Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

# ОЦЕНКИ ОШИБОК ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Р. Шура-Бура
(Москва)

## I. Численное интегрирование дифференциального уравнения

**§ 1. Экстраполирование.** Рассмотрим процесс численного интегрирования дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

методом экстраполирования с применением интеграционной формулы

$$y_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} y_{n-\lambda} + h \sum_{\lambda=0}^{k} v_\lambda y'_{n-\lambda} \tag{1.2}$$

дающей возможность шаг за шагом вычислять значения искомой функции $y_j (j = 1,2, \ldots, n)$ для сетки равноотстоящих значений аргумента $x_j = x_0 + jh$ $(j = 1,2, \ldots, n)$, если известны значения функций $y_j$ для $j = 0, -1, \ldots, -k$.

Разность между истинным $y(x_n)$ и вычисленным значением $y_n$ функции в узле $x_n$, т. е. погрешность интегрирования, будем обозначать через $\varepsilon_n = y(x_n) - y_n$. Погрешность $\varepsilon_n$ вызывается следующими источниками ошибок.

1°. Исходные значения функции $y(x_{-k}), \ldots, y(x_0)$ обычно бывают заданы с некоторыми погрешностями, т. е. $\varepsilon_{-\lambda} = 0$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, k)$.

2°. Формула (1.2) не является точной, она получается из точного соотношения путем отбрасывания остаточного члена $\rho_{n+1}$.

3°. Вычисление значений $y_n'$ производной искомой функции по формуле $y_n' = f(x_n, y_n)$ обычно проводится приближенно с некоторой ошибкой $\delta_n$.

4°. Вычисление правой части формулы (1.2) вносит некоторую ошибку округления $\eta_{n+1}$.

Выразим ошибку $\varepsilon_n$ через ошибки, указанные в 1°, 2°, 3°, 4°.

Разность между истинным значением производной искомой функции при $x = x_n$ и найденным значением $y_n'$ обозначим через

$$\varepsilon_n' = f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n) + \delta_n$$

Если предположить существование частной производной $f_y'(x, y)$, то величине $\varepsilon_n'$ можно придать следующий вид:

$$\varepsilon_n' = f_y'(x_n, y_n + \theta\varepsilon_n)\, \varepsilon_n + \delta_n \tag{1.3}$$

Положим

$$\pi_n = \eta_n + \rho_n + h \sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} \varepsilon'_{n-\lambda-1} \tag{1.4}$$

Легко показать, что $\varepsilon_n$ для каждого $n$ оказывается линейной формой относительно величин $\varepsilon_{-k}, \ldots, \varepsilon_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$:

$$\varepsilon_n = \sum_{\mu=0}^{k} \Phi_{-\mu}(n)\, \varepsilon_{-\mu} + \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(n)\, \pi_\nu \tag{1.5}$$

Определим коэффициенты $\Phi_{-\mu}(n)$ и $a_\nu(n)$. В силу формул (1.2), (1.4)

$$\varepsilon_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\varepsilon_{n-\lambda} + \pi_{n+1}$$

Подставляя сюда значения $\varepsilon_{n-\lambda}$ по формуле (1.5) получаем

$$\varepsilon_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\Big[\sum_{\mu=0}^{k} \Phi_{-\mu}(n-\lambda)\, \varepsilon_{-\mu} + \sum_{\nu=1}^{n-\lambda} a_\nu(n-\lambda)\, \pi_\nu\Big] + \pi_{n+1}$$

Если положить формально $a_\nu(n) = 0$ для $n < \nu$, то выражение для $\varepsilon_{n+1}$ можно переписать следующим образом:

$$\varepsilon_{n+1} = \sum_{\mu=0}^{k} \varepsilon_{-\mu} \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\Phi_{-\mu}(n-\lambda) + \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}a_\nu(n-\lambda) + \pi_{n+1}$$

Отсюда и из формулы (1. 5) следует, что

$$\Phi_{-\mu}(n+1) = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}\Phi_{-\mu}(n-\lambda), \quad a_\nu(n+1) = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}a_\nu(n-\lambda), \qquad (\nu \leqslant n)$$

$$a_{n+1}(n+1) = 1$$

Кроме того, очевидно, $\Phi_{-\mu}(-\mu) = 1$ и $\Phi_{-\mu}(-\lambda) = 0$ при $\lambda \neq \mu$. Итак, коэффициенты $\Phi_{-\mu}(n)$ как функции от $n$ удовлетворяют при $n \geqslant k$ следующему уравнению в конечных разностях:

$$F(n+1) - \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda}F(n-\lambda) = 0 \tag{1.6}$$

при начальных условиях $\Phi_{-\mu}(\mu) = 1$ и $\Phi_{-\mu}(-\nu) = 0$, если $0 \leqslant \nu \leqslant k$ и $\nu \neq \mu$. При $\nu > k$ положим $\Phi_{-\mu}(-\nu) = 0$.

Коэффициенты $a_\nu(n)$ удовлетворяют при $n \geqslant \nu - k$ тому же уравнению в конечных разностях (1.6) при начальных условиях $a_\nu(\nu) = 1$ и $a_\nu(\mu) = 0$ для $\mu < \nu$. Так как $a_\nu(n)$ и $\Phi_0(n-\nu)$ как функция от $n$ удовлетворяют при $n \geqslant \nu - k$ одному и тому же уравнению (1.6) при одних и тех же начальных условиях и одновременно равны нулю при $n < \nu - k$, то $a_\nu(n) = \Phi_0(n-\nu)$. Соотношение (1.5) принимает следующий вид:

$$\varepsilon_n = \sum_{\mu=0}^{k} \Phi_{-\mu}(n)\, \varepsilon_{-\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_0(n-\nu)\, \pi_\nu$$

Подставляя сюда выражение (1.4) для величин $\pi_\nu$, получим

$$\varepsilon_n = \sum_{\mu=0}^{k} \Phi_{-\mu}(n)\, \varepsilon_{-\mu} + h\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_0(n-\nu) \sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda}\varepsilon'_{\nu-\lambda-1} + \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_0(n-\nu)(\eta_\nu + \rho_\nu)$$

