Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ НАЧАЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ, ПРИ КОТОРЫХ ДВИЖЕНИЯ ОСТАЮТСЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫМИ, ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

И. А. Кунин

(Новосибирск)

Возможность построения области устойчивости при помощи второго метода Ляпунова указана Н. Г. Четаевым [1]. В настоящей работе рассматривается качественная картина построения такой области применительно к системе двух уравнений первого порядка общего вида. Рассмотрен вопрос о построении максимального эллипса устойчивости.

§ 1. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_{11}x + p_{12}y + P'(x, y) = P(x, y) \\ \dot{y} &= p_{21}x + p_{22}y + Q'(x, y) = Q(x, y) \end{aligned} \tag{1.1}$$

При этом в дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия.

1. В точке (0, 0) выполнены условия Гурвица, т. е.

$$p_{11} + p_{22} < 0, \qquad p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} > 0 \tag{1.2}$$

2. Функции $P'(x, y)$ и $Q'(x,y)$ голоморфны на всей плоскости, и их разложения в степенные ряды начинаются с членов второго порядка относительно x, y.

Зададимся функцией Ляпунова

$$V = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{1.3}$$

и определим ее коэффициенты из условия

$$\dot{V}' = \frac{\partial V}{\partial x}(p_{11}x + p_{12}y) + \frac{\partial V}{\partial y}(p_{21}x + p_{22}y) = -\alpha x^2 - \beta y^2 \tag{1.4}$$

Здесь $\dot{V}'$ — полная производная по времени функции Ляпунова, составленная в силу линейного приближения системы (1.1), α, β — произвольные положительные величины.

Как показал Ляпунов [2], условие (1.4) однозначно определяет положительную знакоопределенную форму. При этом легко убедиться, что ее коэффициенты будут линейными функциями α и β.

Следовательно, функцию V можно представить в виде

$$V = \alpha V_\alpha + \beta V_\beta \tag{1.5}$$

где

$$V_\alpha = m_1x^2 + 2m_{12}xy + m_2y^2, \qquad V_\beta = n_1x^2 + 2n_{12}xy + n_2y^2 \tag{1.6}$$

Коэффициенты функций V_α и V_β с точностью до общего произвольного положительного множителя даются формулами

$$\begin{aligned} m_1 &= p_{22}^2 - p_{12}p_{21} + p_{11}p_{22}, \quad & m_{12} &= -p_{12}p_{22}, \quad & m_2 &= p_{12}^2 \\ n_2 &= p_{11}^2 - p_{12}p_{21} + p_{11}p_{22}, \quad & n_{12} &= -p_{21}p_{11}, \quad & n_1 &= p_{21}^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Функции V_α и V_β — положительные знакоопределенные формы. Действительно, иначе выбором α и β можно сделать функцию знакопеременной. Если зафиксировать некоторые значения α и β и образовать

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} Q(x, y) = \dot{V}' + \frac{\partial V}{\partial x} P'(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} Q'(x, y) \tag{1.8}$$

в силу уравнений (1.1), то можно утверждать, что начало координат будет окружать конечная область, в которой $\dot{V} < 0$.

Построим кривую $\dot{V} = 0$ и впишем в нее эллипс $V(x, y) = V(x_0, y_0)$, где x_0, y_0 — координаты точки касания. Этот эллипс ограничит область асимптотической устойчивости, т. е. область, обладающую тем свойством, что если $[x', y']$ принадлежит этой области, то

$$x = x(t - t', x', y') \to 0, \qquad y = y(t - t', x', y') \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{1.9}$$

Размеры этой области, вообще говоря, должны существенно зависеть от выбора величины α и β.

§ 2. Будем непрерывно изменять постоянные α и β, оставляя их положительными. Точка касания кривых $V(x, y) = V(x_0, y_0)$, $\dot{V}(x, y) = 0$ будет описывать некоторую кривую — геометрическое место касания. Эта кривая будет функцией лишь отношения $\gamma = \beta / \alpha\ (\gamma > 0)$.

