Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СИСТЕМОЙ ДВУХ УРАВНЕНИЙ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

§ 1. Изучая системы автоматического регулирования, М. А. Айзерман[1] сформулировал следующую задачу.

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + ax_k, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Пусть при заданных постоянных a_{pj} $(p, j = 1, 2, \ldots n)$ и любом значении a из некоторого промежутка $\alpha < a < \beta$ все корни характеристического уравнения системы (1.1) имеют отрицательные действительные части.

Требуется доказать или опровергнуть следующее утверждение. Для любого промежутка α, β, для которого при $\alpha < a < \beta$ соблюдается условие отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения системы (1.1), и для любой однозначной непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\alpha x^2 < xf(x) < \beta x^2 \text{ при всех } x \neq 0 \quad f(0) = 0$$

система

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + f(x_k), \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{1.2}$$

(единственным состоянием равновесия которой является, очевидно, начало координат $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$) будет также иметь в начале устойчивое состояние равновесия и область его притяжения охватывает все фазовые пространства $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (1.2).

Исследование систем второго порядка вида (1.2) было проведено в работах Н. П. Еругина[2,3]. Достаточные условия, практически полностью решающие задачу М. А. Айзермана в положительном смысле, даны в работе И. Г. Малкина[4]. В настоящей статье рассматриваются системы двух уравнений несколько более общего вида, чем (1.2).

В § 2 рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + by \tag{1.3}$$

где a, b — постоянные, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям, обеспечивающим единственность решений при любых начальных данных. Кроме того, $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Для того чтобы соответствующая уравнениям (1.3) линейная система

$$\frac{dx}{dt} = h_1 x + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = h_2 x + by \tag{1.4}$$

где h_1, h_2 — постоянные, имела начало координат $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчивой точкой, достаточно выполнения условий Рауза-Гурвица

$$h_1 + b < 0, \qquad h_1 b - a h_2 > 0.$$

Возникает вопрос: является ли выполнение неравенств

$$h_1(x) + b < 0, \qquad h_1(x)\, b - h_2(x)\, a > 0 \qquad \text{при всех } x \neq 0 \tag{1.5}$$

для функций

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{x}, \qquad h_2(x) = \frac{f_2(x)}{x} \tag{1.6}$$

достаточным для того, чтобы тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (1.3) было асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях? Доказанная в § 2 теорема 1 отвечает на этот вопрос положительно, если на функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ наложено дополнительное условие

$$\lim \int_0^x (f_1(x)\, b - f_2(x)\, a)\, dx = \infty \qquad \text{при} \quad |x| \to \infty \tag{1.7}$$

В частности, условие (1.7) выполняется, если вместо второго неравенства (1.5) имеет место более сильное неравенство

$$h_1(x)\, b - h_2(x)\, a > \varepsilon$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Тот факт, что выполнения только неравенств (1.5) для справедливости теоремы недостаточно, устанавливается примером, приведенным в конце § 2, причем одновременно получается отрицательный ответ для указанной выше проблемы М. А. Айзермана.

В § 3 рассматривается система уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + f_2(y) \tag{1.8}$$

где на функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ также наложены ограничения, обеспечивающие единственность решений $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Условия Рауза-Гурвица для соответствующей системы линейных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = h_1 x + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + h_2 y \tag{1.9}$$

имеют в этом случае вид: $h_1 + h_2 < 0$, $h_1 h_2 - ab > 0$; что для функций

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{x}, \qquad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{y} \tag{1.10}$$

соответствовало бы условиям

$$h_1(x) + h_2(y) < 0, \qquad h_1(x)\, h_2(y) - ab > 0 \qquad \text{при} \quad x \neq 0, \quad y \neq 0 \tag{1.11}$$

В § 3 даны достаточные условия для того, чтобы тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (1.8) было асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Рассматриваемые в статье задачи устойчивости решаются применением функций Ляпунова [5]. Считаем своим долгом отметить, что при построении этих функций мы использовали метод И. Г. Малкина, данный в цитированной выше работе.