Используя выражение (1.3) для величин $\varepsilon_n'$ и обозначая $f_y'(x_n, y_n + \theta\varepsilon_n)$ через $l_n$, получим

$$\varepsilon_n = \sum_{\mu=0}^{k} \Phi_{-\mu}(n)\,\varepsilon_{-\mu} + h\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_0(n-\nu)\sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} l_{\nu-\lambda-1}\varepsilon_{\nu-\lambda-1} +$$

$$+ h\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_0(n-\nu)\sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda}\delta_{\nu-\lambda-1} + \sum_{\nu=1}^{n}\Phi_0(n-\nu)(\eta_\nu + \rho_\nu) \qquad (1.7)$$

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{k} = \sum_{\nu=2}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu-2} + \sum_{\nu=1}^{k+1}\sum_{\lambda=\nu-1}^{k} \qquad \text{при } n = k+1$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{k} = \sum_{\nu=2}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu-2} + \sum_{\nu=1}^{k+1}\sum_{\lambda=\nu-1}^{k} - \sum_{\nu=k+2}^{n}\sum_{\lambda=k+1}^{\nu-1} \qquad \text{при } n > k+1$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{k} = \sum_{\nu=2}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu-2} + \sum_{\nu=1}^{k+1}\sum_{\lambda=\nu-1}^{k} - \sum_{\nu=n+1}^{k+1}\sum_{\lambda=\nu-1}^{n} \qquad \text{при } n < k+1$$

Если положить $v_{-\lambda} = 0$ для $\lambda > k$, то во всех случаях второй член формулы (1.7) можно представить в виде

$$h\left[\sum_{\nu=2}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu-2}\Phi_0(n-\nu)\,v_{-\lambda}l_{\nu-\lambda-1}\varepsilon_{\nu-\lambda-1} + \sum_{\nu=1}^{k+1}\sum_{\lambda=\nu-1}^{k}\Phi_0(n-\nu)\,v_{-\lambda}l_{\nu-\lambda-1}\varepsilon_{\nu-\lambda-1}\right] \qquad (1.8)$$

так как

$$\sum_{\nu=k+2}^{n}\sum_{\lambda=k+1}^{\nu-1}\Phi_0(n-\nu)\,v_{-\lambda}l_{\nu-\lambda-1}\varepsilon_{\nu-\lambda-1} = 0 \quad \text{при } n > k+1 \quad (v_{-\lambda} = 0 \quad \text{при } \lambda > k)$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{k+1}\sum_{\lambda=\nu-1}^{k}\Phi_0(n-\nu)\,v_{-\lambda}l_{\nu-\lambda-1}\varepsilon_{\nu-\lambda-1} = 0 \quad \text{при } n < k+1 \quad (\Phi_0(n-\nu) = 0 \quad \text{при } \nu > n)$$

Далее во второй двойной сумме выражения (1.8) сделаем замену индексов суммирования, полагая $\sigma = \lambda$, $\tau = \lambda - \nu + 1$, и проведем внутреннее суммирование по индексу $\sigma$; получим

$$\sum_{\nu=1}^{k+1}\sum_{\lambda=\nu-1}^{k}\Phi_0(n-\nu)\,v_{-\lambda}l_{\nu-\lambda-1}\varepsilon_{\nu-\lambda-1} = \sum_{\tau=0}^{k}\sum_{\sigma=\tau}^{k}\Phi_0(n+\tau-\sigma-1)\,v_{-\sigma}l_{-\tau}\varepsilon_{-\tau} \qquad (1.9)$$

В первой двойной сумме выражения (1.8) также сделаем замену индексов суммирования, полагая $\sigma = \lambda$, $\tau = \nu - \lambda - 1$, и проведем внутреннее суммирование по индексу $\sigma$, после чего получим

$$\sum_{\nu=2}^{n}\sum_{\lambda=\nu}^{\nu-2}\Phi_0(n-\nu)\,v_{-\lambda}l_{\nu-\lambda-1}\varepsilon_{\nu-\lambda-1} = \sum_{\tau=1}^{n}\sum_{\sigma=0}^{n-\tau-1}\Phi_0(n-\tau-\sigma-1)\,v_{-\sigma}l_\tau\varepsilon_\tau \qquad (1.10)$$

В (1.9) и (1.10) суммирование по $\sigma$ можно провести независимо от рассматриваемого дифференциального уравнения. Положим

$$\sum_{\sigma=\tau}^{k}\Phi_0(n+\tau-\sigma-1)\,v_{-\sigma} = \Psi(n,\tau), \qquad \sum_{\sigma=0}^{n-\tau-1}\Phi_0(n-\tau-\sigma-1)\,v_{-\sigma} = \Psi(n-\tau) \qquad (1.11)$$

Третий член формулы (1.7) получается из второго после замены в последнем произведений $l_{\nu-\lambda-1}\,\varepsilon_{\nu-\lambda-1}$ на $\delta_{\nu-\lambda-1}$. Поэтому он равен

$$h\left[\sum_{\tau=0}^{k}\Psi(n,\tau)\,\delta_{-\tau}+\sum_{\tau=1}^{n-1}\Psi(n-\tau)\,\delta_{\tau}\right] \tag{1.12}$$

Пользуясь (1.9) — (1.12) и вводя обозначения

$$\mathrm{E}_n=\sum_{\mu=0}^{k}\left[\Phi_{-\mu}(n)\,\varepsilon_{-\mu}+h\Psi(n,\mu)\,l_{-\mu}\varepsilon_{-\mu}+h\Psi(n,\mu)\,\delta_{-\mu}\right]$$

$$\Delta_n=h\sum_{\nu=1}^{n-1}\Psi(n-\nu)\,\delta_{\nu},\qquad \mathrm{H}_n=\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_0(n-\nu)\,\eta_{\nu},\qquad \mathrm{P}_n=\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_0(n-\nu)\,\rho_{\nu}$$

$$\Omega_n=\mathrm{E}_n+\Delta_n+\mathrm{H}_n+\mathrm{P}_n$$

формулу (1.7) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_n=\Omega_n+h\sum_{\nu=1}^{n-1}\Psi(n-\nu)\,l_{\nu}\varepsilon_{\nu} \tag{1.13}$$