Можно показать (см. приложение 1), что кривая точек касания имеет следующее аналитическое выражение:

$$(\dot{V}_\alpha \ddot{V}_\beta - \dot{V}_\beta \ddot{V}_\alpha)\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x}\frac{\partial V_\beta}{\partial y} - \frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\frac{\partial V_\beta}{\partial x}\right) = 0 \tag{2.1}$$

и, следовательно, разбивается на две отдельные ветви. Первая из них

$$\dot{V}_\alpha \ddot{V}_\beta - \dot{V}_\beta \ddot{V}_\alpha = 0 \tag{2.2}$$

является основной и может быть еще записана в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{V}_\alpha}{\dot{V}_\beta} = 0 \tag{2.3}$$

Обратимся ко второму уравнению. Оно приводится к виду

$$p_{21}x^2 - (p_{11} + p_{22})\,xy + p_{12}y^2 = 0 \tag{2.4}$$

или

$$(\varkappa_1 x - y)(x - \varkappa_2 y) = \varkappa_1 x^2 - (1 + \varkappa_1\varkappa_2)\,xy + \varkappa_2 y^2 = 0 \tag{2.5}$$

и распадается на уравнения двух прямых, проходящих через начало координат. Здесь

$$\varkappa_1 = \frac{p_{11} + p_{22} + \sqrt{(p_{11} + p_{22})^2 - 4p_{12}p_{21}}}{2p_{12}}, \qquad \varkappa_2 = \frac{p_{11} + p_{22} + \sqrt{(p_{11} + p_{22})^2 - 4p_{12}p_{21}}}{2p_{21}} \tag{2.6}$$

Принимая во внимание очевидное неравенство $p_{11}^2 + p_{22}^2 > 2p_{11}p_{22}$, а также второе из условий (1.2), приходим к заключению, что $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ всегда вещественны.

Заметим, что если существуют точки пересечения кривых

$$\dot{V}_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\dot{y} = 0, \qquad \dot{V}_\beta = \frac{\partial V_\beta}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V_\beta}{\partial y}\dot{y} = 0$$

то они лежат на этих прямых. Действительно, исключая из уравнений кривых $\dot{x}$ и $\dot{y}$, получаем уравнения прямых

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x}\frac{\partial V_\beta}{\partial y} - \frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\frac{\partial V_\beta}{\partial x} = 0 \tag{2.7}$$

То обстоятельство, что эти прямые фигурируют в условии (2.1), имеет следующее объяснение. Если в выражении (1.5) для V α и β будут иметь разные знаки, то при некотором $\gamma < 0$ $V = C$ выродится в семейство прямых. В этом случае кривые $\dot{V} = 0$ вырождаются в две данные прямые, совпадающие с двумя прямыми семейства $V = C$.

§ 3. Известно, что две знакоопределенные формы одним линейным преобразованием могут быть приведены к каноническому виду. Найдем такое преобразование для функций V_α и V_β. На помощь приходят следующие геометрические соображения. Прямые, определяемые уравнением (2.7), являются местом точек касания эллипсов $V_\alpha = \text{const}$ и $V_\beta = \text{const}$. Если преобразовать прямые в оси координат, то они будут совпадать с главными осями этих эллипсов. Легко видеть, что таким преобразованием будет следующее:

$$y = \varkappa_1\xi + \eta, \qquad x = \xi + \varkappa_2\eta \tag{3.1}$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что преобразование (3.1) действительно приводит V_α и V_β к виду

