Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ШТУРМОВЫХ СИСТЕМ

М. Г. Крейн

(Одесса)

Недавно [1,2] автору удалось найти критерий того, чтобы наперед заданная последовательность положительных чисел $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ была последовательностью всех частот свободных гармонических колебаний некоторой струны S, тем или иным способом закрепленной на своих концах.

Если длину l струны S увеличить в λ раз, ее натяжение T увеличить в τ раз, а массу каждого участка струны в $\tau\lambda^{-1}$ раз, то частоты ее не изменятся. Поэтому без ограничения общности можно ограничиться рассмотрением струн S, для которых $l=1$, $T=1$.

Упомянутый выше критерий получается попутно при решении следующей задачи.

Дана последовательность положительных чисел $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$. Требуется найти струну S (с $l=1$, $T=1$) наименьшей массы M, имеющую последовательность $\{p_j\}$ своим спектром частот. При этом, конечно, предполагается, что задан способ закрепления струны на ее концах.

Решение этой задачи приводит к решению следующего вопроса.

Заданы первые n частот $p_1 < p_2 < p_3 < p_n$ струны S и величина ML / T. Требуется найти точную нижнюю границу для частоты p_{n+1} струны S и выяснить, когда она достигается.

Указанные задачи могут быть поставлены для системы с конечным числом степеней свободы, т. е. для нити с конечным числом сосредоточенных масс. В этом случае аппарат стильтьесовских цепных дробей позволяет дать им алгебраическое решение, изложению которого и посвящена в основном настоящая статья (§§ 1—3).

Решение задач в алгебраическом случае (для систем с конечным числом степеней свободы) подсказывает основные факты, имеющие место в трансцендентном случае (для струны со сплошными и сосредоточенными массами). Изложению этих фактов без их доказательств (требующих тонких средств функционального анализа) посвящен последний параграф (§ 4).

В дальнейшем всюду принимается схема нити с конечным числом n сосредоточенных масс. В силу существования известных динамических и электрических аналогий можно было бы изложить все результаты в терминах теории крутильных колебаний валов с n дисками или теории электрических цепей (без омического сопротивления) с последовательно включенными емкостями и индукциями.

§ 1. Решение основной задачи для системы $S_{\mathrm{I}}^{(n)}$ с одним неподвижным концом, другим — свободно скользящим. 1°. В дальнейшем $S^{(n)}$ будет означать нить единичной длины, натянутую единичной силой и несущую n сосредоточенных масс $m_1, \ldots, m_n$.

Предполагая, что массы занумерованы в порядке их расположения от левого конца нити к правому, обозначим через $l_0, l_1, \ldots, l_n$ длины участков, на которые точки приложения масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$ делят нить, при этом l_0 означает расстояние массы m_1 от левого конца нити ($l_0 \geqslant 0$), а l_n — расстояние массы m_n от правого конца ($l_n \geqslant 0$).

Будем рассматривать следующие случаи закрепления концов нити:

1) правый конец нити закреплен неподвижно, левый свободно скользит;

2) оба конца нити закреплены неподвижно;

3) оба конца нити свободно скользят[1].

Соответственно тому, какой из этих случаев имеет место, мы будем обозначать систему $S^{(n)}$ через $S_{\mathrm{I}}{}^{(n)}$, $S_{\mathrm{II}}{}^{(n)}$ и $S_0{}^{(n)}$. Таким образом, цифра в индексе будет указывать число неподвижных концов нити.

В этом параграфе рассматривается система $S_{\mathrm{I}}{}^{(n)}$.

Приложим к левому концу нити поперечную силу $F = F_a \sin pt$. Эта сила вызовет вынужденное колебание струны, в котором левый конец будет колебаться по закону $y = y_a \sin pt$, при этом $y_a = \Gamma F_a$ ($\Gamma = \Gamma(\lambda)$, $\lambda = p^2$), где Γ — так называемый коэффициент динамической податливости; он допускает представление в виде конечной дроби Стильтьеса [3—6]:

$$\Gamma(\lambda) = l_0 + \cfrac{1}{-m_1\lambda + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{-m_2\lambda + \ddots + \cfrac{1}{-m_n\lambda + \cfrac{1}{l_n}}}}} \tag{1.1}$$

Обозначим через $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ соответственно знаменатель и числитель этой цепной дроби. Легко видеть, что

$$P(0) = 1, \qquad Q(0) = l_0 + l_1 + \cdots + l_n = 1$$

Поэтому разложение многочленов P и Q на линейные множители приводит к следующему представлению:

$$\Gamma(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} = \prod_1^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_j}\right) \Big/ \prod_1^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \tag{1.2}$$

Так как $\Gamma(\lambda)$ обращается в бесконечность, когда $p = \sqrt{\lambda}$ совпадает с одной из резонансных частот, т. е. одной из частот p_j ($j = 1, \ldots, n$) свободных гармонических колебаний рассматриваемой системы $S_{\mathrm{I}}{}^{(n)}$ из нити с n сосредоточенными массами, то $\lambda_j = p_j{}^2$ ($j = 1, \ldots, n$).

Аналогично $\Gamma(\lambda)$ обращается в нуль, если $p = \sqrt{\lambda}$ совпадает с одной из антирезонансных частот, т. е. с одной из частот q_j ($j = 1, \ldots, n$) системы $S_{\mathrm{II}}{}^{(n)}$, получающейся из $S_{\mathrm{I}}{}^{(n)}$ путем неподвижного закрепления ее левого конца. Таким образом, $\mu_j = q_j{}^2$ ($j = 1, \ldots, n$).

