3\pi^2 + 16\pi + 18}{12\pi} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \arcsin x \log \frac{1 + x}{1 - x}\, dx = 2.692 \tag{4.7}$$

(Здесь интеграл подсчитан численно). Из (4.6) имеем

$$h^2 \approx \frac{l}{\pi + 4}\left[1 - \frac{8\varkappa q l}{(\pi + 4)^2}\right] \tag{4.8}$$

Подсчитаем, наконец, давление P на дугу $A'OA$. Обозначая $dw / dz = q(t)$, имеем (см. [3])

$$P = -\frac{i\rho}{2}\int\limits_{AOA'}\left(\overline{dz} - \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz\right) = -i\rho\int\limits_{-h}^{h}\{[\overline{q(t)}]^{-1} - q(t)\}\, t\, dt \tag{4.9}$$

Так как $q(\bar{t}) = [\overline{q(t)}]^{-1}$, то этот интеграл равен

$$P = i\rho\oint\limits_{\gamma} q(t)\, t\, dt \tag{4.10}$$

где γ — контур в плоскости t, окружающий разрез $A'OA$, следовательно [см. (1.4) и (1.6)],

$$P = 2\pi\rho \operatorname*{Res}_{t=\infty}(tq(t)) = -2\pi\rho c_2 = -2\pi\rho\,(2d_1{}^2 + d_2) \tag{4.11}$$

где d_1, d_2 — коэффициенты при t^{-3} и t^{-4} в разложении $u(t)$ в $|t| > h$.

Подсчитывая их, находим

$$d_1 = -i\left(\frac{h}{2} + \frac{3\pi + 8}{6\pi}\varkappa h^3\right), \qquad d_2 = 0 \tag{4.12}$$

Таким образом, получаем для P формулу

$$P = \pi\rho h^2\left(1 + \frac{3\pi + 8}{3\pi}\varkappa h^2\right)^2 \tag{4.13}$$

или, подставляя h^2 из (4.8) и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно $\varkappa l$ (если дуга $A'OA$ обращена выпуклостью к набегающему потоку, то $\varkappa < 0$) [4]:

$$P = \frac{\pi\rho l}{\pi + 4}\left[1 + \left\{\frac{2(3\pi + 8)}{3\pi(\pi + 4)} - \frac{8q}{(\pi + 4)^2}\right\}\varkappa l\right] = \frac{\pi\rho l}{\pi + 4}(1 + 0.095\varkappa l) \tag{4.14}$$

Поступила 29 X 1949 Томский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. О непрерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга. Известия Ив.-Вознес. политехн. института. 1922. № 5.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат. 1946.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат. 1948. Стр. 340.
4. Слезкин Н. А. К вопросу о плоском движении газа. Ученые записки МГУ. 1937. № 7. Стр. 69.