$$V_\alpha = M_1\xi^2 + M_2\eta^2, \qquad V_\beta = N_1\xi^2 + N_2\eta^2 \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 + m_2\varkappa_1^2 + 2m_{12}\varkappa_1, \qquad & M_2 &= m_2 + m_1\varkappa_2^2 + 2m_{12}\varkappa_2 \\ N_1 &= n_1 + n_2\varkappa_1^2 + 2n_{12}\varkappa_1, \qquad & N_2 &= n_2 + n_1\varkappa_2^2 + 2n_{12}\varkappa_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнения движения в новых координатах будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= c_{11}\xi + c_{12}\eta + \Delta\,[P'(\xi,\ \eta) - \varkappa_2 Q'(\xi,\ \eta)] \\ \dot{\eta} &= c_{21}\xi + c_{22}\eta + \Delta\,[Q'(\xi,\ \eta) - \varkappa_1 P'(\xi,\ \eta)] \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= \Delta\,(p_{11} - p_{22}\varkappa_1\varkappa_2), \qquad & c_{12} &= \Delta\,[p_{12} - p_{21}\varkappa_2^2 + \varkappa_2\,(p_{11} - p_{22})] \\ c_{22} &= \Delta\,(p_{22} - p_{11}\varkappa_1\varkappa_2), \qquad & c_{21} &= \Delta\,[p_{21} - p_{12}\varkappa_1^2 - \varkappa_1\,(p_{11} - p_{22})] \end{aligned} \qquad \left(\frac{1}{\Delta} = 1 - \varkappa_1\varkappa_2\right) \tag{3.5}$$

Заметим, что в новой системе координат функции $V_\alpha(\xi,\ \eta)$ и $V_\beta(\xi,\ \eta)$ несколько изменяют свой смысл. А именно, они будут образованы не из условия

$$\dot{V}' = -\alpha\xi^2 - \beta\eta^2$$

а из условия

$$\dot{V}' = -\,[(\alpha + \beta\varkappa_1^2)\,\xi^2 + 2\,(\alpha\varkappa_2 + \beta\varkappa_1)\,\xi\eta + (\alpha\varkappa_2^2 + \beta)\,\eta^2] \tag{3.6}$$

§ 4. Практически преобразование (3.1) часто может быть весьма неудобным, если оно приводит к усложнению правых частей уравнения. Это, в частности, будет иметь место при наличии в правых частях нелинейных функций одного переменного.

В связи с этим поставим следующую задачу. Будем рассматривать заданную систему

$$\dot{\xi} = c_{11}\xi + c_{12}\eta + P'(\xi, \eta) \qquad \dot{\eta} = c_{21}\xi + c_{22}\eta + Q'(\xi, \eta) \tag{4.1}$$

как результат преобразования (3.1) некоторой первоначальной системы (1.1). Если мы сумеем найти коэффициенты p_{ik} первоначальной системы и коэффициенты преобразования $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, то по формулам (1.7) и (3.3) мы сможем вычислить коэффициенты функций V_α и V_β. Таким образом, не производя самого преобразования, можно получить функции V_α и V_β в наиболее простой и удобной форме. Для этого нужно решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&p_{11} - p_{22}\varkappa_1\varkappa_2 = c_{11}(1 - \varkappa_1\varkappa_2)\\
&p_{22} - p_{11}\varkappa_1\varkappa_2 = c_{22}(1 - \varkappa_1\varkappa_2)\\
&p_{12} - p_{21}\varkappa_2^2 + \varkappa_2(p_{11} - p_{22}) = c_{12}(1 - \varkappa_1\varkappa_2)\\
&p_{21} - p_{12}\varkappa_1^2 + \varkappa_1(p_{22} - p_{11}) = c_{21}(1 - \varkappa_1\varkappa_2)\\
&(p_{11} + p_{22})(\varkappa_1 - \varkappa_2) = -(p_{12} - p_{21})(1 + \varkappa_1\varkappa_2)\\
&(p_{11} + p_{22})(\varkappa_1 + \varkappa_2) = (p_{12} + p_{21})(1 + \varkappa_1\varkappa_2)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Первые четыре уравнения получены сравнением (4.1) и (3.5), последние два — сравнением (2.4) и (2.5). Приведем решение этой системы:

$$\begin{aligned}
&p_{11} = \tfrac{1}{2}[c_{11} + c_{22} + (c_{11} - c_{22})R], && p_{12} = \frac{c_{12}}{2c_{11}}(c_{11} + c_{22})\\
&p_{22} = \tfrac{1}{2}[c_{11} + c_{22} - (c_{11} - c_{22})R], && p_{21} = \frac{c_{21}}{2c_{22}}(c_{11} + c_{22})
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\varkappa_1 = \frac{c_{21}}{c_{22}}\frac{1}{1+R}, \qquad \varkappa_2 = \frac{c_{12}}{c_{11}}\frac{1}{1+R} \qquad \left(R = \sqrt{1 - \frac{c_{12}c_{21}}{c_{11}c_{22}}}\right)$$

