

РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ТОРООБРАЗНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПОМОЩИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

С. А. Тумаркин

(Москва)

Расчет торообразных оболочек при помощи степенных рядов во многих случаях практически не выполним из-за плохой сходимости. Метод Рунге тоже часто непригоден, так как для получения необходимой точности двух-трех членов ряда бывает мало, а тогда метод Рунге теряет свои достоинства.

Тригонометрические ряды удобны для расчета по той причине, что известны преобразования уравнений торообразных оболочек^[1-4], при которых коэффициенты уравнений принимают вид $A \cos \theta$, $B \sin \theta$, $C + \sin \theta$.

В интересной работе Е. Ф. Зеновой и В. В. Новожилова^[3] решение для торообразной оболочки дается как сумма частного решения, имеющего вид тригонометрического ряда, и решения однородного уравнения, приближенно выраженного функциями Ганкеля.

В своей практической работе мы также пользовались тригонометрическими рядами для расчета торообразных оболочек. При этом все решение, а не только частное решение представлялось тригонометрическим рядом.

Соединение тригонометрических рядов с функциями Ганкеля мы считаем нецелесообразным по следующей причине. Решение при помощи функций Ганкеля имеет асимптотический характер, и его точность тем выше, чем тоньше оболочка.

Напротив, сходимость тригонометрического ряда улучшается при увеличении толщины оболочки.

Таким образом, при соединении обоих решений сходимость ухудшается как для весьма тонких оболочек, так и для оболочек значительной толщины; в первом случае из-за тригонометрического ряда, во втором из-за функций Ганкеля.

Ниже излагается метод расчета торообразных оболочек при помощи одних лишь тригонометрических рядов¹.

Возможность выразить тригонометрическим рядом общее, а не частное решение обусловлена тем, что тригонометрические ряды берутся для старших производных неизвестных функций, а не для самих функций, как у Е. Ф. Зеновой и В. В. Новожилова. При этом тригонометрические ряды интегрируются, что, как известно, связано с значительно меньшими ограничениями, чем дифференцирование тригонометрических рядов. Что касается функций Ганкеля, то мы считаем, что их назначение — служить для асимптотического решения в случае тонкой оболочки, без соединения их с тригонометрическими рядами.

Тригонометрический ряд Е. Ф. Зеновой и В. В. Новожилова, а следовательно, и решение пригодны только для частного вида нагрузки — равномерное нормальное давление и осевая сила. Данное ниже решение годно для любой симметричной нагрузки. Как пример нагрузки, отличной от равномерного нормального давления, укажем нагрузку частей центрифуги, профилированных по тору, центробежными силами.

¹ Этот метод был разработан нами в связи с расчетами температурных компенсаторов во Всесоюзном научно-исследовательском институте санитарно-технического оборудования.

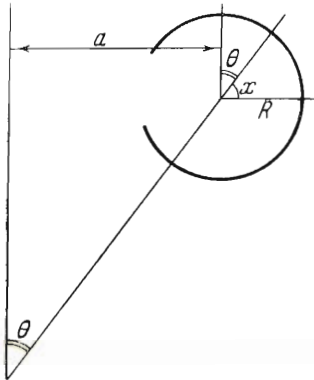
§ 1. Решение тригонометрическими рядами. Уравнение торообразной оболочки может быть приведено к виду [3, 4]

$$(1 + \alpha \sin \theta) \frac{d^2 V}{d\theta^2} - \alpha \cos \theta \frac{dV}{d\theta} + \beta \sin \theta V = 2k^2 D \cos \theta \quad (1.1)$$

Здесь V — комплексная неизвестная функция и

$$\alpha = \frac{R}{a}, \quad 2k^2 = \sqrt{12(1 - \mu^2)} \frac{R^2}{ah}$$

$$\beta = i2k^2, \quad D = -\left(2k^2 A + i \frac{\alpha R}{2} p\right)$$



Фиг. 1

причем h — постоянная толщина оболочки, обозначения R , a , θ приведены на фиг. 1. Зная V , можно определить напряжения и деформации в оболочке [3, 4]. Правая часть уравнения (1.1) соответствует оболочке, нагруженной равномерным давлением p и осевой силой. Покажем, как получить уравнение с конечной правой частью для нагрузки общего вида. Можно убедиться, что замена переменной [4] (стр. 279)

$$Z = V - \beta A \operatorname{ctg} \theta$$

сохраняет силу, если только постоянную A брать равной

$$A = a \int_0^{\theta_0} (g_n \cos \theta - g_1 \sin \theta) (1 + \alpha \sin \theta) d\theta - \frac{1}{\alpha} (1 + \alpha \sin \theta_0) \sin \theta_0 (T_1^*)_{\theta_0},$$

