Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ В ОДНОМ СЛУЧАЕ

В. М. Старжинский

(Москва)

В заметке рассматриваются достаточные условия устойчивости невозмущенного движения по Ляпунову для случая, когда уравнения возмущенного движения приводятся к одному линейному уравнению третьего порядка.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\dddot{x} + p\ddot{x} + q\dot{x} + rx = 0 \tag{1.1}$$

где функции $p = p(t)$, $q = q(t)$, $r = r(t)$ — непрерывные и вещественные для всех значений t, не меньших некоторого предела, и удовлетворяют условиям

$$0 < l \leqslant p(t) \leqslant L, \qquad 0 < m \leqslant q(t) \leqslant M, \qquad 0 < n \leqslant r(t) \leqslant N$$

Заменим уравнение (1.1) системой

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = z, \qquad \dot{z} = -rx - qy - pz$$

Зададимся определенно положительной квадратичной формой V переменных x, y, z с постоянными коэффициентами:

$$V = \frac{1}{2}[Ax^2 + (B-1)y^2 + Cz^2 + 2Exy + 2xz + 2Gyz]$$

Производная от V в силу исходной системы уравнений имеет вид:

$$\dot{V} = -rx^2 - (Gq - E)y^2 - (Cp - G)z^2 - (q + Gr - A)xy -$$
$$- (p + Cr - E)xz - (Gp + Cq - B)yz$$

и будет неположительна, если

$$\varphi(q, r) = q^2 - 2Gqr + G^2r^2 - 2Aq - 2(AG - 2E)r + A^2 \leqslant 0 \tag{1.2}$$

$$\Phi(p, q, r) = a_{11}p^2 + a_{22}q^2 + a_{33}r^2 + 2a_{12}pq + 2a_{13}pr + 2a_{23}qr +$$
$$+ 2a_{14}p + 2a_{24}q + 2a_{34}r + a_{44} \leqslant 0 \tag{1.3}$$

где

$a_{11} = 2(AG - E)$, $\qquad a_{22} = 2(CE - G)$

$a_{33} = 2(BCG - C^2 \ E - G^3)$, $\qquad a_{44} = 2(-A^2G + ABE - E^3)$

$a_{12} = -AC + B - EG$, $\qquad a_{13} = -ACG - BG + 2CE + EG^2$,

$a_{23} = AC^2 - BC - CEG + 2G^2$, $\qquad a_{14} = A^2C - AB - AEG + 2E^2$,

$a_{24} = -ACE + 2AG - BE + E^2G$, $\qquad a_{34} = -ABC + 2AG^2 + B^2 - BEG + 2CE^2 - 4EG$

§ 2. Условия неположительности $\dot{V}$. Рассмотрим на плоскости qr параболу $\varphi(q, r) = 0$. Парабола касается оси q в точке $q = A$ и не пересекает оси r, если $AG - E > 0$, если же $AG - E < 0$, то координаты обеих точек пересечения параболы с осью r отрицательны. Ось параболы наклонена к оси q под углом $\beta = \operatorname{arc\,ctg} G$; вершина параболы находится в точке (q_0, r_0):

$$q_0 = \frac{A + EG^3 + 2EG}{(1 + G^2)^2}, \quad r_0 = \frac{G^2 (AG - E)}{(1 + G^2)^2}$$

Точки пересечения параболы с прямой $r = \rho$ будут

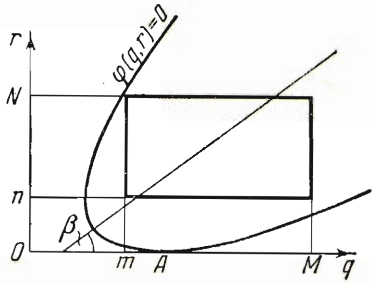
$$q_{1,2} = A + \rho G \mp 2\sqrt{\rho (AG - E)}$$

Прямоугольник $[m, M;\ n, N]$ будет находиться внутри (фиг. 1) или на границе параболы $\varphi(q, r) = 0$, если

$$A + nG - 2\sqrt{n (AG - E)} \leqslant m \qquad (2.1)$$

$$M \leqslant A + nG + 2\sqrt{n (AG - E)} \qquad (2.2)$$

$$A + NG - 2\sqrt{N (AG - E)} \leqslant m \qquad (2.3)$$



Фиг. 1

В дальнейшем будем предполагать, что положительные числа A, E и G удовлетворяют неравенству $AG - E > 0$.