Теперь можно получить выражение коэффициентов функций V_α и V_β:

$$M_1 = c_{11}c_{22}, \qquad N_1 = \frac{c_{21}^2}{(1+R)^2}, \qquad M_2 = \frac{c_{12}^2}{(1+R)^2}, \qquad N_2 = c_{11}c_{22} \tag{4.4}$$

Из этих формул видно, что коэффициенты будут вещественными только в том случае, если]

$$1 - \frac{c_{12}c_{21}}{c_{11}c_{22}} \geqslant 0 \tag{4.5}$$

Учитывая второе условие (1.3), можно утверждать, что это условие будет выполнено только при $c_{11}c_{22} > 0$. Это ограничение связано с одним свойством преобразования (3.1). Нетрудно показать (см. приложение II), что всегда будет

$$(p_{11} - p_{22}\varkappa_1\varkappa_2)(p_{22} - p_{11}\varkappa_1\varkappa_2) > 0 \tag{4.6}$$

и, следовательно, c_{11} и c_{22} в уравнениях (4.1) будут отрицательными, так как $c_{11} + c_{22} < 0$.

Получив интересующие нас формулы, можно вернуться к переменным x, y, задавая исходную систему в виде (1.1) и заменив c_{ik} в (4.4) на p_{ik}. Выражение (2.3) для кривой точек касания упростилось и имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{x\dot{x}}{y\dot{y}} = 0 \tag{4.7}$$

Точки пересечения кривых

$$\dot{V}_\alpha = M_1 x\dot{x} + M_2 y\dot{y} = 0, \qquad \dot{V}_\beta = N_1 x\dot{x} + N_2 y\dot{y} = 0$$

лежат на осях координат и даются уравнениями

$$x = 0, \quad \dot{y} = 0; \qquad y = 0 \quad \dot{x} = 0 \tag{4.8}$$

Функции $\dot{V}_\alpha$ и $\dot{V}_\beta$ имеют на осях одинаковые знаки, а их отношения равны M_1 / N_1 и M_2 / N_2. При этом до точек (4.8) $\dot{V}_\alpha$ и $\dot{V}_\beta$ отрицательны (так как начало координат окружает область, в которой $\dot{V} = \dot{V}_\alpha + \gamma\dot{V}_\beta < 0$), а после этих точек положительны. В точках (4.8) траектории перпендикулярны к осям. Это следует из того, что через эти точки проходит кривая $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$. До точек (4.8) траектории составляют с осями углы, большие $\frac{1}{2}\pi$ (или $\frac{3}{2}\pi$), а после этих точек—углы, меньшие $\frac{1}{2}\pi$ (или $\frac{3}{2}\pi$).

Вообще говоря, точки (4.8) могут и отсутствовать. Это соответствует тому, что кривые $\dot{V}_\alpha = 0$ и $\dot{V}_\beta = 0$, не пересекая осей координат, уходят в бесконечность или вырождаются в точку [0, 0]. На фиг. 1 показаны два основных случая расположения кривых $\dot{V}_\alpha = 0$ и $\dot{V}_\beta = 0$. Заштрихованы области, в которых соответственно $\dot{V}_\alpha < 0$ и $\dot{V}_\beta < 0$.

§ 5. Если на фиг. 1 в области ($\pm$), где $\dot{V}_\alpha > 0$, $\dot{V}_\beta < 0$, и ($\mp$), где $\dot{V}_\alpha < 0$, $\dot{V}_\beta > 0$, построить семейство кривых $\dot{V}_\alpha = \mathrm{const}$ и $\dot{V}_\beta = \mathrm{const}$ и провести семейство кривых равных отношений $\dot{V}_\alpha / \dot{V}_\beta$, т. е. семейство кривых $\dot{V} = 0$ в функции от параметра γ, то мы сможем отметить следующие закономерности (на фиг. 1 индексом γ_i обозначены кривые $\dot{V} = \dot{V}_\alpha + \gamma_i \dot{V}_\beta = 0$, причем $\gamma_3 > \gamma_2 > \gamma_1 > 0$).