Как известно (см., например, [6]):

$$(0 <)\ \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots < \mu_{n-1} < \lambda_n < \mu_n \tag{1.3}$$

Если $l_0 = 0$, то $Q(\lambda)$ вырождается в многочлен $(n-1)$-й степени. Этот случай мы будем толковать, как такой, для которого $\mu_n = q_n{}^2 = \infty$.

---

[1] В случае свободно скользящего конца нити предполагается схема, при которой конец нити скреплен с колечком ничтожного радиуса, свободно скользящим по идеально гладкой проволоке, перпендикулярной к равновесному положению нити.

В дальнейшем важную роль будет играть то обстоятельство, что соотношения (1.1) и (1.2) дают решение так называемой обратной задачи. Это означает следующее. Пусть заданы $2n$ чисел

$$(0<)\ p_1<q_1<p_2<q_2<\cdots<q_{n-1}<p_n<q_n\,(\leqslant\infty)$$

Тогда составленная по формуле (1.2), где $\lambda_j=p_j^2\,(j=1,\ldots,n)$, а $\mu_j=q_j^2\,(j=1,\ldots,n)$, функция $\Gamma(\lambda)$ будет допускать разложение вида (1.1) с $l_0\geqslant 0$ и положительными $m_j,\ l_j\,(j=1,\ldots,n)$ и, следовательно, будет существовать (и притом единственная) система $S_{\mathrm{I}}^{(n)}$ с заданными резонансными и антирезонансными частотами $p_1,\ldots,p_n$ и $q_1,\ldots,q_n$.

2°. Рассмотрим предпоследнюю подходящую дробь цепной дроби (1.1):

$$\Gamma_1=\frac{Q_1(\lambda)}{P_1(\lambda)}=l_0+\cfrac{1}{-m_1\lambda+\cfrac{1}{l_1+\ddots+\cfrac{1}{-m_n\lambda}}} \tag{1.4}$$

Легко видеть, что

$$P_1(\lambda)=-M\lambda+\cdots+a_n^{(1)}\lambda^n,$$

$$Q_1(\lambda)=1+b_1^{(1)}\lambda+\cdots+b_n^{(1)}\lambda^n \qquad (M=m_1+\cdots+m_n)$$

В силу известных соотношений между последовательными подходящими дробями

$$P(\lambda)\,Q_1(\lambda)-P_1(\lambda)\,Q(\lambda)=1 \tag{1.5}$$

Очевидно,

$$\frac{P_1(\lambda)}{P(\lambda)}=\lambda\sum_1^n\frac{P_1(\lambda_j)}{\lambda_jP'(\lambda_j)(\lambda-\lambda_j)} \tag{1.6}$$

С другой стороны, полагая $\lambda=\lambda_j$ в (1.5), находим, что

$$-P_1(\lambda_j)\,Q(\lambda_j)=1 \qquad (j=1,\ldots,n)$$

Таким образом,

$$\frac{P_1(\lambda)}{P(\lambda)}=-\lambda\sum_{j=1}^n\frac{1}{\lambda_jP'(\lambda_j)\,Q(\lambda_j)(\lambda-\lambda_j)}$$

Разделив на λ и устремляя затем λ к нулю, найдем, что

$$M=-\sum_1^n\frac{1}{\lambda_j^2P'(\lambda_j)\,Q(\lambda_j)} \tag{1.7}$$

Заметим, что в силу (1.3)

$$P'(\lambda_j)\,Q(\lambda_j)<0 \tag{1.8}$$

Теорема 1. Пусть $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$ — произвольная последовательность положительных чисел. Тогда величина

$$M_m=\left\{\sum_1^n\frac{1}{\lambda_j^{3/2}\,|P'(\lambda_j)|}\right\}^2 \tag{1.9}$$

где

$$P(\lambda)=\prod_1^n\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)$$

дает наименьшее возможное значение для масс M всех систем $S_{\mathrm{I}}^{(n)}$, имеющих данный спектр частот $p_j = \sqrt{\lambda_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Минимум M_m достигается для единственной системы $S_{\text{I}}^{(n)}$, а именно той, которая имеет динамический коэффициент податливости:

$$\Gamma_m(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{M_m}} \sum_1^n \frac{1}{\lambda_j^{1/2} \, | P'(\lambda_j) | \, (\lambda_j - \lambda)} \tag{1.10}$$

Для этой системы $l_0 = 0$.

Доказательство. Система $S_{\text{I}}^{(n)}$, имеющая данный спектр $\{\sqrt{\lambda_j}\}_1^n$ частот, вполне определяется заданием своей системы антирезонансных частот $\{\sqrt{\mu_j}\}_1^n$, которые должны удовлетворять неравенствам (1.3). Рассматривая $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ как параметры этой системы, изменяющиеся в пределах (1.3), согласно (1.7) получаем M в виде рациональной функции этих параметров: $M = M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$.

Из этого выражения для M ясно видно, что при фиксированных $\mu_1, \ldots, \mu_n$ масса M будет тем меньше, чем больше μ_n. Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь тех систем $S_{\text{I}}^{(n)}$, для которых $\mu_n = \infty$, т. е. $l_0 = 0$. Для таких систем $M = M(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$.