где θ_0 — значение θ , для которого известно усилие T_1^* по безмоментной теории, g_n и g_1 — составляющие поверхностной нагрузки по нормали и по меридиану. Правая часть уравнения (1.1), функция нагрузки, при этом заменяется выражением

$$\Phi(\theta) = \beta^2 A \cos \theta + \beta a (1 + \alpha \sin \theta)^2 \frac{d}{d\theta} \left\{ \alpha g_n + \frac{1}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{1}{\sin^2 \theta} \int_0^{\theta} \sin \theta \left[(1 + \alpha \sin \theta) \left(g_1 + \frac{d g_n}{d\theta} \right) + \alpha g_n \cos \theta \right] d\theta \right\} \quad (1.2)$$

Это выражение имеет конечное значение при $\theta = 0$.

Заменим независимую переменную θ переменной $x = \frac{1}{2} \pi - \theta$ (фиг. 1). Уравнение принимает вид:

$$(1 + \alpha \cos x) \frac{d^2 V}{dx^2} + \alpha \sin x \frac{dV}{dx} + \beta \cos x V = \Phi \quad (1.3)$$

Если рассматривается задача с начальными условиями при $\theta = \theta_1$, то V и dV/dx при $\theta = \theta_1$ известны, поскольку усилия и деформации выражаются через действительную и мнимую части V и dV/dx (см., например, [4], стр. 280 для случая равномерного нормального давления и осевой силы). Для задач с краевыми условиями известны V или dV/dx , либо их действительные или мнимые части.

Если не пользоваться комплексными представлениями, то система двух действительных уравнений В. И. Феодосьева, например, для оболочки, растянутой осевой силой, имеет вид [1, 2]:

$$(k + \cos x) \frac{d^2 W}{dx^2} + \sin x \frac{dW}{dx} + (1 + \mu) \cos x W - EhR \cos x \Theta = (1 + \mu) \frac{Pk}{2\pi} \sin x$$

$$(k + \cos x) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} + \sin x \frac{d\Theta}{dx} + (1 - \mu) \cos x \Theta + \frac{R}{D} \cos x W = -\frac{R}{D} \frac{Pk}{2\pi} \sin x$$

Здесь W и Θ — неизвестные функции, P — осевая сила,

$$k = \frac{a}{R}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \tag{1.5}$$

Рассмотрим интервал $0 < x < \pi$. Беря уравнение в комплексной форме (1.3), можем разложить старшую производную неизвестной функции в ряд по синусам:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \tag{1.6}$$

Меняя обозначение коэффициентов и интегрируя дважды, получаем для интервала $0 < x < \pi$:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n \sin nx \tag{1.7}$$

$$\frac{dV}{dx} = m + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx \tag{1.8}$$

$$V = l + mx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{1.9}$$

где l и m — постоянные интегрирования.

Ряды dV/dx и V , полученные интегрированием, сходятся равномерно и годны для концов отрезка $0 \leq x \leq \pi$. Функцию нагрузки тоже разложим в ряд по синусам:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin nx \quad \left(\gamma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi \sin nx dx \right) \tag{1.10}$$

Разложим также $l + mx$, пользуясь формулами

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}, \quad x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \tag{1.11}$$

Подставим ряды (1.7) — (1.11) в уравнение (1.3) и воспользуемся соотношениями

$$\cos x \sin nx = \frac{1}{2} \sin(n+1)x + \frac{1}{2} \sin(n-1)x$$

$$\sin x \cos nx = \frac{1}{2} \sin(n+1)x - \frac{1}{2} \sin(n-1)x$$

Сравнивая коэффициенты при гармониках $\sin nx$, для определения комплексных неизвестных $l, m, b_1, b_2, b_3, \dots$, получаем бесконечную

систему уравнений (каждое из которых содержит не более пяти неизвестных):

$$\begin{aligned} -1^2 b_1 + \frac{1}{2} (\beta - 2 \cdot 3 \cdot \alpha) b_2 + (\alpha - \frac{1}{2} \beta) m &= \gamma_1 \\ -n^2 b_n + \frac{1}{2} [\beta - (n-1)(n-2)\alpha] b_{n-1} + \frac{1}{2} [\beta - (n+1)(n+2)\alpha] b_{n+1} + \\ + \frac{(-1)^n 2n}{n^2-1} \beta m + \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{4}{\pi} \frac{n}{n^2-1} \beta l &= \gamma_n \quad (n=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (1.12)$$