Подставляя сюда вместо $\varepsilon_{\nu}$ $(\nu=1,\ldots,n-1)$ их выражения по формуле (1.13), получим выражение величины $\varepsilon_n$ через величины $\Omega_{\nu}\,(\nu\leqslant n)$ и величины $\varepsilon_{\nu}$ при $\nu\leqslant n-2$:

$$\varepsilon_n=\Omega_n+h\sum_{\nu_1=1}^{n}\Psi(n-\nu_1)\,l_{\nu_1}\Omega_{\nu_1}+h^2\sum_{\nu_1=1}^{n-1}\sum_{\nu_2=1}^{\nu_1-1}\Psi(n-\nu_1)\Psi(\nu_1-\nu_2)\,l_{\nu_1}l_{\nu_2}\varepsilon_{\nu_2} \tag{1.14}$$

Подставляя сюда вместо $\varepsilon_{\nu_2}$ $(\nu_2=1,\ldots,n-2)$ их выражения по формуле (1. 14), получим выражение величины $\varepsilon_n$ через величины $\Omega_{\nu}$, $\nu\leqslant n$, и величины $\varepsilon_{\nu}$ при $\nu\leqslant n-3$. Повторяя этот процесс подстановки, в результате придем к выражению, которое явно не содержит величины $\varepsilon_{\nu}$:

$$\varepsilon_n=\Omega_n+\sum_{q=1}^{n-1}h^q\sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q\\ 0<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}}\Psi(n-\nu_1)\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\,l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\,\Omega_{\nu_q} \tag{1.15}$$

Так как это выражение линейно относительно величин $\Omega_{\nu}$, то ошибку $\varepsilon_n$ можно представить в виде суммы $\varepsilon_n=\varepsilon_n^{(1)}+\varepsilon_n^{(2)}+\varepsilon_n^{(3)}+\varepsilon_n^{(4)}$, где

$$\varepsilon_n^{(1)}=\mathrm{E}_n+\sum_{q=1}^{n-1}h^q\sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q\\ 0<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}}\Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\,l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\mathrm{E}_{\nu_q} \tag{1.16}$$

$$\varepsilon_n^{(2)}=\Delta_n+\sum_{q=1}^{n-2}h^q\sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q\\ 0<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}}\Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\,l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Delta_{\nu_q} \tag{1.17}$$

(суммирование по $q$ будет лишь до $n-2$, так как $\nu_q=1$, при $q=n-1$, а $\Delta_1=0$)

$$\varepsilon_n^{(3)} = \mathrm{H}_n + \sum_{q=1}^{n-1} h^q \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ 0<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\mathrm{H}_{\nu_q} \tag{1.18}$$

$$\varepsilon_n^{(4)} = \mathrm{P}_n + \sum_{q=1}^{n-1} h^q \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ 0<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\mathrm{P}_{\nu_q} \tag{1.19}$$

Величина $\varepsilon_n^{(1)}$ представляет собой систематическую ошибку, обусловленную ошибками в определении исходных значений искомой функции и ее производной. С точностью до малых высшего порядка величина $\varepsilon_n^{(1)}$ не зависит от последующих ошибок в определении значений искомой функции и ее производной. Аналогично величина $\varepsilon_n^{(4)}$ с точностью до малых высшего порядка зависит лишь от ошибок интегрирования, вызванных отбрасыванием остаточного члена. Величина $\varepsilon_n^{(4)}$ также является систематической ошибкой. Что же касается величин $\varepsilon_n^{(2)}$ и $\varepsilon_n^{(3)}$, то их разумно считать случайными ошибками, каждая из которых с точностью до малых высшего порядка является линейной формой независимых случайных величин — ошибок округления $\delta_\nu$ и $\eta_\nu$. Считая, что средние значения случайных величин $\delta_\nu$ и $\eta_\nu$ равны нулю, а дисперсии равны заданным величинам $D^2(\delta_\nu)$ и $D^2(\eta_\nu)$, оценим дисперсии случайных величин $\varepsilon_n^{(2)}$ и $\varepsilon_n^{(3)}$. Для этого представим их явно в виде суммы независимых случайных величин $\delta_\nu$ и $\eta_\nu$.

Подставив в (1.17) выражение для $\Delta_{\nu_q}$, получим

$$\varepsilon_n^{(2)} = h\sum_{\nu=1}^{n-1}\Psi(n-\nu)\,\delta_\nu + \tag{1.20}$$

$$+\sum_{q=1}^{n-2} h^{q+1} \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q,\nu \\ 0<\nu<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\Psi(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\delta_\nu =$$

$$= \sum_{q=0}^{n-2} h^{q+1} \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q,\nu \\ 0<\nu<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\Psi(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\delta_\nu$$

Изменим здесь порядок суммирования, проведя внешнее суммирование по индексу $\nu$. Получаем

$$\varepsilon_n^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{n-1}\Bigg[\sum_{q=0}^{n-\nu-1} h^{q+1} \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ \nu<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\Psi(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Bigg]\delta_\nu \tag{1.21}$$

Отсюда

$$D^2(\varepsilon_n^{(2)}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} D^2(\delta_\nu)\,\times \tag{1.22}$$

$$\times\Bigg[\sum_{q=0}^{n-\nu-1} h^{q+1} \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ \nu<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\Psi(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Bigg]^2$$

Из полученных формул видно, что рост ошибки существенным образом зависит от поведения решений уравнения в конечных разностях (1.6); характер этих решений в свою очередь определяется корнями характеристического уравнения

$$z^{k+1} - \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} z^{k-\lambda} = 0 \tag{1.23}$$

Это уравнение, которое мы называем характеристическим уравнением интеграционной формулы (1.2), всегда имеет одним из своих корней значение $+1$. Если характеристическое уравнение имеет корни, превосходящие по модулю единицу, или кратные корни, равные по модулю единице, то соответствующие функции $\Phi_{-\mu}(n)$ быстро возрастают и рассматриваемую интеграционную формулу следует признать мало пригодной для численного интегрирования дифференциального уравнения, если процесс интегрирования содержит большое число шагов.

