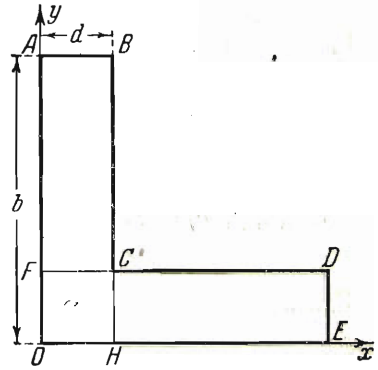
Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ТЕПЛА В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПРЯМОГО УГЛА ПРИ НАЛИЧИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Р. С. Минасян
(Ереван)

1. Постановка задачи и построение решения. Рассмотрим плоское неустановившееся распространение тепла в теле, имеющем поперечное сечение $OABCDE$ в виде прямого угла (фиг. 1), в случае, когда задано начальное распределение температуры $L(x, y)$ внутри области, а также температура $M(s, t)$ вдоль сторон угла, изменяющаяся как с течением времени t, так и вдоль контура s, а именно $U|_s = M(s, t)$.



Фиг. 1

Предполагаем, что в теле происходит тепловыделение с интенсивностью $w = w(x, y, t)$, изменяющееся в зависимости от времени t и координат x, y.

Ограничимся ради простоты симметричным случаем, когда $U(x, y, t) = U(y, x, t)$. Функция распределения температуры $U(x, y, t)$ в этом случае, как известно, будет удовлетворять уравнению Фурье [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{c\rho} w(x, y, t) \tag{1.1}$$

где $a = \lambda / c\rho$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность.

Кроме того, функция $U(x, y, t)$ удовлетворяет начальному условию

$$U(x, y, 0) = L(x, y) \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} &U(x, d, t) = M(x, t) \quad (x \geqslant d), \qquad U(x, 0, t) = M_0(x, t), \qquad U(b, y, t) = M_1(y, t) \\ &U(d, y, t) = M(y, t) \quad (y \geqslant d), \qquad U(0, y, t) = M_0(y, t), \qquad U(x, b, t) = M_1(x, t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для нахождения решения применим преобразование Лапласа, предполагая, что как U, так и $\partial U / \partial t$ имеют порядок роста не выше e^{rt}. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы граничные функции M_i и интенсивность тепловыделения $w(x, y, t)$ удовлетворяли этому же условию и вместе с тем чтобы начальное распределение $L(x, y)$ было ограниченным.

В дальнейшем будем отмечать изображения функций звездочками. Таким образом,

$$U^*(x, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} U(x, y, t)\, dt \qquad (\operatorname{Re} p = \gamma > r) \tag{1.4}$$

Замечая, что

$$\int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} dt = -L(x, y) + pU^*(x, y, p) \tag{1.5}$$

и применяя к (1.1) преобразование Лапласа, для $U^*(x, y, p)$ получим

$$pU^*(x, y, p) - L(x, y) = a \triangle U^*(x, y, p) + \frac{1}{c\rho} w^*(x, y, p)$$

где

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad w^*(x, y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} w(x, y, t)\, dt \tag{1.6}$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} - \frac{p}{a} U^* = -\frac{L(x, y)}{a} - \frac{w^*(x, y, p)}{\lambda} \tag{1.7}$$

Граничные условия для преобразованной функции $U^*(x, y, p)$ будут

$$\begin{gathered} U^*(x, d, p) = M^*(x, p) \quad (x \geqslant d), \qquad U^*(x, 0, p) = M_0^*(x, p) \\ U^*(b, y\, p) = M_1^*(y, p) \\ U^*(d, y, p) = M^*(y, p) \quad (y \geqslant d), \qquad U^*(0, y, p) = M_0^*(y, p) \\ U^*(x, y, p) = M_1^*(x, p) \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь

$$M^*(x, p) = \int_0^\infty M(x, t)\, e^{-pt}\, dt$$

Для построения решения уравнения (1.6) в области $OABCDE$ используем способ сшивания [2], являющийся дальнейшим развитием метода наложения вспомогательных функций, предложенного Н. Х. Арутюняном [3]. Разбив угол $OABCDE$ прямыми FC и CH на три прямоугольника, представим функцию $U^*(x, y, p)$ следующим образом:

$$U^*(x, y, p) = \begin{cases} U_1^*(x, y, p) & \text{при} \quad x \geqslant d \\ U_2^*(x, y, p) & \text{при} \quad x \leqslant d, \ y \leqslant d \\ U_3^*(x, y, p) & \text{при} \quad y \geqslant d \end{cases} \tag{1.9}$$

причем в силу симметрии $U_3^*(x, y, p) = U_1^*(y, x, p)$. Функции $U_i^*(x, y, p)$ удовлетворяют уравнению (1.7), условиям (1.8) и условиям сшивания

$$\begin{aligned} U_1^*(d, y, p) &= U_2^*(d, y, p), \qquad \left[\frac{\partial U_1^*(x, y, p)}{\partial x}\right]_{x=d} = \left[\frac{\partial U_2^*(x, y, p)}{\partial x}\right]_{x=d} \\ U_2^*(x, d, p) &= U_3^*(x, d, p), \qquad \left[\frac{\partial U_2^*(x, y, p)}{\partial y}\right]_{y=d} = \left[\frac{\partial U_3^*(x, y, p)}{\partial y}\right]_{y=d} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ищем функции $U_1^*(x, y, p)$ и $U_2^*(x, y, p)$ в виде рядов (1.11)

$$U_1^*(x, y, p) = \sum_{k=1}^\infty f_k^*(x, p) \sin \frac{k\pi y}{d}, \qquad U_2^*(x, y, p) = \sum_{k=1}^\infty g_k^*(x, p) \sin \frac{k\pi y}{d}$$

причем

$$f_k^*(x, p) = \frac{2}{d}\int_0^d U_1^*(x, y, p)\sin\frac{k\pi y}{d}\,dy, \quad g_k^*(x, p) = \frac{2}{d}\int_0^d U_2(x, y, p)\sin\frac{k\pi y}{d}\,dy$$

Для нахождения коэффициента $f_k^*(x, p)$ умножим уравнение (1.6) на $2/d)\sin(k\pi y/d)\,dy$ и проинтегрируем его от 0 до d; получим

$$\frac{2}{d}\int_0^d\left(\triangle - \frac{p}{a}\right)U_1^*(x, y, p)\sin\frac{k\pi y}{d}\,dy = -\frac{2}{d}\int_0^d\left[\frac{L(x, y)}{a} + \frac{w^*(x, y, p)}{\lambda}\right]\sin\frac{k\pi y}{d}\,dy$$

Отсюда

$$\frac{d^2 f_k^*}{dx^2} - \beta_k^2\pi^2 f_k^* = \varphi_k^*(x, p) \tag{1.12}$$

где

$$\beta_k^2\pi^2 = \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 + \frac{p}{a}$$

$$\varphi_k^*(x, p) = \frac{2k\pi}{d^2}[(-1)^k M^*(x, p) - M_0^*(x, p)] - \tag{1.13}$$

$$-\frac{2}{d}\int_0^d\left[\frac{L(x, y)}{a} + \frac{w^*(x, y, p)}{\lambda}\right]\sin\frac{k\pi y}{d}\,dy$$

Решение уравнения (1.12) получим в виде

$$f_k^*(x, p) = A_k(p)\,\mathrm{sh}\,\beta_k\pi x + B_k(p)\,\mathrm{ch}\,\beta_k\pi x + \frac{1}{\beta_k}\int_d^x\varphi_k^*(t, p)\,\mathrm{sh}\,\beta_k\pi(x-t)\,dt \tag{1.14}$$