К этим уравнениям присоединяются начальные или краевые условия, которые приводят к зависимостям для тех же неизвестных или для их действительных и мнимых частей. Так, если даны начальные значения V_1 и $(dV/dx)_1$ при $x = x_1$, то из (1.8) и (1.9) получаются два уравнения:

$$l + mx_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx_1 = V_1, \quad m + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx_1 = \left(\frac{dV}{dx}\right)_1 \quad (1.13)$$

Комплексные уравнения бесконечной системы (1.12) можно представить в действительной форме, разделяя действительные и мнимые части. Комплексное дифференциальное уравнение (1.3) тоже можно разбить на два действительных уравнения. Если исходить от действительных уравнений в форме (1.4), то, подобно (1.6), берем ряды для старших производных:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx, \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

Вместо комплексных уравнений (1.12) получаются пары действительных уравнений. Для дальнейшего их следует писать в виде, разрешенном относительно старших коэффициентов A_{n+1} и B_{n+1} .

§ 2. Решение бесконечной системы уравнений для коэффициентов ряда. Известно заранее, что бесконечная система уравнений для коэффициентов имеет решение. Имеются два пути решения этой системы. Ее можно рассматривать либо как систему с конечной суммой квадратов коэффициентов при неизвестных^[5] (стр. 56), либо как систему, уравнения которой, начиная с некоторого номера, вполне регулярны^[5] (стр. 37). Заметим, что сумма квадратов коэффициентов при неизвестных в (1.13) будет сходящейся, если заменить неизвестные b_n коэффициентами (1.6), беря $b_n = -B_n/n^2$.

Первый путь позволяет дать для неизвестных явные выражения в виде пределов отношений определителей^[5] (стр. 57). Второй путь, более удобный для численного решения, — это способ редукции или усеченных систем^[5] (стр. 42). Если в ряде (1.7) сохранить только первые ν гармоник, полагая $b_{\nu+1} = b_{\nu+2} = \dots = 0$, то бесконечная система (1.12) превратится в усеченную систему ν уравнений с $\nu + 2$ комплексными неизвестными $l, m, b_1, b_2, \dots, b_\nu$, причем в последнем уравнении $b_{\nu+1}$ надо считать равным нулю. Начальные или краевые условия дадут недостающие уравнения для этих неизвестных. Усеченные системы удобно решать следующим образом.

Примем l , m и b_1 за основные неизвестные. Уравнения (1.12) позволяют последовательно выразить b_2, b_3, \dots через l, m и b_1 . Имеем

$$\begin{aligned} b_2 &= \mu_2 m + \beta_2 b_1 + \delta_2 \\ b_3 &= \lambda_3 l + \mu_3 m + \beta_3 b_1 + \delta_3 \\ b_4 &= \lambda_4 l + \mu_4 m + \beta_4 b_1 + \delta_4 \\ &\dots \dots \dots \\ b_{v+1} &= \lambda_{v+1} l + \mu_{v+1} m + \beta_{v+1} b_1 + \delta_{v+1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Коэффициенты этих выражений не зависят от числа гармоник v . Последнее уравнение, где $b_{v+1} = 0$, дает соотношение между l, m, b_1 :

$$\lambda_{v+1} l + \mu_{v+1} m + \beta_{v+1} b_1 + \delta_{v+1} = 0 \tag{2.2}$$

Начальные или краевые условия дают недостающие соотношения для этих трех неизвестных или для их действительных и мнимых частей. При этом используются выражения b_2, b_3, \dots, b_v через l, m, b_1 . В результате получается приближенное значение V , содержащее v гармоник:

$$V = l + mx + \sum_{n=1}^v b_n \sin nx$$

где коэффициенты l, m, b_n изменяются с изменением числа гармоник. Коэффициенты выражений (2.1) не зависят от числа гармоник v . Благодаря этому легко узнается число гармоник, которые надо сохранить. Вычисляют l, m, b_1 , сохраняя, например, четыре гармоники, а потом пять гармоник. Если при этом l, m, b_1 изменяются незначительно, то достаточно четыре гармоник.

§ 3. Начальные или краевые условия. Если часть задачи рассматривается как задача с начальными условиями, как это бывает при сопряжении оболочек, то в начальном сечении V и dV/dx считаются известными. Уравнения (1.8) и (1.9) вместе с уравнением (2.2) дают три уравнения для неизвестных l, m и b_1 . При этом b_2, b_3, \dots, b_v заменяются выражениями (2.1); $b_{v+1} = b_{v+2} = \dots = 0$.