Для интеграционной формулы, у которой характеристическое уравнение не имеет корней в области $|z| > 1$ и кратных корней на окружности $|z| = 1$, функции $\Phi_{-\mu}(n)$ ограничены.

Обозначим через $\Phi$ верхнюю грань значений абсолютной величины функций $\Phi_{-\mu}(n)$ для всех $\mu$ и $n$, через $\Psi$ — верхнюю грань значений абсолютной величины функций $\Psi(n, \tau)$ и $\Psi(n)$ и через $l$ — верхнюю грань значений абсолютной величины частной производной $f_y'$. Тогда

$$\left|\sum_{\substack{\nu_1, \ldots, \nu_q \\ \nu < \nu_q < \cdots < \nu_1 < n}} \Psi(n-\nu_1)\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\Psi(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\right| \leqslant C_{n-\nu-1}^{q}\Psi^{q+1} l^q$$

Кроме того,

$$\sum_{q=0}^{n-\nu-1} C_{n-\nu-1}^{q}\Psi^{q+1}h^{q+1} = \Psi h(1+\Psi l h)^{n-\nu-1}$$

Поэтому если $D^2(\delta_\nu) \leqslant D_\delta^2$, то

$$D^2(\varepsilon_n^{(2)}) \leqslant \sum_{\nu=1}^{n-1} \Psi^2 h^2 (1+\Psi l h)^{2n-2\nu-2} D_\delta^2 < \frac{\Psi h}{2l}\left[(1+\Psi l h)^{2n} - 1\right] D_\delta^2$$

Правая часть это формулы при малом значении $h$ и большом значении $n$ близка к

$$\frac{\Psi h}{2l}\left(e^{2l\Psi(x_n-x_0)} - 1\right) D_\delta^2$$

и во всяком случае

$$D^2(\varepsilon_n^{(2)}) < \frac{\Psi}{2l}\left[e^{2l\Psi(x_n-x_0)} - 1\right] D_\delta^2 h \tag{1.24}$$

Отсюда заключаем, что дисперсия ошибки, вызванной ошибками в вычислении правой части дифференциального уравнения, стремится к нулю вместе с величиной шага $h$. Иными словами, для того чтобы уменьшить влияние ошибок в вычислении правой части дифференциального уравнения, достаточно уменьшить шаг интегрирования, не повышая точности самих вычислений правой части.

В результате подстановки в формулу для $\varepsilon^{(3)}$ выражения величин $H_\nu$ через величины $\eta_\nu$ и перемены порядка суммирования получаем следующее представление для $\varepsilon_n^{(3)}$ в виде суммы независимых случайных величин:

$$\varepsilon_n^{(3)} = \sum_{\nu=1}^{n}\Big[\Phi_0(n-\nu) +$$

$$+\sum_{q=1}^{n-\nu} h^q \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ \nu\leqslant\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\Phi_0(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Big]\eta_\nu \quad (1.25)$$

Оценивая дисперсию случайной величины $\varepsilon_n^{(3)}$, получаем

$$D^2(\varepsilon_n^{(3)}) \leqslant \frac{\Phi^2}{\Psi l}\,\frac{(1+\Psi l h)^{2n}-1}{h(2+\Psi l h)}\,D_\eta^2 \approx \frac{\Phi}{2\Psi l}\,[e^{2l\Psi(x_n-x_0)}-1]\,\frac{D_\eta^2}{h} \quad (1.26)$$

где $D_\eta^2 \geqslant D^2(\eta_\nu)$.

Формула, выражающая ошибку $\varepsilon_n^{(4)}$ через величины остаточного члена $\rho_\nu$, получается из формулы (1.25) простой заменой величин $\eta_\nu$ на $\rho_\nu$. Имеем

$$\varepsilon_n^{(4)} = \sum_{\nu=1}^{n-1}\Big[\Phi_0(n-\nu) +$$

$$+\sum_{q=1}^{n-1} h^q \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ \nu\leqslant\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\Phi_0(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Big]\rho_\nu \quad (1.27)$$

Отсюда, полагая $\rho = \sup|\rho_\nu|$, получаем для величины $\varepsilon_n^{(4)}$ оценку:

$$|\varepsilon_n^{(4)}| \leqslant \frac{\Phi}{\Psi l}\,[(1+\Psi l h)^n - 1]\,\frac{\rho}{h} \quad (1.28)$$

Получая эти оценки, мы заменили все члены внутренней суммы в формулах (1.21), (1.25), (1.27) их абсолютными величинами.

В том случае, когда эти члены имеют один и тот же знак, наши оценки близки к точным. Так будет, например, в случае применения методов интегрирования Эйлера и Адамса и положительной производной $\partial f/\partial y$ или в случае применения метода Милна и отрицательной производной $\partial f/\partial y$. Если же члены рассматриваемой суммы имеют чередующиеся знаки, полученные оценки являются грубыми. В этом случае, опираясь на точные формулы (1.21) и (1.25), следует провести более точные оценки с учетом переменных знаков. Из оценки (1.26) можно сделать следующий вывод: при уменьшении шага следует повышать точность вычислений правой части интеграционной формулы так, чтобы отношение $D_\eta^2$ к $h$ по крайней мере не увеличивалось.

Аналогично можно выразить ошибку $\varepsilon_n^{(1)}$ через начальные ошибки $\varepsilon_{-\mu}$ и $\delta_{-\mu}$, $\mu = 0, \ldots, k$ и получить подобные же оценки для этой ошибки.