а) Допустим, что числа A, E и G выбраны таким образом, что

$$nG - 2\sqrt{n (AG - E)} \leqslant NG - 2\sqrt{N (AG - E)}$$

Тогда неравенства (2.2) и (2.3) непротиворечивы, если

$$NG - 2\sqrt{N (AG - E)} \leqslant nG + 2\sqrt{n (AG - E)}$$

Последние два неравенства могут быть разрешены относительно A:

$$\frac{E}{G} + \frac{(\sqrt{N} - \sqrt{n})^2}{4} G \leqslant A \leqslant \frac{E}{G} + \frac{(\sqrt{N} + \sqrt{n})^2}{4} G$$

что может быть записано в виде

$$A = \frac{E}{G} + \frac{(\sqrt{N} - \sqrt{n})^2 + 4\varkappa\sqrt{Nn}}{4} G, \quad 0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$$

При этом левая часть неравенства (2.3) запишется в виде

$$A + NG - 2\sqrt{N (AG - E)} = \frac{E}{G} + \frac{[F(\varkappa, N)]^2}{4} G$$

где

$$F(\varkappa, \rho) = \left| 2\sqrt{\rho} - \sqrt{(\sqrt{N} - \sqrt{n})^2 + 4\varkappa\sqrt{Nn}} \right|$$

Наименьшее значение левой части неравенства (2.3) при фиксированном E достигается при $G = 2\sqrt{E} / F(\varkappa, N)$ и равно $F(\varkappa, N)\sqrt{E}$; функция $F(\varkappa, N)$ убывает при возрастании $\varkappa$ и $F(1, N) = \sqrt{N} - \sqrt{n}$.

б) Допустим, что числа A, E и G выбраны таким образом, что

$$NG - 2\sqrt{N (AG - E)} \leqslant nG - 2\sqrt{n (AG - E)}$$

или, разрешая относительно A, получим

$$A = \frac{E}{G} + \frac{(\sqrt{N} - \sqrt{n})^2 + 4\varkappa\sqrt{Nn}}{4} G, \qquad \varkappa \geqslant 1$$

Тогда левая часть неравенства (2.1) запишется в виде

$$A + nG - 2\sqrt{n\,(AG - E)} = \frac{E}{G} + \frac{[F\,(\varkappa,\,n)]^2}{4}\,G$$

Наименьшее значение левой части неравенства (2.1) при фиксированном E достигается при $G = 2\sqrt{E}\,/\,F\,(\varkappa,\,n)$ и равно $F\,(\varkappa,\,n)\sqrt{E}$; функция $F\,(\varkappa,\,n)$ убывает при убывании $\varkappa$ и $F\,(1,\,n) = \sqrt{N} - \sqrt{n}$.

Таким образом, при фиксированном E и

$$A = \frac{N+n}{\sqrt{N} - \sqrt{n}}\sqrt{E}, \qquad G = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{N} - \sqrt{n}} \tag{2.4}$$

условие (1.2) приводит к неравенствам

$$m \geqslant (\sqrt{N} - \sqrt{n})\sqrt{E}, \qquad M \leqslant \frac{N + 2\sqrt{Nn} + 5n}{\sqrt{N} - \sqrt{n}}\sqrt{E} \tag{2.5}$$

Указанная граница для m не может быть уменьшена при фиксированном E.