Поступая аналогично с разложением функции $U_2^*(x, y, p)$, придем к уравнению

$$\frac{d^2 g_k^*}{dx^2} - \beta_k^2\pi^2 g_k^* = (-1)^k\frac{2k\pi}{d^2}U_2^*(x, d, p) - \psi_k^*(x, p)$$

Здесь

$$\psi_k^*(x, p) = \frac{2k\pi}{d^2}M^*(x, p) + \frac{2}{d}\int_0^d\left[\frac{L(x, y)}{a} + \frac{w^*(x, y, p)}{\lambda}\right]\sin\frac{k\pi y}{d}\,dy \tag{1.15}$$

Подставляя выражение $U_2^*(x, d, p) = U_1^*(d, x, p)$, получим

$$\frac{d^2 g_k^*}{dx^2} - \beta_k^2\pi^2 g_k^*(x, p) = (-1)^k\frac{2k\pi}{d^2}\sum_{q=1}^{\infty} f_q^*(d, p)\sin\frac{q\pi x}{d} - \psi_k^*(x, p) \tag{1.16}$$

Отсюда

$$g_k^*(x, p) = C_k(p)\,\mathrm{sh}\,\beta_k\pi x + D_k(p)\,\mathrm{ch}\,\beta_k\pi x +$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{2k}{\pi}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{f_q^*(d, p)}{q^2 + (\beta_k d)^2}\sin\frac{q\pi x}{d} - \frac{1}{\beta_k}\int_x^d\psi_k^*(t, p)\,\mathrm{sh}\,\beta_k\pi(t-x)\,dt \tag{1.17}$$

Из (1.8) и (1.10) получаем граничные условия для $f_k^*(x, p)$ и $g_k^*(x, p)$:

$$f_k^*(b, p) = h_k(p), \quad g_k^*(0, p) = l_k(p), \quad f_k^*(d, p) = g_k^*(d, p), \quad f_k^{*\prime}(d, p) = g_k^{*\prime}(d, p) \tag{1.18}$$

где

$$h_k(p) = \frac{2}{d}\int_0^d M_1(y, p)\sin\frac{k\pi y}{d}\,dy, \qquad l_k(p) = \frac{2}{d}\int_0^d M_0(y, p)\sin\frac{k\pi y}{d}\,dy \tag{1.19}$$

Удовлетворяя этим условиям, для коэффициентов $f_k^*(x, p)$ и $g_k^*(x, p)$ разложений (1.11) получим

$$f_k^*(x, p) = \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k \pi b} [B_k(p) \operatorname{sh} \beta_k \pi (b - x) + \mu_k(p) \operatorname{sh} \beta_k \pi x] +$$

$$+ \frac{1}{\beta_k} \int_d^x \varphi_k^*(t, p) \operatorname{sh} \beta_k \pi (x - t)\, dt \tag{1.20}$$

$$g_k^*(x, p) = \frac{\operatorname{sh} \beta_k \pi x}{\operatorname{sh} \beta_k \pi b} \left[B_k(p) \frac{\operatorname{sh} \beta_k \pi (b - d)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi d} + \mu_k(p) \right] + \nu_k(p) \frac{\operatorname{sh} \beta_k \pi (d - x)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi d} -$$

$$- \frac{1}{\beta_k} \int_0^d \psi_k^*(t, p) \operatorname{sh} \beta_k \pi (t - x)\, dt + (-1)^{k+1} \frac{2k}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{f_q^*(d, p)}{q^2 + (\beta_k d)^2} \sin \frac{q \pi x}{d}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu_k(p) &= h_k(p) - \frac{1}{\beta_k} \int_d^b \varphi_k^*(t, p) \operatorname{sh} \beta_k \pi (b - t)\, dt \\ \nu_k(p) &= l_k(p) + \frac{1}{\beta_k} \int_0^d \psi_k^*(t, p) \operatorname{sh} \beta_k \pi t\, dt \end{aligned} \tag{1.21}$$