Действительно, подставляя в (1.16) выражение для $E_\nu$, получим

$$\varepsilon_n^{(1)} = \sum_{\mu=0}^{k}\Big[\Phi_{-\mu}(n)\,\varepsilon_{-\mu} + h\Psi(n,\mu)\,l_{-\mu}\varepsilon_{-\mu} + h\Psi(n,\mu)\,\delta_{-\mu} + \tag{1.29}$$

$$+\sum_{q=1}^{n-1} h^q \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ 0<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\,l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\,(\Phi_{-\mu}(\nu_q)\,\varepsilon_{-\mu} +$$

$$+ h\Psi(\nu_q,\mu)\,l_{-\mu}\varepsilon_{-\mu} + h\Psi(\nu_q,\mu)\,\delta_{-\mu})\Big] = \sum_{\mu=0}^{k}\Big[\Phi_{-\mu}(n) +$$

$$+\sum_{q=1}^{n-1} h^q \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ 0<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\,\Phi_{-\mu}(\nu_q)\,l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Big]\varepsilon_{-\mu} + h\sum_{\mu=0}^{k}\Big[\Psi(n,\mu) +$$

$$+\sum_{q=1}^{n-1} h^q \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ 0<\nu_q<\cdots<\nu_1<n}} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\,\Psi(\nu_q,\mu)\,l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Big]\,l_{-\mu}\varepsilon_{-\mu} +$$

$$+ h\sum_{\mu=0}^{k}\Big[\Psi(n,\mu) + \sum_{q=1}^{n-1} h^q \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_q} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\,\Psi(\nu_q,\mu)\,l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Big]\,\delta_{-\mu}$$

Полагая $\varepsilon_- = \sup|\varepsilon_{-\mu}|$ и $\delta = \sup|\delta_\mu|$, получаем отсюда оценку для величины $\varepsilon_n^{(1)}$:

$$|\varepsilon_n^{(1)}| \leqslant (k+1)\,\Phi\,(1+\Psi\,lh)^n\,\varepsilon_- + (k+1)\,\Psi\,lh\,[1+\Psi\,lh]^{n-1}\delta \tag{1.30}$$

Для величин $\varepsilon_n^{(2)}$ и $\varepsilon_n^{(3)}$ из формул (1.21), (1.25) нетрудно получить оценки максимума абсолютной величины. Из формулы (1.21) получаем

$$|\varepsilon_n^{(2)}| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n-1} \Psi h\,(1+\Psi\,lh)^{n-\nu-1}\,\delta =$$

$$= \frac{1}{l}\Big[(1+\Psi\,lh)^{n-1} - 1\Big]\delta < \frac{1}{l}\Big[e^{\Psi l(x_n-x_0)} - 1\Big]\delta \tag{1.31}$$

Из формулы (1.27), полагая $\eta = \sup|\eta_\nu|$, получим

$$|\varepsilon_n^{(3)}| \leqslant \frac{\Phi}{\Psi l}[(1+\Psi\,lh)^n - 1]\frac{\eta}{h} < \frac{\Phi}{\Psi l}\,[e^{\Psi l(x_n-x_0)} - 1]\,\frac{\eta}{h} \tag{1.32}$$

Сравнивая вероятностные оценки (1.24) и (1.26) с соответствующими оценками максимума абсолютной величины (1.31) и (1.32), нетрудно обнаружить существенное отличие первых от вторых. Как уже было отмечено выше, из (1.24) следует, что уменьшение шага интегрирования $h$ уменьшает дисперсию ошибки, вызванной ошибками в вычислении правой части дифференциального уравнения, оценка же (1.31) не дает основания ожидать убывания ошибки при уменьшении шага. В действительности максимально возможная ошибка и не убывает при уменьшении шага, так как оценка (1.31) является точной в том смысле, что ее нельзя улучшить. Нетрудно показать, что наши оценки достигаются для интеграционной формулы

$$y_{n+1} = y_n + hy_n'$$

соответствующей интегрированию методом Эйлера, при интегрировании уравнения $y' = y$. Оценки (1.26) и (1.32) отличаются друг от друга тем, что в (1.32) вместо величины $D_\eta^2 h^{-1}$ стоит величина $\eta h^{-1}$. Если допустить для случайной величины $\eta_\nu$ равномерный закон распределения, то $D_\eta^2 = D^2(\eta_\nu) = \frac{1}{3}\eta^2$. Следовательно, $D_\eta^2 h^{-1} = \frac{1}{3} h (\eta h^{-1})^2$. Из последнего равенства вытекает, что правая часть неравенства (1.26) стремится к нулю при $h$, стремящемся к нулю, если величина $\eta h^{-1}$ остается ограниченной. При этих же условиях правая часть неравенства (1.32) остается лишь ограниченной.

**§ 2. Интерполирование вперед.** Рассмотрим теперь процесс интегрирования дифференциального уравнения (1.1) при помощи интеграционной формулы, содержащей справа значение производной $y'$ искомой функции при том же значении аргумента, при котором определяется сама функция $y_k$, т. е.

$$y_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} y_{n-\lambda} + hv_1 y'_{n+1} + h \sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} y'_{n-\lambda} \tag{2.1}$$

Такая формула, так же как и формула (1.2), дает возможность шаг за шагом вычислять значения искомой функции $y$. Однако для определения следующего значения функции требуется в сущности решить уравнение (2.1), так как содержащаяся в формуле (2.1) справа величина $y'_{n+1}$, вообще говоря, зависит от определяемой величины $y_{n+1}$. Это уравнение решают обычно методом последовательных приближений, принимая за начальное приближение для $y_{n+1}$ величину, получаемую по формуле типа (1.2). Преимущество формулы типа (2.1) перед формулой типа (1.2) заключается прежде всего в том, что остаточный член для формулы (2.1), вообще говоря, меньше остаточного члена для формулы (1.2) с тем же числом узлов.

