Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ МЕТОДОМ С. А. КАЗАКОВА ПО ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРАМ

Е. М. Палечек

(Бежица)

В работе[1] был рассмотрен вопрос относительно вычислений траекторий центров тяжести артиллерийских снарядов по методу С. А. Казакова [2] при интегрировании уравнений баллистики по тангенсу угла наклона p, касательной к траектории и горизонтальной компоненте скорости u, вместо горизонтальной дальности x и времени полета снаряда t.

В этой заметке рассматривается также задача вычисления траекторий в случае стрельбы по воздушной цели, когда при интегрировании удобнее пользоваться как независимыми переменными ординатой центра тяжести y и вертикальной компонентой w скорости снаряда, так как в этом случае именно эти параметры являются основными, определяющими траекторию. В случае же весьма отвесной стрельбы применение иных параметров за исключением времени t и указанных выше, практически становится вообще невозможным.

§ 1. Если в качестве независимого переменного выбрать ординату центра тяжести снаряда y, то, как известно, система основных дифференциальных уравнений внешней баллистики представится в виде

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}, \qquad \frac{dw}{dy}=-\left(k+\frac{g}{w}\right), \qquad \frac{dt}{dy}=\frac{1}{w}, \qquad \frac{dp}{dy}=-\frac{pg}{w^2} \tag{1.1}$$

где $k=cG\left(v, \sqrt{\tau_0/t}\right)H(y)$ — произведение баллистического коэффициента c на функцию силы сопротивления воздуха. Положим

$$L=k+\frac{g}{w}=L_0+L_1\varphi+L_2\varphi^2+L_3\varphi^3+\ldots, \qquad \varphi=\frac{y-y_i}{z_y} \tag{1.2}$$

где z_y — произвольно выбранный постоянный интервал изменения ординаты y.

Тогда $dy=z_y\,d\varphi$ и из второго уравнения системы (1.1) после интегрирования в пределах изменения w от w_i до w и φ от 0 до φ при помощи соотношения (1.2) находим

$$w=w_i-z_y\left(L_0\varphi+\frac{1}{2}L_1\varphi^2+\frac{1}{3}L_2\varphi^3+\cdots\right) \tag{1.3}$$

Вводя обозначения

$$\alpha_0=\frac{z_yL_0}{w_i}, \qquad \alpha_1=\frac{z_yL_1}{2w_i}, \qquad \alpha_2=\frac{z_yL_2}{3w_i} \tag{1.4}$$

находим

$$w=w_i\left[1-(\alpha_0\varphi+\alpha_1\varphi^2+\alpha_2\varphi^3+\cdots)\right] \tag{1.5}$$

При $\varphi=1$ в конце интервала z_y имеем

$$w_{i+1}=w_i\left(1-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2-\ldots\right) \tag{1.6}$$

Подставляя w по уравнению (1.5) в третье уравнение (1.1), находим

$$dt = \frac{z_y\,d\varphi}{w_i\,[1-(\alpha_0\varphi+\alpha_1\varphi^2+\alpha_2\varphi^3+\cdots)]} =$$

$$= \frac{1}{w_i\,(1-\alpha_0\varphi)}\;\frac{z_y d\varphi}{1-\alpha_1(1-\alpha_0\varphi)^{-1}\varphi^2-\alpha_2(1-\alpha_0\varphi)^{-1}\varphi^3} \tag{1.7}$$

Разложим третий сомножитель в уравнении (1.7) в ряд по формуле бинома, ограничившись членами первого измерения относительно α_1, α_2 и т. д. Имеем

$$dt = \frac{z_y}{w_i}\left[\frac{1}{1-\alpha_0\varphi}+\alpha_1\frac{\varphi^2}{(1-\alpha_0\varphi)^2}+\alpha_2\frac{\varphi^3}{(1-\alpha_0\varphi)^2}+\cdots\right]d\varphi$$

Отсюда, интегрируя в пределах t от t_i до t и φ от 0 до φ и обозначая

$$\begin{aligned}
T_0(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1-\alpha\varphi} = \sum_0^\infty \frac{1}{n+1}\alpha_0{}^n\varphi^{n+1}\\
T_1(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{\varphi^2\,d\varphi}{(1-\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+3}\alpha_0{}^n\varphi^{n+3}\\
T_2(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{\varphi^3\,d\varphi}{(1-\alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+4}\alpha_0{}^n\varphi^{n+4}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