Для задачи с краевыми условиями заданы либо V и dV/dx , либо их действительные или мнимые части. Уравнение (2.2) позволяет выразить одну из неизвестных через две другие, например b_1 через l и m . Уравнения (1.8) и (1.9) в наименее благоприятном случае дадут четыре уравнения для действительных и мнимых частей неизвестных l и m .

Пример 1. Рассмотрим растяжение разрезанной торообразной оболочки (фиг. 2) осевыми силами и внутренним давлением при условии, что разрезанный край, где $x = \pi$ (или $\theta = -1/2 \pi$), не может поворачиваться и на нем нет перерезывающей силы. По условиям симметрии в сечении, где $x = 0$ (или $\theta = 1/2 \pi$), угол поворота и перерезывающая сила также равны нулю. Из выражений поворота и перерезывающей силы [4] (стр. 280) видно, что



Фиг. 2

$$\operatorname{Re} V = 0, \quad \operatorname{Im} V = 0, \quad \text{т. е. } V = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = \pi$$

Из (1.9) заключаем, что $l = m = 0$. Затем определяем b_1 из уравнения (2.2) и b_2, b_3, \dots, b_v из уравнений (2.1). После этого уравнение (1.9) дает значение V :

$$V = \sum_{n=1}^v b_n \sin nx \quad (3.1)$$

Пример 2. Рассмотрим тот же случай при условии, что разрезанный край не поворачивается и не может смещаться радиально.

По симметрии при $x=0$ поперечно $V=0$ и в силу (1.9) будет $l=0$. При $x=\pi$ условие отсутствия поворота дает $\operatorname{Re} V=0$ или в силу (1.9) $\operatorname{Re} m=0$. Условие отсутствия радиального смещения при $x=\pi$ дает^[4], (стр. 280)

$$\frac{1}{2k^2} \operatorname{Im} \frac{dV}{dx} = (1 + \mu) \alpha A - \frac{RP}{2} (1 - \alpha - 2\mu + \alpha\mu) \quad (3.2)$$

В силу (1.8) это условие означает

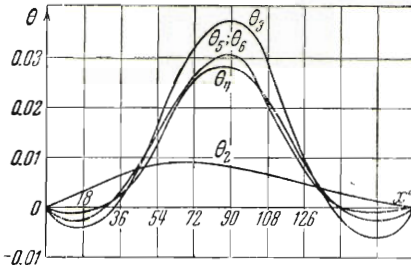
$$\frac{1}{2k^2} \operatorname{Im} (m - b_1 + 2b_2 - 3b_3 + \dots b_v) = (1 + \mu) \alpha A - \frac{RP}{2} (1 - \alpha - 2\mu + \alpha\mu) \quad (3.3)$$

Итак $l=0$; величины b_2, \dots, b_v выражаются через m и b_1 при помощи (2.1);

b_1 выражается через m из (2.2); наконец, $\operatorname{Re} m=0$, а $\operatorname{Im} m$ находится из (3.3). В результате известно приближение (1.9) с v -гармониками.

§ 4. Пример расчета. Разрезанная торообразная оболочка (фиг. 2) растягивается осевой силой $P=1000$ кг при крайних условиях, указанных в примере 1 § 3. Геометрические размеры (фиг. 1):

$$R = 5 \text{ см}, \quad a = 16 \text{ см}, \quad h = 0.3 \text{ см}.$$



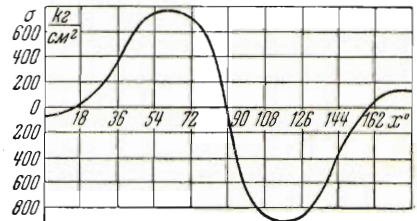
Фиг. 3

Уравнения оболочки взяты для расчета в действительной форме (1.4). На фиг. 3 показаны значения Θ при сохранении различных чисел гармоник (числа гармоник показаны индексами). На графике Θ_5 и Θ_6 сливаются. Практически достаточную точность дает уже Θ_4 , т. е. ряд из четырех гармоник. Величина щели при растяжении тора

$$\Delta = 2R \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{a/R + \cos x} \Theta dx = ,912 \text{ мм}$$

Напряжения изгиба σ меридиональным моментом M_1 показаны на фиг. 4.

Поступила 22 II 1952



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. К расчету гофрированных коробок (сильфонов). Инженерный сборник АН СССР. 1947. Т. IV. Вып. 1.
2. Пономарев С. Д. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Машгиз. 1950.
3. Зенова Е. Ф. и Новожилов В. В. Симметричная деформация торообразных оболочек. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 5.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз. 1951.
5. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеоретиздат. 1950.