При стремлении хотя бы одного μ_k к λ_k или λ_{k+1} $(k = 1, \ldots, n-1)$ полная масса $M(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ независимо от значений других μ_j стремится к $+\infty$. Поэтому в области $\lambda_k < \mu_k < \lambda_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ функция $M(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ имеет по крайней мере один минимум. В точке, где такой минимум достигается:

$$-\frac{\partial M}{\partial \mu_k} = \frac{1}{\mu_k} \sum_1^n \frac{1}{\lambda_j P'(\lambda_j) \, Q(\lambda_j) \, (\mu_k - \lambda_j)} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{\partial}{\partial \mu_k} \left(\frac{1}{Q(\lambda_j)} \right) = \frac{\partial}{\partial \mu_k} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda_j}{\mu_i} \right)^{-1} = \frac{\lambda_j}{\mu_k Q(\lambda_j) \, (\mu_k - \lambda_j)}$$

Таким образом, числа μ_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ в точке минимума суть нули рациональной функции:

$$R(\lambda) = \sum_1^n \frac{1}{\lambda_j P'(\lambda_j) \, Q(\lambda_j) \, (\lambda - \lambda_j)} \tag{1.11}$$

Так как, с другой стороны, они являются нулями многочлена $Q(\lambda)$, то найдется константа h такая, что:

$$R(\lambda) = h \frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} = h \sum_1^n \frac{Q(\lambda_j)}{P'(\lambda_j) \, (\lambda - \lambda_j)} \tag{1.12}$$

Сопоставляя (1.11) и (1.12), находим, что

$$\lambda_j P'(\lambda_j) \, Q(\lambda_j) = \frac{P'(\lambda_j)}{h Q(\lambda_j)} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Отсюда $h > 0$ и

$$Q(\lambda_j) = \pm \frac{1}{\sqrt{h \lambda_j}} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.13}$$

Внося эти выражения в (1.12) и учитывая при этом (1.8), получим

$$\frac{Q(\lambda)}{P(\lambda)} = -\frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^{1/2}\,|P'(\lambda_j)|\,(\lambda - \lambda_j)} \tag{1.14}$$

Так как $Q(0) = P(0) = 1$, то, полагая здесь $\lambda = 0$, находим

$$\sqrt{h} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^{3/2}\,|P'(\lambda_j)|} \tag{1.15}$$

С другой стороны, подстановка значений (1.13) для $Q(\lambda_j)$ в (1.7) даст

$$M_m = \sqrt{h} \sum_{1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^{3/2}\,|P'(\lambda_j)|} = h \tag{1.16}$$

Равенствами (1.16), (1.15) и (1.14) теорема полностью доказана.

3°. Полученное значение (1.9) для M_m есть некоторая функция

$$M_m = \Phi_n^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad (0 <)\ \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$$

где

$$\Phi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^{3/2}\,|P'(\lambda_j)|} \qquad \left(P(\lambda) = \prod_{1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\right) \tag{1.17}$$

Легко видеть, что с возрастанием λ_n при фиксированных $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ функция Φ_n убывает и

$$\Phi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \infty) = \lim_{\lambda_n \to \infty} \Phi_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Phi_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

Таким образом, для любой системы $S_1^{(n)}$, имеющей массу M и частоты $p_j = \sqrt{\lambda_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$:

$$\Phi_1(\lambda_1) < \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) < \cdots < \Phi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \leqslant \sqrt{M} \tag{1.18}$$

Замечая, что

$$\Phi_1^2(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1}, \qquad \Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1}\,(\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_2}\,(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2}{p_1 p_2 (p_2 - p_1)}$$

получаем, в частности, соотношения

$$p_1 \geqslant \sqrt{\frac{1}{M}}, \qquad (\sqrt{M} p_1 - 1)\, p_2^2 - p_1 (\sqrt{M} p_1 - 1)\, p_2 - p_1^2 \geqslant 0 \tag{1.19}$$

Неравенство (1.19) есть непосредственное следствие известного неравенства Н. Е. Жуковского [7] (см. также [8]). Знак равенства в (1.19) достигается только при $n = 1$, когда нить несет единственную массу, сосредоточенную на ее левом конце.

Решая неравенство (1.20) относительно p_2, легко находим

$$p_2 \geqslant \frac{p_1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\sqrt{M} p_1 - 1}}\right) \tag{1.20}$$

Таким образом, мы получили оценку снизу для p_2 по данным p_1 и M для любой системы $S_1^{(n)}$.

Это оценка «точная»: знак равенства в соотношении (1.20) достигается при $n=2$. Массы m_1, m_2 и расстояние l_1 между ними в системе $S_{\mathrm{I}}^{(2)}$, для которой в (1.20) имеет место равенство, найдутся согласно (1.10) из соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\left\{\frac{\lambda_2\sqrt{\lambda_1}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda)}+\frac{\lambda_1\sqrt{\lambda_2}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda)}\right\}=\cfrac{1}{-m_1\lambda+\cfrac{1}{l_1+\cfrac{1}{-m_2\lambda+\cfrac{1}{1-l_1}}}}$$

Замечание. Если не предполагать, что длина нити L, равно как и ее натяжение T, равны единице, то все соотношения (1.18), (1.19) и (1.20), как легко видеть (см. введение), сохранят силу, если в них величину M заменить величиной ML/T.