найдем

$$t = t_i + \frac{z_y}{w_i}\,[T_0(\varphi)+\alpha_1 T_1(\varphi)+\alpha_2 T_2(\varphi)+\cdots] \tag{1.9}$$

В конце интервала z_y при $\varphi = 1$ имеем

$$t_{i+1} = t_i + \frac{z_y}{w_i}\,(T_0+\alpha_1 T_1+\alpha_2 T_2+\cdots) \tag{1.10}$$

где

$$T_0 = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n}{n+1}, \qquad T_1 = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+3}\alpha_0{}^n, \qquad T_2 = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+4}\alpha_0{}^n \quad \text{и т. д.} \tag{1.11}$$

Обращаясь к четвертому уравнению системы (1.1), имеем

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gz_y}{w_i{}^2}\,\frac{d\varphi}{[1-(\alpha_0\varphi+\alpha_1\varphi^2+\alpha_2\varphi^3+\cdots)]^2} \tag{1.12}$$

И здесь, вынося в знаменателе $1-\alpha_0\varphi$ за скобки и разлагая второй сомножитель в ряд по уже известному принципу, находим

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gz_y}{w_i{}^2}\left[\frac{1}{(1-\alpha_0\varphi)^2}+2\alpha_1\frac{\varphi^2}{(1-\alpha_0\varphi)^3}+2\alpha_2\frac{\varphi^3}{(1-\alpha_0\varphi)^3}+\cdots\right]d\varphi$$

Отсюда, вводя обозначения

$$\begin{aligned}
P_0(\varphi) &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-\alpha_0\varphi)^2} = \frac{\varphi}{1-\alpha_0\varphi} = \sum_0^\infty \alpha_0{}^n\varphi^{n+1}\\
P_1(\varphi) &= 2\int_0^\varphi \frac{\varphi^2 d\varphi}{(1-\alpha_0\varphi)^3} = \sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{n+3}\alpha_0{}^n\varphi^{n+3}\\
P_2(\varphi) &= 2\int_0^\varphi \frac{\varphi^3 d\varphi}{(1-\alpha_0\varphi)^3} = \sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{n+4}\alpha_0{}^n\varphi^{n+4} \quad \text{и т. д.}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

и интегрируя в соответствующих пределах, получим

$$p = p_i \exp - \beta_0 \left[P_0(\varphi) + \alpha_1 P_1(\varphi) + \alpha_2 P_2(\varphi) + \cdots\right] \qquad \left(\beta_0 = \frac{gz_y}{w_i^2}\right) \tag{1.4}$$

В частности, при $\varphi = 1$

$$p_{i+1} = p_i \exp - \beta_0 (P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots) \tag{1.15}$$

где

$$P_0 = \sum_0^\infty \alpha_0^n, \qquad P_1 = \sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{n+3} \alpha_0^n, \qquad P_2 = \sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{n+4} \alpha_0^n \text{ и т. д.}$$

Заметим, что всегда $\beta_0 < \alpha_0$. В самом деле, по условию $\alpha_0 = z_y L_0 / w_i$, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{z_y}{w_i}\left(k_0 + \frac{g}{w_i}\right) = \frac{z_y}{w_i}\left(\frac{j_i}{v_i} + \frac{g}{w_i}\right) = \\ &= \frac{gz_y}{w_i^2}\left(1 + \frac{j_i}{g}\frac{w_i}{v_i}\right) = \frac{gz_y}{w_i^2}(1 + a) = \beta_0 (1 + a) \end{aligned} \tag{1.16}$$

где a — некоторая положительная величина, и, следовательно, при любом положительном a имеет место $\beta_0 < \alpha_0$. Это обстоятельство примем во внимание при последующих выкладках. Рассмотрим теперь первое уравнение системы (1.1). Имеем

$$dx = \frac{z_y}{p} d\varphi = \frac{z_y}{p_i} \exp \beta_0 \left[P_0(\varphi) + \alpha_1 P_1(\varphi) + \alpha_2 P_2(\varphi) + \cdots\right] d\varphi \tag{1.17}$$