Перейдем к исследованию условия (1.3). Матрица $\| a_{ij} \|$ $(a_{ji} = a_{ij};\ i,\,j = 1, 2, 3, 4)$, составленная из коэффициентов уравнения поверхности $\Phi\,(p,\,q,\,r) = 0$, удовлетворяет соотношению

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ C & G & 1 & 0 \\ E & A & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 & 0 & C & E \\ 0 & 1 & G & A \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{33} \\ 0 & 0 & -\delta_{33} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\delta_{33} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}{}^2$$

При $\delta_{33} > 0$ поверхность $\Phi\,(p,\,q,\,r) = 0$ является эллиптическим параболоидом, при $\delta_{33} < 0$ — гиперболическим параболоидом и при $\delta_{33} = 0$ — параболическим цилиндром с образующей, параллельной оси r. Все миноры второго порядка матрицы $\| a_{ij} \|$ пропорциональны минору δ_{33}, т. е. $a_{ij}\,a_{kl} - a_{ik}\,a_{jl} = (ijkl)\,\delta_{33}$, при этом

$$\begin{array}{llll} (1123) = -G, & (1124) = -A, & (1133) = G^2, & (1134) = 2E - AG \\ (1144) = A^2, & (1232) = C, & (1233) = -CG, & (1234) = EG - B \\ (1243) = AC - B, & (1244) = -AE & (1342) = AC - EG & (1343) = BG - 2CE \\ (1344) = -AB + 2E^2, & (1422) = -E & (2233) = C^2 & (2234) = 2G - CE \\ (2244) = E^2, & (2343) = BC - 2G^2, & (2344) = 2AG - BE, & (3344) = B^2 - 4EG \end{array} \tag{2.6}$$

Направляющие косинусы оси симметрии s параболоида равны:

$$\cos\,(sp) = \frac{C}{\sqrt{1 + C^2 + G^2}}, \qquad \cos\,(sq) = \frac{G}{\sqrt{1 + C^2 + G^2}}, \qquad \cos\,(sr) = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2 + G^2}}$$

Координаты вершины параболоида $(p_1,\,q_1,\,r_1)$

$$p_1 = Cr_1 + \frac{-ACG + BG - C^2\,E + 2CG + E}{1 + C^2 + G^2}$$

$$q_1 = Gr_1 + \frac{A - AG^2 + BC - CEG + 2EG}{1 + C^2 + G^2}$$

при этом выражение для аппликаты r_1 вершины довольно громоздко. Параболоид касается плоскости pq в точке $(E,\,A)$, а двух других координатных плоскостей не пересекает, если $\delta_{33} > 0$, или пересекает по гиперболам, если $\delta_{33} < 0$.

Условие (1.3) будет выполнено, если прямоугольный параллелепипед $[l,\,L;\,m,\,M;\,n,\,N]$ будет находиться внутри или на границе поверхности $\Phi\,(p,\,q,\,r) = 0$, исследование чего в общем случае является затруднительным. Поэтому перейдем к исследованию частного случая, когда один из коэффициентов в уравнении (1.1) является постоянным.

§ 3. Частный случай. Рассмотрим случай, когда $r(t) \equiv 1$. Если в уравнении (1.1) ввести новое независимое переменное

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt[3]{r(\xi)}\, d\xi$$

то коэффициент при x в преобразованном уравнении обратится в единицу. При этом мы сохраним за новым независимым переменным и новыми коэффициентами при $dx / d\tau$ и $d^2 x / d\tau^2$ прежние обозначения и будем попрежнему предполагать, что

$$0 < l \leqslant p(t) \leqslant L, \qquad 0 < m \leqslant q(t) \leqslant M$$

Запишем условие (1.2) в виде

$$\varphi(q, 1) = q^2 - 2(A+G)q + (A-G)^2 + 4E < 0 \tag{3.1}$$

Это будет выполнено, если

$$A + G - 2\sqrt{AG - E} < m, \qquad M < A + G + 2\sqrt{AG - E} \tag{3.2}$$

Условие (1.3) принимает вид:

$$\Phi(p, q, 1) = a_{11} p^2 + 2a_{12} pq + a_{22} q^2 + 2(a_{13} + a_{14}) p + \\ + 2(a_{23} + a_{24}) q + a_{33} + 2a_{34} + a_{44} \leqslant 0 \tag{3.3}$$