§ 2. Решение задачи для системы $S_{\mathrm{II}}^{(n)}$. **1°** Предварительно преобразуем выражения (1.7) для массы M к иному виду. Для этого воспользуемся разложением

$$\frac{1}{P(\lambda)Q(\lambda)}=1+\lambda\sum_1^n\frac{1}{\lambda_j P'(\lambda_j)Q(\lambda_j)(\lambda-\lambda_j)}+\lambda\sum_1^n\frac{1}{\mu_j Q'(\mu_j)P(\mu_j)(\lambda-\mu_j)} \tag{2.1}$$

Так как

$$P(\lambda)=1-\left(\sum_1^n\frac{1}{\lambda_j}\right)\lambda+\cdots,\qquad Q(\lambda)=1-\left(\sum_1^n\frac{1}{\mu_j}\right)\lambda+\cdots$$

то

$$\frac{1}{P(\lambda)Q(\lambda)}=1+\left\{\sum_1^n\frac{1}{\lambda_j}+\sum_1^n\frac{1}{\mu_j}\right\}\lambda+\cdots \tag{2.2}$$

С другой стороны, из (2.1) легко найдем, что

$$\frac{1}{P(\lambda)Q(\lambda)}=1-\left\{\sum_1^n\frac{1}{\lambda_j^2 P'(\lambda_j)Q(\lambda_j)}+\sum_1^n\frac{1}{\mu_j^2 Q'(\mu_j)P(\mu_j)}\right\}\lambda+\cdots \tag{2.3}$$

Приравнивая коэффициенты при λ из (2.1) и (2.3), получим на основании (1.7)

$$M=\sum_1^n\frac{1}{\mu_j^2 Q'(\mu_j)P(\mu_j)}+\sum_1^n\frac{1}{\lambda_j}+\sum_1^n\frac{1}{\mu_j} \tag{2.4}$$

При помощи этого выражения M докажем следующее предложение.

Теорема 2. Пусть $\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n$ — произвольная последовательность положительных чисел. Тогда величина

$$M^{(m)}=4\sum_1^{[\frac{1}{2}(n+1)]}\frac{1}{\mu_{2j-1}^2|Q'(\mu_{2j-1})|} \tag{2.5}$$

где

$$Q(\lambda)=\prod_1^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu_j}\right)$$

дает наименьшее возможное значение для масс M всех систем $S_{\mathrm{II}}^{(n)}$, имеющих данный спектр частот $q_j=\sqrt{\mu_j}$ $(j=1,\ldots,n)$.

Среди систем $S_{II}^{(n)}$ с данным спектром имеется только одна, удовлетворяющая условию симметрии относительно середины нити. Для этой и только этой системы достигается минимум $M^{(m)}$.

Доказательство. Пусть $S_{II}^{(n)}$ — какая-либо система с частотами $q_j = \sqrt{\mu_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, а $S_I^{(n)}$ — система, получающаяся из системы $S_{II}^{(n)}$ путем замены неподвижного левого конца свободно скользящим. Величины масс m_j $(j = 1, \ldots, n)$ и их расположение вполне определяются заданными частотами q_j $(j = 1, \ldots, n)$ системы $S_{II}^{(n)}$ и частотами $p_j = \sqrt{\lambda_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ системы $S_I^{(n)}$, соответствующей $S_{II}^{(n)}$. Поэтому числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, связанные с числами $\mu_1, \ldots, \mu_n$ неравенствами (1.3), можно рассматривать как параметры системы $S_{II}^{(n)}$. Масса $M = M[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ системы $S_{II}^{(n)}$ выражается через эти параметры по формуле (2.4). Подобно тому, как в случае струны $S_I^{(n)}$, убеждаемся в том, что функция $M = M[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ имеет по крайней мере один минимум в области:

$$\mu_{k-1} < \lambda_k < \mu_k \qquad (k = 1, \ldots, n; \quad \mu_0 = 0)$$

В точке, где такой минимум достигается:

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda_k} = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_1^n \frac{1}{\mu_j Q'(\mu_j) P(\mu_j)(\lambda_k - \mu_j)} - \frac{1}{\lambda_k^2} = 0$$

Таким образом, числа λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ суть нули рациональной функции

$$S(\lambda) = \sum_1^n \frac{1}{\mu_j Q'(\mu_j) P(\mu_j)(\lambda - \mu_j)} + \frac{1}{\lambda} \tag{2.6}$$

Так как, с другой стороны, они являются нулями многочлена $P(\lambda)$ и $P(0) = Q(0) = 1$, то

$$S(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda Q(\lambda)} = \sum_1^n \frac{P(\mu_j)}{\mu_j Q'(\mu_j)(\lambda - \mu_j)} + \frac{1}{\lambda} \tag{2.7}$$

Сопоставляя (2.6) и (2.7), находим, что

$$P^2(\mu_j) = 1, \qquad P(\mu_j) = \pm 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Внося эти выражения для $P(\mu_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ в (2.6) и учитывая, что в силу (1.3)

$$P(\mu_j) Q'(\mu_j) > 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

найдем, что

$$\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = 1 + \lambda \sum_1^n \frac{1}{\mu_j |Q'(\mu_j)| (\lambda - \mu_j)} \tag{2.8}$$

Таким образом, коэффициент динамической жесткости P/Q (т. е. обратная величина коэффициента динамической податливости) системы $S_I^{(n)}$, соответствующей системе $S_{II}^{(n)}$ с наименьшей массой при данном спектре $\{\sqrt{\mu_j}\}$, определяется однозначно.