Интегрируем это уравнение приближенно по формуле Эйлера-Маклорена

$$\int_0^\varphi f(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\left[f(0) + f(\varphi) + \frac{1}{6}\varphi\left(f'(0) - f'(\varphi)\right)\right] \tag{1.18}$$

Можно показать, что если функция $f(\varphi)$ в этой формуле представляется в виде

$$f(\varphi) = \exp(\alpha_0 \varphi + \alpha_1 \varphi^2 + \alpha_2 \varphi^3 + \cdots) \tag{1.19}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — малые соответствующих порядков, то при интегрировании этой функции от 0 до 1 формула Эйлера-Маклорена обеспечивает очень высокую точность. Так, например, при интегрировании функции

$$f(\varphi) = \exp(\alpha_0 \varphi + \alpha_0^2 \varphi^2 + \alpha_0^3 \varphi^3 + \cdots) = \exp \frac{\alpha_0 \varphi}{1 - \alpha_0 \varphi} \tag{1.20}$$

в указанных пределах относительная погрешность ε при $\alpha_0 = 0.2$ будет заключена в пределах

$$0.025\% < \varepsilon < 0.038\% \tag{1.21}$$

Это приблизительно соответствует точности, которая обеспечивается четырьмя членами разложения рассматриваемой функции в степенной ряд, что положено в основу самого метода С. А. Казакова.

Если в уравнении (1.17) отбросить все члены второго порядка малости под знаком exp, а величину β_0 заменить соответственно большей величиной α_0, то можно ожидать, что величина правой части этого уравнения почти не изменится. Зато она представится в виде функции (1.20), для которой погрешность при интегрировании указана выше (1.21), и тем самым доказывается возможность применения формулы (1.18) для интегрирования уравнения (1.17). Замечая что

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{z_y}{p}\right)\frac{dp}{dy} = \frac{gz_y}{pw^2}$$

из уравнения (1.17) при помощи формулы (1.18) находим

$$x - x_i = z_y \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{p} = \frac{z_y \varphi}{2} \left[\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p} + \frac{\varphi}{6} \left(\frac{g z_y}{p_i w_i^2} - \frac{g z_y}{p w^2} \right) \right] \tag{1.22}$$

При $\varphi = 1$ имеем

$$x_{i+1} = x_i + \frac{z_y}{2} \left[\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_{i+1}} + \frac{g z_y}{6} \left(\frac{1}{p_i w_i^2} - \frac{1}{p_{i+1} w_{i+1}^2} \right) \right] \tag{1.23}$$

или

$$x_{i+1} = x_i + \frac{z_y}{2 p_i} \left(1 + \frac{p_i}{p_{i+1}} \right) - \frac{g z_y^2}{12 p_i w_i^2} \left(\frac{p_i}{p_{i+1}} \frac{w_i^2}{w_{i+1}^2} - 1 \right) \tag{1.24}$$

причем этому выражению для удобства вычислений можно придать и такую форму:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{z_y}{p_i} \left[\frac{p_{i+1} + p_i}{2 p_{i+1}} - \frac{1}{12} \beta_0 \left(\frac{p_i}{p_{i+1}^2} \frac{w_i^2}{w_{i+1}^2} - 1 \right) \right] \quad \left(\frac{g z_y}{w_i^2} = \beta_0 \right) \tag{1.25}$$

Величины отношений p_i / p_{i+1} и w_i / w_{i+1} и коэффициент β_0 известны по ходу предыдущих вычислений [уравнения (1.6), (1.15)], поэтому x_{i+1} находится легко.

Для вычисления t_{i+1} и p_{i+1} необходимо иметь числовые таблицы функций T и P, распределенные по аргументу α_0, и таблицу показательных функций.

Коэффициенты α_0, α_1, α_2 и т. д. вычисляются по методам, изложенным в работах [1,2].

Что касается величины интервала z_y, то предварительные вычисления показывают, что для скоростей, которые имеют место при воздушной стрельбе, она может быть выбрана порядка 2.5 км и выше. При этом практически приходится вычислить 6—8 точек траектории. Более точные суждения по этому поводу могут быть сделаны на основании метода, изложенного в работе [1].