Неизвестные $B_k(p)$ определяются из бесконечной системы уравнений

$$B_k(p) = (-1)^k \frac{2k \operatorname{sh} \beta_k \pi d}{\beta_k \pi d} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q (-1)^q f_q(d, p)}{q^2 + (\beta_k d)^2} + \nu_k(p) \tag{1.22}$$

Введем новые неизвестные $m_k(p)$ при помощи формул

$$m_k(p) = \frac{k (-1)^k}{\operatorname{sh} \beta_k \pi b} [B_k(p) \operatorname{sh} \beta_k \pi (b - d) + \mu_k(p) \operatorname{sh} \beta_k \pi d] \tag{1.23}$$

Тогда для $f_k^*(x, p)$ и $g_k^*(x, p)$ придем к следующим выражениям:

$$f_k^*(x, p) = \frac{\operatorname{sh} \beta_k \pi (b - x)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi (b - d)} \left\{ \frac{(-1)^k m_k(p)}{k} - \frac{1}{\beta_k} \int_d^x \varphi_k^*(t, p) \operatorname{sh} \beta_k \pi (t - d)\, dt \right\} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} \beta_k \pi (x - d)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi (b - d)} \left\{ h_k(p) - \frac{1}{\beta_k} \int_x^b \varphi_k^*(t, p) \operatorname{sh} \beta_k \pi (t - x)\, dt \right\} \tag{1.24}$$

$$g_k^*(x, p) = \frac{\operatorname{sh} \beta_k \pi x}{\operatorname{sh} \beta_k \pi d} \left\{ \frac{(-1)^k m_k(p)}{k} + \frac{1}{\beta_k} \int_x^d \psi_k^*(t, p) \operatorname{sh} \beta_k \pi (d - t)\, dt \right\} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh} \beta_k \pi (d - x)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi d} \left\{ l_k(p) + \frac{1}{\beta_k} \int_0^x \psi_k^*(t, p) \operatorname{sh} \beta_k \pi t\, dt \right\} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{2k}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q m_q(p)}{q [q^2 + (\beta_k d)^2]} \sin \frac{q \pi x}{d}$$

При этом $m_k(p)$ определяются из бесконечной системы уравнений

$$m_k(p) = \frac{k \operatorname{sh} \beta_k \pi (b - d) \operatorname{sh} \beta_k \pi d}{\operatorname{sh} \beta_k \pi b} \left\{ \frac{2k}{\beta_k d} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{m_q(p)}{q^2 + (\beta_k d)^2} + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \left[\frac{\mu_k(p)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi (b - d)} + \frac{\nu_k(p)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi d} \right] \right\} \tag{1.25}$$

2. Оценка суммы модулей коэффициентов системы (1.25). В дальнейшем будем пользоватья обозначениями

$$\sigma_k = |\theta_k| \frac{2k}{\pi} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{|q^2 + (\beta_k d)^2|} \qquad \left(\theta_k = \frac{k \operatorname{sh} \beta_k \pi d \operatorname{sh} \beta_k \pi (b-d)}{\beta_k d \operatorname{sh} \beta_k \pi b}\right)$$

для всех k и $b/d \geqslant 1$. Прежде всего оценим множитель θ_k. Замечая, что

$$\beta_k^2 = \frac{1}{d^2}\left[k^2 + \frac{pd^2}{a\pi^2}\right] \qquad (p = \gamma + i\delta)$$

где $\gamma > 0$, а δ меняется от $-\infty$ до $+\infty$, и введя обозначения

$$\beta_k^2 = \frac{1}{d^2} \eta_k e^{i\alpha_k}, \qquad \frac{pd^2}{a\pi^2} = \frac{\gamma + i\delta}{a\pi^2} d^2 = u + iv \tag{2.1}$$