1. При наличии точек (4.8) все кривые $\dot{V} = 0$ проходят через них, имея общую касательную, так как эти точки удовлетворяют уравнению кривой точек касания (4.7) и в них касательны все эллипсы семейства $V = V_\alpha + \gamma V_\beta = c$. В этих точках кривые $\dot{V} = 0$ «перехлестываются». Других точек пересечения они иметь не могут.

2. Если кривые $\dot{V}_\alpha = 0$ и $\dot{V}_\beta = 0$ замкнуты, то и кривые $\dot{V} = 0$ замкнуты, так как они целиком расположены в областях ($\pm$) и ($\mp$) и переходят из одной области в другую только через точки (4.8).

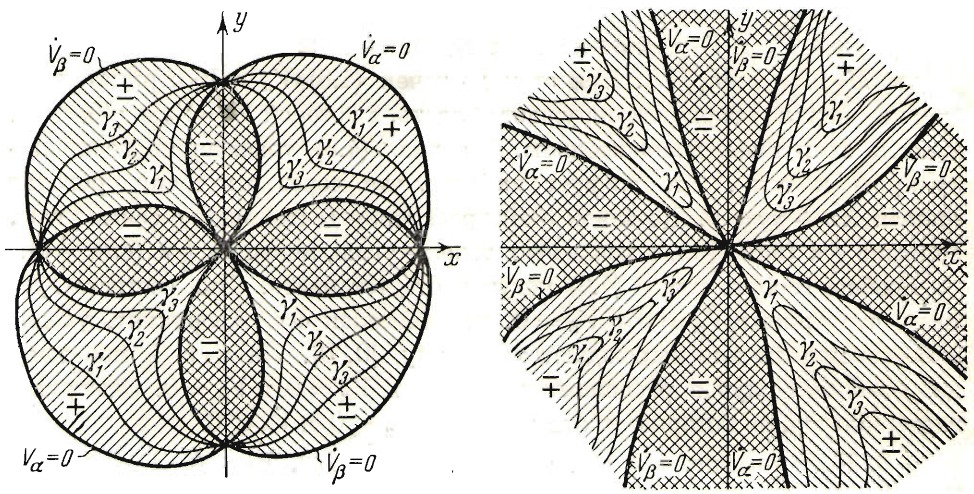
3. Если таких точек нет, то кривые $\dot{V} = 0$, не пересекаясь, уходят своими ветвями в бесконечность, оставаясь внутри области, ограниченной кривыми $\dot{V}_\alpha = 0$ или $\dot{V}_\beta = 0$.

4. Кривые $\dot{V} = 0$ в области ($\pm$) расположены так, что кривые, соответствующие меньшим значениям γ, лежат ближе к началу координат, чем кривые, соответствующие большим значениям γ. Для области ($\mp$) имеем обратную картину.

Отсюда следует, что ветвь кривой точек касания, лежащая в области $(\pm)$, обладает тем свойством, что если двигаться по ней от начала координат, то мы будем переходить от точек, соответствующих меньшим γ, к точкам, соответствующим бо́льшим γ. Для ветви кривой, лежащей в области $(\mp)$, имеем обратную картину.

Таким образом, мы имеем по меньшей мере четыре точки касания для данного значения γ.

Каждая точка $[x_0, y_0]$ определяет свой эллипс $V(x, y) = V(x_0, y_0)$. За эллипс устойчивости мы обязаны выбрать тот эллипс, для которого $V(x_0, y_0)$ является наименьшим.