§ 2. Переходим к вычислению траекторий по независимому переменному w — вертикальной компоненте скорости полета снаряда.

В этом переменном дифференциальные уравнения движения снаряда представляются в виде

$$\frac{dy}{dw} = -L, \quad \frac{dt}{dw} = -\frac{L}{w}, \quad \frac{dp}{dw} = \frac{pg}{w^2} L, \quad \frac{dx}{dw} = -\frac{L}{p} \quad \left(L = \frac{1}{k + g / w} \right) \tag{2.1}$$

Полагая

$$L = L_0 + L_1 \varphi + L_2 \varphi^2 + \cdots \qquad \left(\varphi = \frac{w_i - w}{z_w} \right) \tag{2.2}$$

и z_w — произвольно выбранный интервал изменения вертикальной компоненты скорости, имеем $dw = -z_w d\varphi$ и из первого уравнения системы (1.2) определим

$$y = y_i + z_w \left(L_0 \varphi + \frac{1}{2} L_1 \varphi^2 + \frac{1}{3} L_2 \varphi^3 + \cdots \right) \tag{2.3}$$

или

$$y = y_i \left(1 + \beta_0 \varphi + \frac{1}{2} \beta_1 \varphi^2 + \frac{1}{3} \beta_2 \varphi^3 + \cdots \right) \tag{2.4}$$

где

$$\beta_0 = \frac{z_w L_0}{y_i}, \qquad \beta_1 = \frac{z_w L_1}{y_i}, \qquad \beta_2 = \frac{z_w L_2}{y_i} \tag{2.5}$$

В частности, при $\varphi = 1$

$$y_{i+1} = y_i \left(1 + \beta_0 + \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{1}{3} \beta_2 + \cdots \right) \tag{2.6}$$

Время полета снаряда t находим из второго уравнения (2.1):

$$dt = -\frac{L\,dw}{w} = \frac{dy}{w} = \frac{y_i(\beta_0 + \beta_1\varphi + \beta_2\varphi^2 + \cdots)}{w_i - z_w\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{y_i}{w_i}\,\frac{(\beta_0 + \beta_1\varphi + \beta_2\varphi^2 + \cdots)}{1 - \alpha_0\varphi} \qquad \left(\alpha_0 = \frac{z_w}{w_i}\right) \tag{2.7}$$

Вводя обозначения

$$T_0(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1 - \alpha_0\varphi} = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+1}}{n+1}$$

$$T_1(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi\,d\varphi}{1 - \alpha_0\varphi} = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+2}}{n+2} \tag{2.8}$$

$$T_2(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi^2\,d\varphi}{1 - \alpha_0\varphi} = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+3}}{n+3} \quad \text{и т. д.}$$

и интегрируя уравнение (2.7), имеем

$$t = t_i + \frac{y_i}{w_i}\,[\beta_0 T_0(\varphi) + \beta_1 T_1(\varphi) + \beta_2 T_2(\varphi) + \cdots] \tag{2.9}$$

или при $\varphi = 1$

$$t_{i+1} = t_i + \frac{y_i}{w_i}\,(\beta_0 T_0 + \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \cdots) \tag{2.10}$$

где

$$T_0 = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n}{n+1}, \qquad T_1 = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n}{n+2}, \qquad T_2 = \sum_0^\infty \frac{\alpha_0{}^n}{n+3}, \ \ldots \tag{2.11}$$

Замечая, что

$$\frac{dp}{p} = -g\,\frac{dy}{w^2} \tag{2.12}$$

и решая задачу относительно определения параметра p аналогично предыдущему, находим

$$p = p_i \exp - \gamma_0\,[\beta_0 P_0(\varphi) + \beta_1 P_1(\varphi) + \beta_2 P_2(\varphi) + \cdots] \qquad \left(\gamma = \frac{g y_i}{w_i{}^2}\right) \tag{2.13}$$