В процессе численного интегрирования по формуле (2.1) возникают ошибки, аналогичные ошибкам, рассмотренным в § 1. Все сказанное в пп. 1°, 2°, 3°, 4°, следует повторить и здесь.

Сохраняя те же обозначения, получим следующую формулу:

$$\varepsilon_n = \sum_{\mu=0}^{k} \Phi_{-\mu}(n)\, \varepsilon_{-\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_0(n-\nu)\, \pi_\nu \tag{2.2}$$

В отличие от такой же формулы в § 1 здесь величина $\pi_\nu$ при $\nu = n$ зависит от ошибки $\varepsilon_n$, так как теперь

$$\pi_n = \eta_n + \rho_n + h \sum_{\lambda=-1}^{k} v_{-\lambda} l_{n-\lambda-1}\, \varepsilon_{n-\lambda-1} + h \sum_{\lambda=-1}^{k} v_{-\lambda} \delta_{n-\lambda-1} \tag{2.3}$$

Формула (1.7) заменяется здесь аналогичной формулой, в которой все суммирования по индексу $\lambda$ производятся от $\lambda = -1$ до $\lambda = k$.

Если изменить определение величины $\Psi(n-\tau)$, положив здесь

$$\Psi(n-\tau) = \sum_{\sigma=-1}^{n-\tau-1} \Phi_0(n-\tau-\sigma-1)\, v_{-\sigma} \tag{2.4}$$

то все приведенные выше формулы для величин $E_n$, $\Delta_n$, $H_n$, $P_n$, $\Omega_n$ и формула (1.13) сохраняют свой вид с теми отличиями, что суммирование по индексу $\nu$ для определения величины $\Delta_n$ следует проводить до $\nu = n$ и что в формуле (1.13) суммирование по индексу $\nu$ также следует проводить до $\nu = n$, т. е.

$$\varepsilon_n = \Omega_n + h\sum_{\nu=1}^{n} \Psi(n-\nu)\, l_\nu \varepsilon_\nu \tag{2.5}$$

Отличие этой формулы от соответствующей ей формулы (1.13) заключается в том, что величина $\varepsilon_n$ входит не только слева, но и в правую часть формулы.

Подставляя в правую часть формулы (2.5) выражение для $\varepsilon_n$, получаем

$$\varepsilon_n = \Omega_n + h\sum_{\nu_1=1}^{n} \Psi(n-\nu_1)\, l_{\nu_1}\Omega_{\nu_1} + h^2 \sum_{\substack{\nu_1,\,\nu_2\\ 1\leqslant\nu_2\leqslant\nu_1\leqslant n}} \Psi(n-\nu_1)\,\Psi(\nu_1-\nu_2)\, l_{\nu_1} l_{\nu_2}\varepsilon_{\nu_2}$$

Продолжая этот процесс подстановки неограниченно, получим

$$\varepsilon_n = \Omega_n + \sum_{q=1}^{\infty} h^q \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q\\ 1\leqslant\nu_q\leqslant\ldots\leqslant\nu_1\leqslant n}} \Psi(n-\nu_1)\,\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Omega_{\nu_q} \tag{2.6}$$

при условии, что

$$h^q \sum_{\substack{\nu_{q-1},\ldots,\nu_q\\ \nu_q\leqslant\nu_{q-1}\leqslant\ldots\leqslant\nu_1\leqslant n}} \Psi(n-\nu_1)\,\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_{q-1}-\nu_q)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_{q-1}} \to 0$$

$$\text{при } q\to\infty \text{ для } \nu_q \leqslant n$$

Формула (2.6) заменяет формулу (1.15) в рассматриваемом случае. Соответствующим образом видоизменяются формулы (1.16) — (1.19). Выражение величины $\varepsilon_n^{(2)}$ через величины $\delta_\nu$ принимает следующий вид:

$$\varepsilon_n^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{n}\Bigg[\sum_{q=1}^{\infty} h^{q+1} \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q\\ \nu\leqslant\nu_q\leqslant\ldots\leqslant\nu_1\leqslant n}} \Psi(n-\nu_1)\,\Psi(\nu_1-\nu_2)\ldots\Psi(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Bigg]\delta_\nu \tag{2.7}$$

$$D^2(\varepsilon_n^{(2)}) = \sum_{\nu=1}^{n}\Bigg[\sum_{q=0}^{\infty} h^{q+1} \sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q\\ \nu\leqslant\nu_q\leqslant\ldots\leqslant\nu_1\leqslant n}} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_q-\nu)\, l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Bigg]^2 D^2(\delta_\nu) \tag{2.8}$$

Сохраняя те же предположения относительно корней характеристического уравнения интеграционной формулы и те же обозначения, величину дисперсии $D^2(\varepsilon_n^{(2)})$ можно оценить, основываясь на следующем неравенстве:

$$\Bigg|\sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_q \\ \nu\leqslant\nu_q\leqslant\ldots\leqslant\nu_1\leqslant n}} \Psi(n-\nu_1)\ldots\Psi(\nu_q-\nu)\,l_{\nu_1}\ldots l_{\nu_q}\Bigg| \leqslant C_{q+n-\nu}^q\,\Psi^{q+1}l^q$$

справедливость которого следует из того, что число различных комбинаций индексов $\nu_1,\ldots,\nu_q$ при условии $\nu\leqslant\nu_q\leqslant\ldots\nu_1\leqslant n$ в точности равно $C_{q+n-\nu}^q$. Кроме того, если $\Psi lh<1$, то

$$\sum_{q=0}^{\infty} C_{q+n+\nu}^q(\Psi lh)^q=(1-\Psi lh)^{-(n-\nu)}$$

Поэтому

$$D^2(\varepsilon_n^{(2)})\leqslant h^2\Psi^2\sum_{\nu=1}^{n}(1-\Psi lh)^{-2(n-\nu)}D^2(\delta_\nu)\leqslant\frac{\Psi h}{2l}\left[(1-\Psi lh)^{-2n}-1\right]D_\delta^2 \qquad (2.9)$$

Итак, оценки для величин $D^2(\varepsilon_n^{(2)})$ для методов чистого экстраполирования и интерполирования вперед по существу совпадают.