Фиг. 1

Пусть наименьшее значение $V(x_0, y_0)$ дала точка, лежащая в области $(\pm)$. Тогда можно ожидать, что, выбрав бо́льшее значение γ, мы получим бо́льшее значение $V(x_0, y_0)$ и эллипс бо́льших размеров. Этот процесс увеличения γ мы можем продолжать до тех пор, пока нас не станет лимитировать уже точка касания, лежащая в области $(\mp)$.

В соответствии с нарисованной картиной возможен следующий метод построения оптимального эллипса устойчивости.

Задаваясь произвольным $\gamma > 0$, находим точки касания и определяем ту из них, для которой $V(x_0, y_0)$ имеет наименьшее значение.

По знаку $\dot{V}_\alpha(x_0, y_0)$ определяем, в какой области она находится. Это дает нам указание на то, в какую сторону следует изменять γ.

Если при измененном γ лимитирующая точка касания перейдет в другую область, то это будет означать, что мы захватили γ «в вилку».

Продолжая этот процесс далее, можно найти оптимальное значение γ с любой степенью точности. Практически иногда может оказаться более удобным находить точки касания не из уравнений касания, а как точки, принадлежащие кривой (4.7).

Отметим, что когда γ меняется в пределах от 0 до ∞, отношение полуосей эллипсов меняется в пределах

$$\text{от}\quad \frac{p_{12}}{\sqrt{p_{11}p_{22}}}\,\frac{1}{1+R}\qquad \text{до}\quad \frac{\sqrt{p_{11}p_{22}}}{p_{21}}\,(1+R)$$

В то же время как при $\gamma\to 0$, так и при $\gamma\to\infty$ эллипс устойчивости стягивается в точку $[0,\ 0]$.

§ 6. *Приложение 1.* Точка касания кривых $\dot V=0$ и $V=C$ определяется следующей системой уравнений:

$$\dot V=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \dot V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial \dot V}{\partial x}=0 \tag{6.1}$$

Эти уравнения можно записать в следующем виде:

$$\alpha\dot V_\alpha+\beta\dot V_\beta=0,\qquad a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2=0 \tag{6.2}$$

Здесь

$$a=\frac{\partial(V_\alpha,\ \dot V_\alpha)}{\partial(x,\ y)},\qquad c=\frac{\partial(V_\beta,\ \dot V_\beta)}{\partial(x,\ y)},\qquad 2b=\frac{\partial(V_\alpha,\ \dot V_\beta)}{\partial(x,\ y)}-\frac{\partial(V_\beta,\ \dot V_\alpha)}{\partial(x,\ y)} \tag{6.3}$$

Система (6.2) будет иметь отличные от нулевых решения относительно α и β тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix}\dot V_\alpha & \dot V_\beta\\ a\alpha+b\beta & c\beta+b\alpha\end{vmatrix}=\alpha(b\dot V_\alpha-a\dot V_\beta)-\beta(b\dot V_\beta-c\dot V_\alpha)=0 \tag{6.4}$$

Исключив α и β из уравнения (6.4) и первого уравнения системы (6.2), получим

$$\dot V_\beta(a\dot V_\beta-b\dot V_\alpha)+\dot V_\alpha(c\dot V_\alpha-b\dot V_\beta)=0 \tag{6.5}$$

Это соотношение и дает нам уравнение искомой кривой точек касания. Его можно преобразовать к более простому виду. Для этого предварительно докажем одно тождество.

Имеем очевидное соотношение

$$\frac{\partial(V_i,\ \dot V_k)}{\partial(x,\ y)}=\frac{1}{\dot x\dot y}\left[\left(\dot V_i-\frac{\partial V_i}{\partial y}\dot y\right)\left(\ddot V_k-\frac{\partial\dot V_i}{\partial x}\dot x\right)-\left(\dot V_i-\frac{\partial V_i}{\partial x}\dot x\right)\left(\ddot V_k-\frac{\partial\dot V_k}{\partial y}\dot y\right)\right]$$

Отсюда легко получить

$$\frac{\partial(V_i,\ \dot V_k)}{\partial(x,\ y)}=\frac{1}{2\dot x\dot y}\,[\ddot V_kR_i-\dot V_i\overline{R}_k] \tag{6.6}$$