получим предварительно некоторые неравенства. Из (2.1) имеем

$$\eta_k e^{i\alpha_k} = k^2 + u + iv \tag{2.2}$$

Так как $k^2 + u > 0$, то очевидно, что $|\alpha_k| < \frac{1}{2}\pi$, причем

$$\eta_k \cos \alpha_k = k^2 + u > k^2 \tag{2.3}$$

Введем обозначения

$$\beta_k d = \sqrt{\eta_k}\left(\cos \tfrac{1}{2}\alpha_k + i \sin \tfrac{1}{2}\alpha_k\right) = \frac{1}{\pi}(\zeta_k + i\xi_k), \qquad \frac{b}{d} = \omega \tag{2.4}$$

Так как $|\alpha_k| < \frac{1}{2}\pi$, то $\cos \frac{1}{2}\alpha_k > \left|\sin \frac{1}{2}\alpha_k\right|$ и, следовательно,

$$\zeta_k > |\xi_k| \tag{2.5}$$

Заметим также, что

$$\frac{1}{\pi}\zeta_k = \sqrt{\eta_k} \cos \tfrac{1}{2}\alpha_k = \sqrt{\eta_k}\sqrt{\cos\alpha_k + \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha_k} > \sqrt{\eta_k \cos\alpha_k} > k \tag{2.6}$$

Используя введенные обозначения, получим

$$\theta_k = \frac{k\pi \operatorname{sh}(\zeta_k + i\xi_k) \operatorname{sh}(\omega - 1)(\zeta_k + i\xi_k)}{(\zeta_k + i\xi_k) \operatorname{sh} \omega (\zeta_k + i\xi_k)}$$

Отсюда

$$|\theta_k|^2 = \\ = \frac{k^2\pi^2 (\operatorname{sh}^2 \zeta_k \cos^2 \xi_k + \operatorname{ch}^2 \zeta_k \sin^2 \xi_k)[\operatorname{sh}^2(\omega-1)\zeta_k \cos^2(\omega-1)\xi_k + \operatorname{ch}^2(\omega-1)\zeta_k \sin^2(\omega-1)\xi_k]}{(\zeta_k^2 + \xi_k^2)(\operatorname{sh}^2 \omega\zeta_k \cos^2 \omega\xi_k + \operatorname{ch}^2 \omega\zeta_k \sin^2 \omega\xi_k)}$$

Производя группировку и принимая во внимание (2.2) и (2.5), имеем

$$|\theta_k|^2 = \frac{k^2 (\operatorname{ch} 2\zeta_k - \cos 2\xi_k)[\operatorname{ch} 2(\omega-1)\zeta_k - \cos 2(\omega-1)\xi]}{2\sqrt{(k^2+u)^2 + v^2}(\operatorname{ch} 2\omega\zeta_k - \cos 2\omega\xi_k)} <$$

$$< \frac{k^2 (\operatorname{ch} 2\zeta_k - \cos 2\xi_k)[\operatorname{ch} 2(\omega-1)\zeta_k - \cos 2(\omega-1)\xi_k]}{2(k^2+u)(\operatorname{ch} 2\omega\zeta_k - \cos 2\omega\xi_k)} \tag{2.7}$$

Далее можно выбрать u так, чтобы для всех k имело место

$$\frac{k^2 (\operatorname{ch} 2\zeta_k - \cos 2\xi_k)}{(k^2+u)(\operatorname{ch} 2\omega\zeta_k - \cos 2\omega\xi_k)} < e^{-2(\omega-1)\zeta_k} \tag{2.8}$$