Аналогично получаем оценки

$$D^2(\varepsilon_n^{(3)})\leqslant\frac{\Phi^2}{2\Psi l}\left[(1-\Psi lh)^{-2n}-1\right]\frac{D^2\eta}{h} \qquad (2.10)$$

$$|\varepsilon_n^{(4)}|\leqslant\frac{\Phi}{\Psi l}\left[(1-\Psi lh)^{-n}-1\right]\frac{\rho}{h} \qquad (2.11)$$

$$|\varepsilon_n^{(1)}|\leqslant(k+1)\,\Phi\,(1-\Psi lh)^{-n}\varepsilon_-+(k+1)\,\Psi lh\,[1-\Psi lh]^{-(n-1)}\delta \qquad (2.12)$$

Оценки абсолютной величины для $\varepsilon_n^{(2)}$ и $\varepsilon_n^{(3)}$ имеют в рассматриваемом случае следующий вид:

$$|\varepsilon_n^{(2)}|\leqslant\frac{1}{l}\left[(1-\Psi lh)^{-(n-1)}-1\right]\delta \qquad (2.13)$$

$$|\varepsilon_n^{(3)}|\leqslant\frac{\Phi}{\Psi l}\left[(1-\Psi lh)^{-n}-1\right]\frac{\eta}{h} \qquad (2.14)$$

Все сказанное выше о различии между вероятностными оценками (1.24) и (1.26) и оценками максимума абсолютной величины (1.31) и (1.32) можно повторить и здесь относительно вероятностных оценок (2.9) и (2.10) и соответствующих им оценок максимума абсолютной величины (1.13) и (2.16).

Относительно близости полученных оценок (2.9), (2.10), (2.11) к точным можно сделать те же замечания, которые приведены выше относительно оценок (1.21), (1.25), (1.27). Интересно отметить, что проведенное исследование не обнаруживает существенного различия между порядком роста ошибок в случае чистого экстраполирования и порядком роста ошибок в случае интерполирования вперед.

## II. Системы дифференциальных уравнений

§ 3. Развитый выше метод оценки ошибок численного интегрирования одного дифференциального уравнения можно перенести на случай численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy^{(1)}}{dx} = f^{(1)}(x, y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}), \ldots, \qquad \frac{dy^{(r)}}{dx} = f^{(r)}(x, y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}) \tag{3.1}$$

при помощи интеграционной формулы (1.2) или же интеграционной формулы (2.1). Совокупность $r$ функций $y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}$ удобно рассматривать как $r$-мерный вектор $\mathbf{y} = \{y^{(1)}, \ldots, y^{(r)}\}$, а совокупность правых частей — как вектор-функцию $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$.

Соответственно через $\mathbf{y}_n$ будем обозначать вычисленное значение этого вектора для значения аргумента $x_n$, а через $\mathbf{y}(x_n)$ — истинное значение этого вектора. Положим $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{y}(x_n) - \mathbf{y}_n$ и через $\boldsymbol{\delta}_n$ будем обозначать $r$-мерный вектор, компоненты которого равны ошибкам вычисления правых частей системы (3.1) при $x = x_n$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_n$. Интегрирования системы можно проводить при помощи формулы типа (1.2) или формулы типа (2.1). В обоих случаях в формулах под буквой $y$ следует понимать вектор $\mathbf{y}$. Остаточные члены ($r$-мерный вектор) этих формул будем обозначать через $\boldsymbol{\rho}_{n+1}$, а вектор-ошибку при вычислении правой части этих формул через $\boldsymbol{\eta}_{n+1}$.

Если через $\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ обозначить разность между истинным значением вектора $d\mathbf{y}/dx$ при $x = x_n$ и вычисленным значением этого вектора, то

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n' = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}(x_n)) - \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \boldsymbol{\delta}_n$$

Если предположить существование непрерывных частных производных $\partial f^{(k)} / \partial y^{(l)}$, то вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{-1}$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^{-1} = L\boldsymbol{\varepsilon}_n + \delta_n$$

где $L_n$ — матрица $\| \partial f^{(k)} / \partial y^{(l)} \|$, значения элементов которой взяты в промежуточных точках. Положим

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\eta}_n + \boldsymbol{\rho}_n + h \sum_{\lambda=0}^{k} v_{-\lambda} \boldsymbol{\varepsilon}'_{n-\lambda-1}$$

Покажем, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ для каждого $n$ оказывается линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_{-k}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots, \boldsymbol{\pi}_n$. Это верно для $n = 1$, так как

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} \boldsymbol{\varepsilon}_{-\lambda} + \boldsymbol{\pi}_1$$

Кроме того, если это верно для всех индексов, не превосходящих $n$, то это верно и для $n + 1$, так как

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} \boldsymbol{\varepsilon}_{n-\lambda} + \boldsymbol{\pi}_{n+1}$$

и, следовательно, вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, являясь линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{\pi}_{n+1}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ $(s < n)$, оказывается линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_{-k}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \ldots, \boldsymbol{\pi}_{n+1}$, что и требовалось доказать.

Далее, так же как для случая одного уравнения, можно показать, что

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \sum_{\mu=0}^{k} \Phi_{-\mu}(n)\, \boldsymbol{\varepsilon}_{-\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_0(n-\nu)\, \boldsymbol{\pi}_\nu$$

где $\Phi_{-\mu}(n)$ $(\mu = 0, \ldots, k)$ означают то же, что и выше. Далее, повторяя те же выкладки, но заменяя всюду величины $\varepsilon_n$, $\delta_n$, $\eta_n$, $\rho_n$ векторами $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\boldsymbol{\delta}_n$, $\boldsymbol{\eta}_n$, $\boldsymbol{\rho}_n$, а величины $l_n$ матрицами $L_n$, получим выражение вектора ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ через ошибки вычислений, ошибки начальных данных и ошибки метода (остаточный член).