Следовательно, и сама эта система (обозначим ее через $S^*(\mu_1, \ldots, \mu_n)$) определяется единственным образом.

Из единственности системы $S^*(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ тотчас же вытекает, что ее бусинки расположены симметрично относительно середины нити и массы симметрично расположенных бусинок равны. В самом деле, если бы эти условия не были выполнены, то система, получающаяся из системы $S^*(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ путем симметричного отражения относительно середины нити, будучи отличной от системы $S^*(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, имела бы вместе с тем те же частоты $\sqrt{\mu_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ и ту же массу M_n, что невозможно.

Из соображений симметрии явствует, что в гармоническом колебании системы $S^*(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ с частотой $q_{2k-1} = \sqrt{\mu_{2k-1}}$ $(k = 1, \ldots, [{}^1/_2(n+1)])$, имеющем $2k-2$ узлов, касательная к линии прогиба нити в ее центре параллельна равновесному положению нити; в гармоническом же колебании с частотой q_{2k} $(k = 1, \ldots, [{}^1/_2 n])$, имеющем $2k-1$ узлов, один из узлов приходится на центр нити, который остается неподвижным.

Отсюда вытекает, что если разрезать нить системы $S^*(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ на равные половинки и левый конец правой половинки скрепить со свободно скользящим колечком, невесомым при $n = 2m$, а при $n = 2m-1$ имеющим массу, равную половине той массы, которая сосредоточена в центре нити S^*, то числа $\sqrt{\mu_1}$, $\sqrt{\mu_3}, \ldots$ будут резонансными частотами этой половинки, а числа $\sqrt{\mu_2}$, $\sqrt{\mu_4}, \ldots$ — антирезонансными.

Таким образом, если положить

$$P_{1/2}(\lambda) = \prod_{1}^{[1/2(n+1)]} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_{2j-1}}\right), \qquad Q_{1/2}(\lambda) = \prod_{1}^{[1/2\, n]} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_{2j}}\right)$$

то согласно формуле (1.7) для массы $\frac{1}{2} M^{(m)}$ каждой такой половинки длины $L = \frac{1}{2}$ будем иметь

$$M^{(m)} = -4 \sum_{j=1}^{[1/2(n+1)]} \frac{1}{\mu_{2j-1}^2 P_{1/2}'(\mu_{2j-1})\, Q_{1/2}(\mu_{2j-1})} \tag{2.9}$$

а так как

$$P_{1/2}(\lambda)\, Q_{1/2}(\lambda) = Q(\lambda), \qquad P_{1/2}'(\mu_{2j-1})\, Q_{1/2}(\mu_{2j-1}) = Q'(\mu_{2j-1})$$
$$(j = 1, \ldots, [{}^1/_2(n+1)])$$

то формула (2.9) эквивалентна формуле (2.5). Теорема доказана.

Согласно этой теореме для определения масс m_j и расстояний l_j системы $S^*(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ с минимальной массой $M^{(m)}$ можно пользоваться следующим правилом.

При четном $n = 2v$ массы m_j и расстояния l_j находятся из разложения

$$\prod_{k=1}^{v}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_{2k}}\right) \Big/ \prod_{k=1}^{v}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_{2k-1}}\right) = l_v + \cfrac{1}{-m_v\lambda + \cfrac{1}{l_{v-1} + \cdots + \cfrac{1}{-m_1\lambda + \cfrac{1}{l_0}}}} \tag{2.10}$$

а при нечетном $n = 2v - 1$ из разложения

$$\prod_{k=1}^{v-1}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_{2k}}\right) \Big/ \prod_{k=1}^{v}\left(1 - \frac{1}{\mu_{2k-1}}\right) = \cfrac{1}{-{}^1/_2 m_v\lambda + \cfrac{1}{l_{v-1} + \cfrac{1}{-m_{v-1}\lambda + \cdots + \cfrac{1}{-m_1\lambda + \cfrac{1}{l_0}}}}} \tag{2.10'}$$

Величины m_j и l_j можно, конечно, вычислить путем разложения в стильтьесову дробь коэффициента динамической жесткости P/Q системы S^*, определяемого по формуле (2.8), но этот путь потребует больших вычислений.

2°. Полученное значение (2.5) для $M^{(m)}$ есть функция величин $(0<)\ \mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_n$

$$M^{(m)}=\Psi_n(\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

Аналогично тому, как для функции Φ_n (см. стр. 559):

$$\Psi_n(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1},\infty)=\lim_{n\to\infty}\Psi_n(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1},\mu_k)=\Psi_{n-1}(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1})$$

и функция Ψ_n при фиксированных $\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$ убывает с возрастанием μ_n.

Для любой системы $S_{\text{II}}{}^{(n)}$ массы M, имеющей частоты $q_j=\sqrt{\mu_j}$ $(j=1,\ldots,n)$

$$\Psi_1(\mu_1)<\Psi_2(\mu_1,\mu_2)<\cdots<\Psi_n(\mu_1,\ldots,\mu_n)\leqslant M \tag{2.11}$$

Так как, в частности

$$\Psi_1(\mu_1)=\frac{4}{\mu_1},\qquad \Psi_2(\mu_1,\mu_2)=\frac{4\mu_2}{\mu_1(\mu_2-\mu_1)}$$

то

$$\mu_1\geqslant\frac{4}{M} \tag{2.12}$$

$$4\mu_2\leqslant M\mu_1(\mu_2-\mu_1)\ \text{ или }\ \mu_2\geqslant\frac{M\mu_1^2}{M\mu_1-4} \tag{2.13}$$

Неравенство (2.12) есть неравенство Н. Е. Жуковского [7]. Неравенство (2.13) дает точную нижнюю оценку для μ_2 любой системы $S_{\text{II}}{}^{(n)}$ по заданным μ_1 и M.