§ 2. *Теорема 1.* Дана система уравнений (1.3). Если функции (1.6) удовлетворяют условиям (1.5) и (1.7), то тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (1.3) является асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Доказательство. Предполагая сначала $a \neq 0$, рассмотрим функцию

$$V(x, y) = 2\int_0^x (f_1(x)\,b - f_2(x)\,a)\,dx + b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 \tag{2.1}$$

Вычислим производную dV/dt вдоль траекторий системы (1.3):

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x}(f_1(x) + ay) + \frac{\partial V}{\partial y}(f_2(x) + by) = \\ &= 2(f_1(x) + bx)(f_1(x)\,b - f_2(x)\,a) = \\ &= 2(h_1(x)\,b - h_2(x)\,a)(h_1(x) + b)\,x^2\end{aligned}$$

По условиям теоремы множитель при x^2 в правой части последнего равенства отрицателен при всех $x \neq 0$. Для доказательства определенной положительности функции $V(x,y)$ достаточно показать, что

$$\int_0^x (f_1(x)\,b - f_2(x)\,a)\,dx > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0$$

Этот факт, однако, следует непосредственно из второго неравенства (1.5). В самом деле,

$$\begin{aligned}2\int_0^x (f_1(x)\,b - f_2(x)\,a)\,dx &= 2\int_0^x (h_1(x)\,b - h_2(x)\,a)\,x dx = \\ &= \int_0^x (h_1(x)\,b - h_2(x)\,a)\,dx^2 > 0\end{aligned}$$

при $x \neq 0$ вследствие (1.5).

Таким образом, $V(x, y)$ есть сумма двух неотрицательных функций

$$V_1(x) = 2\int_0^x (f_1(x)\,b - af_2(x))\,dx$$

$$V_2(x, y) = (bx - ay)^2$$

причем вследствие $a \neq 0$ одновременное выполнение равенств $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ возможно лишь при $x = 0$, $y = 0$.

Итак, функция $V(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$V(x, y) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad \frac{dV}{dt} < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{2.2}$$

Кроме того, легко заметить, что функция $V(x, y)$ обладает следующим свойством: область плоскости x, y, в которой выполняется неравенство $V(x, y) < A$, где A — произвольное положительное число, ограничена.

В самом деле, в силу (1.7) можно для любого $A > 0$ указать такое число N, что вне полосы $-N < x < N$ будет выполняться неравенство

$$V_1(x) = 2\int_0^x (f_1(x)\, b - f_2(x)\, a)\, dx > A \qquad \text{при} \quad |x| > N$$

Так как $a \neq 0$, можно указать такое достаточно большое число $M > 0$, что в полосе $|x| < N$ будет выполняться неравенство

$$V_2(x, y) = (bx - ay)^2 > A \qquad \text{при} \quad |y| > M$$

Таким образом, всюду вне прямоугольника $-N < x < N$, $-M < y < M$ будет выполняться неравенство $V(x, y) > A$, что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим теперь некоторую траекторию системы (1.3), проходящую при $t = t_0$ через точку $x = x_0$, $y = y_0$. Вследствие (2.2) точка этой траектории не может выйти из области, где выполняется неравенство

$$V(x, y) \leqslant V(x_0, y_0)$$

Эта область по доказанному выше конечна. Таким образом, эта траектория либо примыкает к началу координат $x = 0$, $y = 0$ при $t \to \infty$, либо внутри области $V(x, y) \leqslant V(x_0, y_0)$ имеется предельный цикл, так как вследствие (1.5) система (1.3) не имеет особых точек, отличных от начала координат. Однако наличие периодического решения у системы (1.3) исключается условиями (2.2). Действительно, так как производная dV/dt вдоль траектории не положительна, для периодического решения должно было бы все время выполняться $dV/dt = 0$, что в рассматриваемом случае возможно лишь на оси $x = 0$. Итак, остается только первая из рассмотренных возможностей $x \to 0$, $y \to 0$ при $t \to \infty$, что доказывает теорему для случая $a \neq 0$.

Пусть теперь $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае система (1.3) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = h_1(x)\, x, \qquad \frac{dy}{dt} = h_2(x)\, x + by \tag{2.3}$$

Так как по условиям теоремы корни уравнения

$$\begin{vmatrix} h_1(x) - \lambda & 0 \\ h_2(x) & b - \lambda \end{vmatrix} = (h_1(x) - \lambda)(b - \lambda) = 0$$

отрицательны при всех значениях $x \neq 0$, то $h_1(x) < 0$ и $b < 0$.

Но тогда из первого уравнения (2.3) непосредственно следует $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для любого решения системы (2.3).