В самом деле,

$$\frac{\operatorname{ch} 2\zeta_k - \cos 2\xi_k}{\operatorname{ch} 2\omega\zeta_k - \cos 2\omega\xi_k} = e^{-2(\omega-1)\zeta_k} \frac{1 - e^{-2\zeta_k}(\cos 2\xi_k - e^{-2\zeta_k})}{1 - e^{-2\omega\zeta_k}(\cos 2\omega\xi_k - e^{-2\omega\zeta_k})} <$$

$$< e^{-2(\omega-1)\zeta_k} \frac{1 + 1.002 e^{-2\zeta_k}}{1 - 1.002 e^{-2\omega\zeta_k}} < e^{-2(\omega-1)\zeta_k}(1 + 4e^{-2\zeta_k}) \tag{2.9}$$

Следовательно,

$$\frac{k^2(\operatorname{ch} 2\zeta_k - \cos 2\xi_k)}{(k^2+u)(\operatorname{ch} 2\omega\zeta_k - \cos 2\omega\xi_k)} < k^2 \frac{1 + 4e^{-2\zeta_k}}{k^2+u} e^{-2(\omega-1)\zeta_k}$$

Для того чтобы выполнялось (2.8), достаточно взять $u \geqslant 4k^2 e^{-2\zeta_k}$; например, достаточно, чтобы $u \geqslant 0.008$. При этом имеем

$$|\theta_k|^2 < \frac{1}{2} e^{-2(\omega-1)\zeta_k}[\operatorname{ch} 2(\omega-1)\zeta_k - \cos 2(\omega-1)\xi_k] =$$

$$= \frac{1}{4}[1 + e^{-4(\omega-1)\zeta_k} - 2e^{-2(\omega-1)\zeta_k}\cos 2(\omega-1)\xi_k] \tag{2.10}$$

Найдем максимум выражения $1 + e^{-2c\zeta_k} - 2e^{-c\zeta_k}\cos c\xi_k$, где $\zeta_k > k\pi$ согласно (2.6), а $c = 2(\omega - 1)$. Очевидно, что максимум находится при $0 < c\zeta_k \leqslant \pi$, в силу чего в этом интервале имеем, принимая во внимание (2.5): $\cos c\xi_k > \cos c\zeta_k$. Поэтому

$$1 + e^{-2c\zeta_k} - 2e^{-c\zeta_k}\cos c\xi_k < 1 + e^{-2c\zeta_k} - 2e^{-c\zeta_k}\cos c\zeta_k = \Phi$$

Приравнивая нулю производные этого выражения по $\chi_k = c\xi_k$, имеем

$$e^{-\chi_k} - \cos\chi_k - \sin\chi_k = 0$$

Отсюда, так как корень этого уравнения $\chi_k = 0$ является точкой минимума, χ_k должно быть первым положительным корнем уравнения

$$e^{-\chi_k} = \sqrt{2}\cos\left(\chi_k - \frac{1}{4}\pi\right), \quad \text{или} \quad \sin\tau_k = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\tau_k - {}^3/_4\pi} \tag{2.12}$$

где обозначено $\chi_k = \frac{3}{4}\pi - \tau_k$. Из таблиц получаем $\tau_1 = 0.0725$.

Таким образом, $\Phi < 1.14364$, или $|\theta_k| < 0.535$. С другой стороны,

$$\frac{2k}{\pi}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2 + (\beta_k d)^2} < \operatorname{cth} k\pi - \frac{1}{k\pi} < 1$$

Таким образом, сумма модулей коэффициентов системы (1.25) $\sigma_k < 0.535$. Далее при ограниченности контурных значений функции $U^*(x, y, p)$, распределения $L(x, y)$ и функции $w^*(x, y, p)$ нетрудно видеть, что свободные члены системы (1.25) также ограниченны, т. е. система (1.25) вполне регулярна и, следовательно [4], имеет ограниченное решение.

Поступила 17 III 1952

Институт математики и механики
Академии наук Арм. ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Fourier J. B. Théorie analytique de la chaleur. Paris. 1822.
2. Минасян Р. С. Об одной задаче теплопроводности. ДАН. Арм. ССР. 1950. Т. XII. № 3.
3. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ. 1950. Т. XIII. Вып. 1.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат. 1950.