при обозначениях

$$P_0(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - \alpha_0\varphi)^2} = \frac{\varphi}{1 - \alpha_0\varphi} = \sum_0^\infty \alpha_0{}^n\,\varphi^{n+1}$$

$$P_1(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi\,d\varphi}{(1 - \alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+2}\,\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+2} \tag{2.14}$$

$$P_2(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\varphi^2\,d\varphi}{(1 - \alpha_0\varphi)^2} = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+3}\,\alpha_0{}^n\,\varphi^{n+3} \quad \text{и т. д.}$$

Полагая $\varphi = 1$, имеем

$$p_{i+1} = p_i \exp - \gamma_0\,(\beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \cdots) \tag{2.15}$$

Здесь

$$P_0 = \sum_0^\infty \alpha_0{}^n, \qquad P_1 = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+2}\,\alpha_0{}^n, \qquad P_2 = \sum_0^\infty \frac{n+1}{n+3}\,\alpha_0{}^n, \ \ldots \tag{2.16}$$

Для вычисления абсциссы x обращаемся к четвертому уравнению системы (2.1) и представляем его в виде

$$dx = \frac{dy}{p}$$

Рассматривая далее p как некоторую функцию y и руководствуясь соображениями, изложенными в § 1 при вычислении параметра x, применяем формулу Эйлера-Маклорена в виде

$$\int_{y_i}^{y} f(y)\, dy = \frac{y - y_i}{2}\left[f(y_i) + f(y) + \frac{y - y_i}{6}\{f'(y_i) - f'(y)\}\right] \tag{2.17}$$

Имея в виду, что

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dy} = -\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dw}\frac{dw}{dy} = \frac{g}{pw^2}$$

последовательно выводим

$$x - x_i = \int_{y_i} \frac{dy}{p} = \frac{y - y_i}{2}\left[\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p} + \frac{y - y_i}{6}\left(\frac{g}{p_i w_i^2} - \frac{g}{pw^2}\right)\right] \tag{2.18}$$

что при $y = y_{i+1}$ после несложных преобразований представляется в форме

$$x_{i+1} = x_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{p_i}\,\frac{p_{i+1} + p_i}{2p_{i+1}} - \frac{(y_{i+1} - y_i)^2}{12 p_i w_i^2}\, g\left(\frac{p_i}{p_{i+1}}\,\frac{w_i^2}{w_{i+1}^2} - 1\right) \tag{2.19}$$

Пользуясь обозначениями

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = (\beta_1 + \tfrac{1}{2}\beta_1 + \tfrac{1}{3}\beta_2 + \cdots)\, y_i$$

которые вытекают из уравнения (2.6), (2.19) можно представить в виде

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta y_i}{p_i}\,\frac{p_{i+1} + p_i}{2} - \gamma_0\,\frac{(\Delta y_i)^2}{12 p_i y_i}\left(\frac{p_i}{p_{i+1}}\,\frac{w_i^2}{w_{i+1}^2} - 1\right) \qquad \left(\frac{g y_i}{w_i^{\,2}} = \gamma_0\right) \tag{2.20}$$

Уравнения (1.25) и (2.20) наглядно показывают, что третьи слагаемые в этих уравнениях весьма мало влияют на результат. Это еще раз подчеркивает целесообразность применения формулы Эйлера-Маклорена к вычислению координаты x. Попутно заметим, что этот параметр вообще можно вычислять с большей относительной погрешностью, которая в этом случае не имеет существенного значения по причине относительной малости самого горизонтального перемещения снаряда при воздушной стрельбе.

Вычисление точек траектории по независимому переменному w ведется по тому же шаблону, что и в предыдущем случае. И здесь нужно иметь числовые таблицы специальных функций и общие таблицы показательных функций.

Потребная величина интервала z_w по предварительным вычислениям может быть принята порядка 100 м / сек, т. е. для составления таблиц стрельбы придется вычислить 5 ÷ 6 точек траектории.

Поступила 15 X 1951

Бежицкий институт транспортного машиностроения

ЛИТЕРАТУРА

1. Палечек Е. М. К вопросу о вычислении траекторий центров тяжести артиллерийских снарядов. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 1.

2. Казаков С. А. Вычисление траекторий центров тяжести артиллерийских снарядов. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 2. Стр. 129—138.