Предположим, что для некоторого решения этой системы возможно неравенство $|y(t)| > \varepsilon$ при произвольно больших значениях t. Здесь ε — произвольное положительное число. Выберем столь большое число $T > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$|h_2(x(t))\,x(t)| < \left|\frac{b\varepsilon}{2}\right| \qquad \text{при} \quad t > T \tag{2.4}$$

Умножим второе уравнение (2.3) на y:

$$y\,\frac{dy}{dt} = h_2(x)\,xy + by^2$$

Подставляя в это равенство вместо x и y координаты рассматриваемого решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ и учитывая (2.4), получим

$$\frac{d}{dt}\,\frac{y^2(t)}{2} < b\varepsilon^2 + \frac{|b|\,\varepsilon^2}{2} = \frac{b\varepsilon^2}{2} \tag{2.5}$$

для тех значений $t > T$, при которых по предположению $|y(t)| > \varepsilon$. Оценка (2.5) непосредственно показывает, что наше предположение неверно. Итак, теорема 1 полностью доказана.

Следствие. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\,\frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \tag{2.6}$$

где $f(0) = g(0) = 0$. Преобразованием Лиэнара [6] вопрос об устойчивости тривиального решения $x \equiv 0$ сводится к исследованию системы

$$\frac{dx}{dt} = -F(x) + y, \qquad \frac{dy}{dt} = -g(x) \tag{2.7}$$

где

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

Следовательно, на основании теоремы 1 для устойчивости тривиального решения $x \equiv 0$ достаточно, чтобы выполнялись условия

$$xF(x) > 0, \quad xg(x) > 0, \quad \lim \int_0^x g(x)\,dx = \infty \qquad \text{при} \quad |x| \to \infty \tag{2.8}$$

соответствующие в этом частном случае условиям (1.5) и (1.7) теоремы 1.

Покажем теперь, что выполнения только неравенств (1.5) недостаточно для справедливости теоремы 1. В самом деле, рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + y + f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = -x - y \tag{2.9}$$

где функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x) = -\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} \quad \text{при} \quad x \geqslant 1, \tag{2.10}$$

$$f(x) = -\frac{e^{-2}}{1+e^{-1}}x \quad \text{при} \quad x < 1$$

Функция $f(x)$ непрерывна и удовлетворяет условиям Липшица.

Для $x \neq 1$ это утверждение очевидно, а при $x = 1$ функция $f(x)$ имеет совпадающие левый и правый пределы и, кроме того, обладает в этой точке конечными правой и левой производными. Вследствие выполнения условий Липшица система (2.9) при любых начальных данных имеет единственное решение. Также имеет место равенство $f(0) = 0$.

Запишем систему линейных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = x + y + ax, \qquad \frac{dy}{dt} = -x - y \tag{2.11}$$

Легко проверить, что для выполнения условий Рауза-Гурвица для (2.11) достаточно, чтобы значение a лежало в интервале $-\infty < a < 0$. Следовательно, условия задачи М. А. Айзермана примут в этом случае вид: $xf(x) < 0$.

Очевидно, функция $f(x)$ системы (2.9) этому условию удовлетворяет.

Проверим, что $y = e^{-x} - x$ есть часть интегральной кривой для системы (2.9) на интервале $1 \leqslant x < \infty$. В самом деле, разделив второе уравнение (2.9) на первое, получим

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x+y}{x+y-e^{-2x}/(1+e^{-x})} \qquad \text{при } x \geqslant 1$$

Подставляя в это уравнение

$$y = e^{-x} - x$$

убеждаемся в справедливости высказанного выше утверждения.

Заметим, что вдоль этой кривой будет

$$\frac{dx}{dt} > 0 \qquad \text{при} \quad x \geqslant 1$$

В самом деле, имеем

$$\frac{dx}{dt} = x + y - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} > 0$$

Интегрируя вдоль рассматриваемой траектории, получим

$$\int\limits_1 (1+e^x)\,dx = \int\limits_0^t dt \quad \text{или} \quad x + e^x - (1+e) = t \tag{2.12}$$

Здесь начальные данные выбраны так, что $x = 1$, $y = e^{-1} - 1$ при $t = 0$. Из (2.12) непосредственно следует, что рассматриваемая положительная полутраектория системы (2.9) уходит в бесконечность при $t \to \infty$. Таким образом, рассмотренный пример показывает, что задача М. А. Айзермана решается в отрицательном смысле.