Сопоставление результатов этого и предыдущего параграфов позволяет также указать точную нижнюю оценку для μ_3 по тем же данным μ_1 и M, а именно

$$\sqrt{\mu_3}\geqslant\frac{\sqrt{\mu_1}}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{8}{\sqrt{M\mu_1}-2}}\right) \tag{2.14}$$

В самом деле, как мы знаем, $\Psi_3(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ есть масса симметричной системы $S^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ с частотами $\sqrt{\mu_1}$, $\sqrt{\mu_2}$, $\sqrt{\mu_3}$ и, следовательно, $\sqrt{\mu_1}$ и $\sqrt{\mu_3}$ суть первые две частоты «половинки» этой системы, получаемой известным образом из S^*. Так как масса этой половинки равна $\frac{1}{2}\Psi_3$, а длина $\frac{1}{2}$, то согласно замечанию, сделанному в конце § 1

$$\Phi_2^2(\mu_1,\mu_3)\leqslant\frac{1}{4}\Psi_3(\mu_1,\mu_2,\mu_3) \tag{2.15}$$

и, стало быть,

$$\Phi_2(\mu_1,\mu_3)\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{M}$$

Решая это неравенство относительно μ_3, получим оценку (2.14).

Очевидно, оценка (2.14) «точная», если заданы только M и μ_1. Если же дополнительно задано μ_2, то оценка не будет точной.

Точная оценка может быть получена для этого случая в виде $\mu_3=\Lambda(\mu_1, \mu_2; M)$, где Λ — наибольший из трех вещественных корней кубического уравнения $\Psi_3(\mu_1, \mu_2, \mu)=M$ относительно μ, т. е. уравнения

$$\frac{4\mu_2\mu}{\mu_1(\mu_2-\mu_1)(\mu-\mu_1)}+\frac{4\mu_1\mu_2}{\mu(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}=M$$

при этом, конечно, следует предполагать, что $M>\Psi_2(\mu_1, \mu_2)$.

Легко видеть, что вообще если заданы для некоторой системы $S_{\text{II}}^{(n)}$ квадраты первых $r(<n)$ частот $\mu_1, \ldots, \mu_r$ и масса M, причем $\Psi_r(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)<M$, то уравнение $\Psi_{r+1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r, \mu)=M$ будет иметь r вещественных корней, перемежающихся с числами $\mu_1, \ldots, \mu_r$, причем наибольший из них $\Lambda(\mu_1, \ldots, \mu_r; M)$ будет больше μ_r. Неравенство $\mu_{r+1}\geqslant\Lambda(\mu_1, \ldots, \mu_r; M)$ будет давать точную нижнюю оценку для μ_{r+1} при заданных $\mu_1, \ldots, \mu_r$ и M.

Разумеется, неравенство (2.15) является частным случаем общего неравенства

$$\Phi_v^2(\mu_1, \mu_3, \ldots, \mu_{2v-1})\leqslant\frac{1}{4}\Psi_{2v-1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2v-1}) \quad (v=1, 2, \ldots)$$

§ 3. Случай системы $S_0^{(n)}$ с двумя скользящими концами. Пусть теперь S — система, состоящая из нити (натянутой единичной силой) с n сосредоточенным массами $m_1, \ldots, m_n$, оба конца которой могут свободно скользить. Пусть $p_j=\sqrt{\lambda_j}$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ — последовательные частоты этой системы. Очевидно, $p_0=\lambda_0=0$.

При свободных колебаниях системы S участки l_0 и l_n будут оставаться параллельными самим себе и изменение их длин не изменяет частот системы.

Обозначим через S' систему, получающуюся из S путем укорочения l_0 и l_n до нуля. Таким образом, у системы S' величины m_1 и m_n будут массами левого и правого колечек.

Коэффициент динамической податливости Γ системы S' будет иметь выражение

$$\Gamma(\lambda)=\cfrac{1}{-m_1\lambda+\cfrac{1}{l_1+\cfrac{1}{-m\lambda+\cdots+\cfrac{1}{l_{n-1}+\cfrac{1}{-m_n\lambda}}}}} \tag{3.1}$$

которое получается из (1.1), если положить $l_0=0$, а $l_n=\infty$ (свободный конец соответствует случаю удаления неподвижного конца на бесконечность). Следовательно, для коэффициента $\Gamma^{-1}(\lambda)$ динамической жесткости системы S' будем иметь

$$-\lambda^{-1}\Gamma^{-1}(\lambda)=m_1+\cfrac{1}{-l_1\lambda+\cfrac{1}{m_2+\cfrac{1}{-l_2\lambda+\cdots+\cfrac{1}{-l_{n-1}\lambda+\cfrac{1}{m_n}}}}} \tag{3.2}$$

Рассмотрим теперь систему S^* с $n-1$ сосредоточенными массами m_j^* $(j=1, 2, \ldots, n-1)$, делящими нить на части l_j^* $(j=0, 1, \ldots, n-1)$, где $m_j^* = l_j$ $(j=1, 2, \ldots, n-1)$, $l_{j-1}^* = m_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$

Предполагая правый конец нити в S^* неподвижным, а левый свободно скользящим (и натяжение T равным единице), можно будет утверждать, что функция (3.2) является коэффициентом податливости для S^*.