Здесь

$$R_i=\frac{\partial V_i}{\partial x}\dot x-\frac{\partial V_i}{\partial y}\dot y,\qquad \overline{R}_k=\frac{\partial\dot V_k}{\partial x}\dot x-\frac{\partial\dot V_k}{\partial y}\dot y$$

Учитывая это тождество и преобразуя формулу (6.5), получаем искомое выражение для кривой точек касания:

$$(\ddot V_\alpha\dot V_\beta-\ddot V_\beta\dot V_\alpha)\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x}\frac{\partial V_\beta}{\partial y}-\frac{\partial V_\alpha}{\partial y}\frac{\partial V_\beta}{\partial x}\right)=0 \tag{6.7}$$

Следует отметить, что выражение (2.2) можно получить чрезвычайно просто, исходя из следующих геометрических соображений. В точке касания кривых $V=C$

$\dot{V}=0$ траектория касательна к кривой $\dot{V}=0$. Значит, в точке касания равна нулю и вторая производная. Исключая α и β из уравнений

$$\dot{V}=\alpha\dot{V}_\alpha+\beta\dot{V}_\beta=0, \qquad \ddot{V}=\alpha\ddot{V}_\alpha+\beta\ddot{V}_\beta=0$$

мы и получим формулу (2.2). Однако при этом мы потеряли второе уравнение (2.7).

Приложение 2. Для доказательства неравенства $(p_{11}-p_{22}\varkappa_1\varkappa_2)(p_{22}-p_{11}\varkappa_1\varkappa_2)>0$ преобразуем произведение следующим образом:

$$(p_{11}-p_{22}\varkappa_1\varkappa_2)(p_{22}-p_{11}\varkappa_1\varkappa_2)=p_{11}p_{22}-p_{22}^2\varkappa_1\varkappa_2-p_{11}^2\varkappa_1\varkappa_2+p_{11}p_{12}\varkappa_1^2\varkappa_2^2+$$

$$+2p_{11}p_{22}\varkappa_1\varkappa_2-2p_{11}p_{22}\varkappa_1\varkappa_2=p_{11}p_{22}(1+\varkappa_1\varkappa_2)^2-\varkappa_1\varkappa_2(p_{11}+p_{22})^2 \tag{6.8}$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$p_{11}p_{22}(1+\varkappa_1\varkappa_2)^2-\varkappa_1\varkappa_2(p_{11}+p_{22})^2>0 \tag{6.9}$$

Возможны три следующих случая:

a) $p_{12}p_{21}>0$

Учитывая (1.2) и (2.6), в этом случае имеем

$$p_{11}p_{22}>0, \qquad \varkappa_1\varkappa_2>0 \tag{6.10}$$

Сравнивая коэффициенты в (2.4) и (2.5), получаем

$$\frac{p_{21}}{\varkappa_1}=\frac{p_{11}+p_{22}}{1+\varkappa_1\varkappa_2}=\frac{p_{12}}{\varkappa_2}$$

Отсюда

$$p_{12}p_{21}(1+\varkappa_1\varkappa_2)^2-\varkappa_1\varkappa_2(p_{11}+p_{22})^2=0$$

Принимая во внимание (6.10) и (1.2), получаем неравенство (6.9).

b) $p_{12}p_{21}<0$

В этом случае знак $p_{11}p_{22}$ произволен, а $\varkappa_1\varkappa_2<0$. Учитывая (1.2), получаем неравенство (6.9).

c) $p_{12}p_{21}=0$

В этом случае $p_{11}p_{22}>0$, $\varkappa_1\varkappa_2=\pm\infty$. Порядок второго члена неравенства (6.9) ниже порядка первого члена. Следовательно, неравенство (6.9) выполнено.

Таким образом, неравенство (6.9) справедливо во всех случаях.

В заключение автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность А. И. Лурье за ряд ценных советов и внимание, проявленное к работе.

Поступила 15 I 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТИ. 1946.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГТТИ. 1950.