§ 3. *Теорема 2.* Дана система уравнений (1.8). Пусть $ab \neq 0$. Если функции (1.10) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &h_1(x) + c_2 < 0, \quad h_1(x)\,c_2 - ab > 0 \quad \text{при } x \neq 0 \\ &h_2(y) + c_1 < 0, \quad h_2(y)\,c_1 - ab > 0 \quad \text{при } y \neq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где c_1, c_2 — постоянные числа такие, что $c_1c_2 = ab$ и, кроме того,

$$\lim \int_0^x (f_1(x)\,c_2 - abx)\,dx = \infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty$$

или (3.2)

$$\lim \int_0^y (f_2(y)\,c_1 - aby)\,dy = \infty \quad \text{при} \quad |y| \to \infty$$

то тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (1.8) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Доказательство. Вычислим производную по времени для функции

$$U(x, y) = (c_2{}^2 - ab)\,x^2 + \left(a^2 - \frac{a^3b}{c_1{}^2}\right)y^2 + \\ + 2c_2 \int_0^x f_1(x)\,dx + 2\frac{a^2}{c_1}\int_0^y f_2(y)\,dy - 2ac_2xy \tag{3.3}$$

вдоль траекторий системы (1.8). Получим

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}(f_1(x) + ay) + \frac{\partial U}{\partial y}(f_2(y) + bx) = 2\,(f_1(x)\,c_2 - abx)\,(f_1(x) + c_2x) + \\ + 2\,(f_2(y) + c_1y)\,(f_2(y)\,c_1 - aby)\,\frac{a^2}{c_1{}^2} = 2\,(h_1(x) + c_2)\,(h_1(x)\,c_2 - ab)\,x^2 + \\ + 2\frac{a^2}{c_1{}^2}(h_2(y) + c_1)\,(h_2(y)\,c_1 - ab)\,y^2 \tag{3.4}$$

По условиям теоремы в правой части этого равенства стоит определенно отрицательная функция, обращающаяся в нуль лишь в начале координат $x = 0$, $y = 0$. Для доказательства определенной положительности функции $U(x, y)$ достаточно доказать справедливость неравенств

$$\begin{aligned} &2c_2\int_0^x f_1(x)\,dx - abx^2 > 0 \quad \text{при } x \neq 0 \\ &2c_1\int_0^y f_2(y)\,dy - aby^2 > 0 \quad \text{при } y \neq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Справедливость (3.5) устанавливается при помощи условия (3.1) так же, как это было сделано при рассмотрении соответствующего неравенства в доказательстве теоремы 1.

Как и при доказательстве теоремы 1, можно, используя (3.2), показать, что область, в которой выполняется неравенство $U(x, y) < A$, где A — произвольное положительное число, ограничена. Так как $dU\,/\,dt < 0$, то всякая положительная полутраектория системы (1.8) лежит в конечной области плоскости xy. Вследствие условий (3.1) всюду на плоскости xy имеет место $h_1(x)\,h_2(y) - ab > 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$

т. е. система (1.8) не имеет особых точек, отличных от начала координат Таким образом, всякая траектория системы (1.8) при $t \to \infty$ примыкает к началу координат, ибо наличие периодических решений исключается условием $dU/dt < 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$. Итак, теорема 2 доказана.

В случае $ab = 0$ нетрудно проверить непосредственным подсчетом, подобно тому, как это было сделано в § 2 для случая $a = 0$, что для асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.8) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f_1(0) = f_2(0) = 0, \qquad x f_1(x) < 0, \quad y f_2(y) < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

В качестве примера приведем систему уравнений автоматического регулирования, рассмотренную М. А. Айзерманом[7]:

$$\frac{dx}{dt} = -f(x) - ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx - \varphi(y) \tag{3.6}$$

где a, b — положительные постоянные числа, $f_1(x)$, $\varphi(y)$ — непрерывные функции, обращающиеся в нуль в начале координат $x = 0$, $y = 0$. По условиям теоремы 2 для того, чтобы тривиальное решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системы (3.6) было асимптотически устойчивым, достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} -h_1(x) + c_2 < 0 \qquad -h_1(x)\,c_2 - c_1c_2 > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0 \\ -h_2(y) + c_1 < 0, \qquad -h_2(y)\,c_1 - c_1c_2 > 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

где $h_1(x) = f(x)/x$, $h_2(y) = \varphi(y)/y$, c_1, c_2 — постоянные числа разных знаков такие, что $c_1c_2 > -ab$.

В самом деле, эти неравенства, очевидно, обеспечивают в рассматриваемом случае выполнение условий (3.1) и (3.2) теоремы 2.

Пользуюсь случаем выразить признательность Е. А. Барбашину за большую помощь, оказанную при написании этой работы.

Поступила 5 V 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. Успехи математических наук. 1949. Т. IV. Вып. 4.
2. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.
3. Еругин Н. П. Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 6.
4. Малкин И. Г. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ. 1952. Т. XVI. Вып. 3.
5. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат. М.—Л. 1950. Стр. 77—94.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат. М.—Л. Изд. 2. 1949.
7. Айзерман М. А. О сходимости процессов автоматического регулирования после больших начальных отклонений. Автоматика и телемеханика. 1946. Т. VII. Вып. 2—3.