Таким образом, числа $\mu_k^* = \lambda_k$ $(k=1, \ldots, n-1)$ будут антирезонансными частотами для системы S^* и согласно теореме 2 (и замечанию на стр. 560) будем иметь

$$\left(\sum_1^{n-1} l_j\right)\left(\sum_1^{n} m_j\right) = \left(\sum_1^{n-1} m_j^*\right)\left(\sum_0^{n-1} l_j^*\right) \geqslant 4 \sum \frac{1}{\lambda_{2j-1}^2 \,|\, \Pi'(\lambda_{2j-1}) \,|} \tag{3.3}$$

где

$$\Pi(\lambda) = \prod_1^{n-1}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$$

Предполагая теперь, что длина нити системы S равна единице, т. е. $l_0 + l_1 + \cdots + l_n = 1$, и обозначая системы для этого случая, как было условлено (стр. 556), через $S_0^{(n)}$, получим из (3.3) точную нижнюю оценку для массы M системы $S^{(n)}$ через числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Теорема 3. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1}$ — произвольная последовательность положительных чисел. Тогда величина

$$4 \sum_1^{[\frac{1}{2}n]} \frac{1}{\lambda_{2j-1}^2 \,|\, \Pi'(\lambda_{2j-1}) \,|} \qquad \left(\Pi(\lambda) = \prod_1^{n-1}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\right) \tag{3.4}$$

дает наименьшее значение для масс всех систем $S_0^{(n)}$, имеющих данный спектр ненулевых частот $p_j = \sqrt{\lambda_j}$ $(j=1, \ldots, n-1)$. Среди этих систем $S_0^{(n)}$ имеется только одна с двумя бусинками на концах, удовлетворяющая условию симметрии. Для этой системы $S_0^{(n)}$, и только этой, масса M достигает значения (3.4).

§ 4. Случай струны, несущей бесконечное число масс. 1°. Пусть теперь S — струна (нить), натянутая единичной силой вдоль оси X между точками $x=0$ и $x=1$ и несущая бесконечное число масс.

Обозначим через $\sigma(x)$ $(0 < x \leqslant 1;\ \sigma(0)=0)$ массу открытого справа отрезка $(0, x]$ струны S, так что $\sigma(x) = \sigma(x-0)$ $(0 < x \leqslant 1)$.

Пусть правый конец струны S закреплен неподвижно. Что касается левого конца, то мы будем рассматривать два случая, когда он либо может свободно скользить вдоль оси Y, либо неподвижно закреплен. В первом случае в соответствии с обозначениями § 1 струну будем обозначать через S_{I}, во втором — через S_{II}.

Квадраты последовательных частот свободных гармонических колебаний $y = \varphi(x)\sin(pt+\alpha)$ струны будут совпадать с последовательными характеристическими числами интегрального уравнения [6]

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, d\sigma(s) \tag{4.1}$$

где $K(x, s)$ — функция влияния струны S; при этом:

для струны S_{I}

$$K(x, s) = \begin{cases} 1 - s & (x \leqslant s) \\ 1 - x & (x \geqslant s) \end{cases}$$

для струны S_{II}

$$K(x, s) = \begin{cases} x(1 - s) & (x \leqslant s) \\ s(1 - x) & (x \geqslant s) \end{cases}$$

Для частот $p_n = \sqrt{\lambda_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ струны S справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{\rho(x)}\, dx$$

где $\rho(x)$ — существующая почти всюду производная функции $\sigma(x)$, т. е. $\rho(x) = \sigma'(x)$ (почти всюду).

Если функция $\sigma(x)$ абсолютно непрерывна, т. е.

$$\sigma(x) = \int_0^x \rho(\xi)\, d\xi$$

то интегральное уравнение (4.1) эквивалентно системе:

для струны S_{I}

$$\varphi'' + \lambda\rho\varphi = 0, \qquad \varphi'(0) = \varphi(1) = 0 \tag{4.2}$$

для струны S_{II}

$$\varphi'' + \lambda\rho\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \tag{4.3}$$

2°. Пусть теперь наперед задана последовательность положительных чисел $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{p_n} < \infty \tag{4.4}$$

Теорема 1 делает естественным предположение, что величина

$$M_m = \left(\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j^{3/2}\,|D'(\lambda_j)|}\right)^2 \tag{4.5}$$

где

$$D(\lambda) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right), \qquad \lambda_j = p_j^2 \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

дает точную нижнюю границу для всех струн S, имеющих данный спектр частот $\{p_j\}_1^\infty$.

Нами доказано, что так оно и есть в действительности или в более точной формулировке следующее.

Для того чтобы последовательность $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ была спектром частот некоторой струны S_{I}, необходимо и достаточно, чтобы величина M_m была конечной[1]. *При выполнении этого условия M_m дает наименьшее возможное значение для массы струны S_{I}, имеющей данный спектр частот.*

---

[1] Условие (4.4) не включается, так как оно оказывается следствием условия конечности M_m.