Таким образом, получаем формулы, аналогичные формулам (1.21), (1.25), (1.27) в случае интеграционной формулы типа (1.2) или формулам (2.7) и т. п. в случае интеграционной формулы типа (2.1). Так, например, (в понятных обозначениях):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \Bigg[ \sum_{q=0}^{n-\nu-1} h^{q+1} \sum_{\substack{\nu_1, \ldots, \nu_q \\ \nu < \nu_q < \ldots < \nu_1 < n}} \Psi(n-\nu_1) \ldots \Psi(\nu_q - \nu)\, L_{\nu_1} \ldots L_{\nu_q} \Bigg] \boldsymbol{\delta}_\nu \tag{3.2}$$

в случае интеграционной формулы (1.2) [см. (1.21)] и

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{n} \Bigg[ \sum_{q=0}^{\infty} h^{q+1} \sum_{\substack{\nu_1, \ldots, \nu_q \\ \nu \leqslant \nu_q \leqslant \ldots \leqslant \nu_1 \leqslant n}} \Psi(n-\nu_1) \ldots \Psi(\nu_q - \nu)\, L_{\nu_1} \ldots L_{\nu_q} \Bigg] \boldsymbol{\delta}_\nu \tag{3.3}$$

в случае интеграционной формулы (2.1).

Матрица $D^2(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(2)})$ получается при этом по следующей формуле:

$$D^2(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(2)}) = \sum_\nu A_\nu D(\boldsymbol{\delta}_\nu)\, A_\nu^* \tag{3.4}$$

где $A_\nu$ — матрица, стоящая в квадратных скобках справа в формулах (3.2) или (3.3). Отсюда следуют оценки для нормы матрицы $D^2(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(2)})$. Таким образом, для случая систем формулы, аналогичные формулам (1.24), (1.26), (1.28) и (2.9), (2.10), (2.11), выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}
\| D^2(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(2)}) \| \leqslant \frac{\Psi}{2\,\|L\|} [(1 + \Psi \|L\| h^2)^{2n} - 1]\, \|D_\delta{}^2\|\, h \\
\| D^2(\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(3)}) \| \leqslant \frac{\Phi^2}{2\Psi\,\|L\|} [(1 + \Psi \|L\| h)^{2n} - 1]\, \|D_{\boldsymbol{\eta}}{}^2\|\, h^{-1} \\
|\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(4)}| \leqslant \frac{\Phi}{\Psi\,\|L\|} [(1 + \Psi \|L\| h)^n - 1]\, \frac{|\boldsymbol{\rho}|}{h} \\
|\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(1)}| \leqslant (k+1)\,\Phi\,(1 + \Psi \|L\| h)^n\, |\boldsymbol{\varepsilon}_-| + \\
+ (k+1)\,\Psi \|L\| h\, (1 + \Psi \|L\| h)^{n-1}\, |\boldsymbol{\delta}| \\
|\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(2)}| \leqslant \frac{1}{\|L\|} [(1 + \Psi \|L\| h)^{n-1} - 1]\, |\boldsymbol{\delta}| \\
|\boldsymbol{\varepsilon}_n^{(3)}| \leqslant \frac{\Phi}{\Psi\,\|L\|} [(1 + \Psi \|L\| h)^n - 1]\, \frac{|\boldsymbol{\eta}|}{h}
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь через $|\rho|$, $|\varepsilon|$, $|\delta|$ и $|\eta|$ обозначены верхние границы длин соответствующих векторов $\rho_\nu$, $\varepsilon_{-\mu}$ $(\mu = 0, \ldots, k)$, $\delta_\nu$ и $\eta_\nu$, через $\| L \|$ — верхняя граница норм матриц $L_\nu$, через $\| D_\delta^2 \|$ и $\| D_\eta^2 \|$ — матрицы дисперсий векторов $\delta_\nu$ и $\eta_\nu$.

В этих оценках под нормой матрицы можно понимать любую норму, для которой выполнены аксиомы $\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|$ и $\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|$.

Выписанные оценки относятся к случаю интеграционной формулы (1.2). Соответствующие оценки в случае интеграционной формулы (2.2) будут

$$\| D^2 (\varepsilon_n^{(2)}) \| \leqslant \frac{\Psi}{2 \| L \|} [(1 - \Psi \| L \| h)^{-2n} - 1] \| D_\delta^2 \| h \tag{3.6}$$

$$\| D^2 (\varepsilon_n^{(3)}) \| \leqslant \frac{\Phi^2}{2 \Psi \| L \|} [(1 - \Psi \| L \| h)^{-2n} - 1] \frac{\| D_\eta^2 \|}{h}$$

$$| \varepsilon_n^{(4)} | \leqslant \frac{\Phi}{\Psi \| L \|} [(1 - \Psi \| L \| h)^{-n} - 1] \frac{\rho}{h}$$

$$| \varepsilon_n^{(1)} | \leqslant (k + 1) \Phi (1 - \Psi \|L\| h)^{-n} | \varepsilon_- | + (k + 1) \Psi \|L\| h (1 - \Psi \|L\| h)^{-(n-1)} | \delta |$$

$$| \varepsilon_n^{(2)} | \leqslant \frac{1}{\| L \|} [(1 - \Psi \| L \| h)^{-(n-1)} - 1] | \delta |$$

$$| \varepsilon_n^{(3)} | \leqslant \frac{\Phi}{\Psi \| L \|} [(1 - \Psi \| L \| h)^{-1} - 1] \frac{| \eta |}{h}$$

Сравнение оценок (3.5) и (3.6) не дает и здесь оснований считать порядок роста ошибки в случае интеграционной формулы (1.2) бóльшим, чем порядок роста ошибки в случае интеграционной формулы (2.1).

Поступила 29 IV 1952