Аналогичное утверждение справедливо и для струн S_{II} с заменой величины M_m на

$$M^{(m)} = 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2j-1}^{2} \, | D' (\lambda_{2j-1}) |}$$

Теорема 1 подсказывает также следующий результат.

Нижняя грань M_m для масс струн S_{I} с данным спектром $\{p_j\}_1^\infty$ достигается для той и только той струны, динамический коэффициент податливости которой $\Gamma(\lambda)$ имеет следующее выражение:

$$\Gamma (\lambda) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{1/2} \, | D' (\lambda_i) | \, (\lambda_j - \lambda)}$$

Заметим, что любая струна S_{I} вполне определяется своим коэффициентом динамической податливости. Однако, в то время как для нити с n сосредоточенными массами этот факт очень просто доказывается, для струны с произвольным распределением масс нам удалось его установить, привлекая лишь очень тонкие средства функционального анализа.

Струна S_{II} с данным спектром $\{p_j\}_1^\infty$, масса которой достигает наименьшего значения $M^{(m)}$, также определяется единственным образом, и отсюда, в частности, следует, что массы на ней распределены симметрично, т. е. в точках непрерывности $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \sigma(1) - \sigma(1 - x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, \ \sigma(+0) = \sigma(0) = 0)$$

Если у этой струны заменить неподвижный левый конец свободно скользящим, то коэффициент динамической жесткости $\Delta(\lambda)$ этой струны в точке $x = 0$ будет иметь следующее выражение:

$$\Delta (\lambda) = 1 + \lambda \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j \, | D' (\lambda_j) | \, (\lambda - \lambda_j)}$$

Этот результат аналогичен тому, который установлен на стр. 561, (формула (2.8)). Неравенства (1.18), (1.20) и (2.11), (2.13), (2.14) сохраняют полный смысл и для рассматриваемых в этом параграфе случаев.

В частности, они применимы соответственно к краевым задачам (4.2) и (4.3), причем в них роль M будет играть величина

$$\int_0^1 \rho(x) \, dx$$

Заканчивая, сделаем еще следующее замечание. Может случиться, что последовательность $p_1 < p_2 < p < \ldots$ такова, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^k}{| D' (\lambda_j) |} < \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots; \ \lambda_j = p_j^2) \tag{4.6}$$

На основании результатов Стильтьеса [9] и Гамбургера [10] можно утверждать, что в этом и только в этом случае струна S_{I} с данным спектром $\{p_j\}_1^\infty$ и наименьшей массой M_m будет представлять собой нить, нагруженную бесконечной последовательностью сосредоточенных масс, сгущающихся к правому концу.

Одновременно условия (4.6) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы симметричная струна S_{II} с данным спектром представляла собой нить, нагруженную бесконечной последовательностью сосредоточенных масс, сгущающихся к обоим концам нити.

Если эту симметричную струну S_{II} разрезать пополам в точке $x = \frac{1}{2}$ и обозначить через $m_1, m_2, \ldots$ сосредоточенные массы правой половины, последовательно идущие от центра $x = \frac{1}{2}$ к правому концу $x = 1$, а через $l_0 \geqslant 0$ расстояние сосредоточенной массы m_1 до точки $x = \frac{1}{2}$ и через l_k $(k = 1, 2, \ldots)$ расстояния между сосредоточенными массами m_k и m_{k+1}, то величины l_k, m_k найдутся из разложения коэффициента динамической податливости струны в точке $x = \frac{1}{2}$ в бесконечную стильтьесову дробь, т. е. из разложения:

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2j}}\right) \Big/ \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{2j-1}}\right) = l_0 + \cfrac{1}{-m_1\lambda + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{-m_2\lambda + \cdots}}}.$$

В частности, условия (4.6) будут выполнены, если числа $p_n = \sqrt{\lambda_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеют асимптотическое поведение

$$p_n \sim cn^{\alpha} \qquad (c > 0,\ \alpha > 1)$$

Беря $\alpha = 2$, мы приходим между прочим к выводу, что спектр частот гармонических колебаний всякого стержня является одновременно спектром частот гармонических колебаний нити, симметрично нагруженной последовательностью сосредоточенных масс, сгущающихся к обоим концам нити.

Поступила 31 III 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Определение плотности неоднородной симметрической струны по спектру ее частот. ДАН. 1951. Т. LXXVI. № 3.
2. Крейн М. Г. Об обратных задачах для неоднородной струны. ДАН. 1952 Т. LXXXII. № 5.
3. Карман Т. и Био М. Математические методы в инженерном деле. Гл. IX. ГТТИ. 1946.
4. Терских В. П. Крутильные колебания в дизельных установках. Труды первой дизельной конференции. Наркомтяжпром. 1934.
5. Диментберг Ф. М. Применение метода «динамической жесткости» для расчета связанных колебаний. Динамика и прочность коленчатых валов. Изд. АН СССР. 1948.
6. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. ГТТИ. 1950.
7. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y/dx^2 + py = 0$. Собрание сочинений. 1948. Т. I. Стр. 246—253.
8. Крейн М. Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 3.
9. Стильтьес Г. И. Исследование о непрерывных дробях. ОНТИ. 1936.
10. Hamburger H. L. Hermitian Transformations of deficiency-index (1,1), Jacobi matrices a. undetermined Moment Problems. Amer. Journ. of Mathem. 1944. Vol. LXVI. N4. P. 489—522.