Будем рассматривать последнее неравенство относительно p и подсчитаем дискриминант D квадратного трехчлена по степеням p, используя соотношения (2.6):

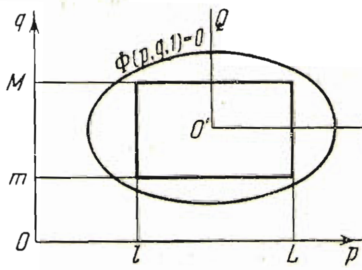
$$D = [-q^2 + 2(A+G)q - (A-G)^2 - 4E]\,\delta_{33}$$

Поскольку выражение в квадратных скобках положительно в силу (3.1), то потребуем, чтобы $\delta_{33} > 0$. Рассмотрим эллипс $\Phi(p, q, 1) = 0$. Условие (3.3) будет выполнено, если прямоугольник $[l, L; m, M]$ будет находиться внутри или на границе эллипса. Координаты центра эллипса определяются из уравнений

$$a_{11} p_0 + a_{12} q_0 = -a_{13} - a_{14}$$
$$a_{12} p_0 + a_{22} q_0 = -a_{23} - a_{24}$$

Используя соотношения (2.6), получим

$$p_0 = C + E, \qquad q_0 = A + G$$



Фиг. 2

Выберем коэффициенты исходной квадратичной формы V таким образом, чтобы центр эллипса O' совпал с центром прямоугольника, а оси $O'P$ и $O'Q$ эллипса были параллельны сторонам прямоугольника, как показано на фиг. 2. Получим

$$E = \frac{L+l}{2} - C, \qquad G = \frac{M+m}{2} - A$$

$$B = AC + EG = AC + \left(\frac{L+l}{2} - C\right)\left(\frac{M+m}{2} - A\right) \tag{3.4}$$

Уравнение эллипса $\Phi(p, q, 1) = 0$ в осях PQ будет

$$\frac{P^2}{4(CE - G)} + \frac{Q^2}{4(AG - E)} = 1$$

Условие (3.3) сведется к условию

$$\frac{(L-l)^2}{16\,(CE-G)}+\frac{(M-m)^2}{16\,(AG-E)}\leqslant 1 \tag{3.5}$$

В силу (3.4) условия (3.2) сводятся к одному:

$$\frac{M-m}{2}<2\sqrt{AG-E} \quad \text{или} \quad \frac{(M-m)^2}{16\,(AG-E)}<1$$

что выполнено в силу (3.5). Следовательно, для неположительности $\dot V$ остается лишь неравенство (3.5) при условиях

$$CE-G>0, \qquad AG-E>0 \tag{3.6}$$

Запишем неравенство (3.5), подставив для E и G их выражения из (3.4):

$$\frac{(L-l)^2}{8\,[(L+l)\,C-2C^2-(M+m)+2A]}+\frac{(M-m)^2}{8\,[(M+m)\,A-2A^2-(L+l)+2C]}\leqslant 1 \tag{3.7}$$

Выпишем матрицу коэффициентов исходной квадратичной формы V:

$$\left\|\begin{matrix} A & E & 1 \\ E & AC+EG-1 & G \\ 1 & G & C \end{matrix}\right\|$$

Условия определенной положительности V запишем в виде

$$A>0, \quad A\,(AC-1)+E\,(AG-E)>0, \quad (AC-1)^2+(AG-E)\,(CE-G)>0 \tag{3.8}$$

При этом третье из условий выполнено при условиях (3.6). Второе из условий (3.8) в силу (3.4) запишется в виде

$$4A\,(AC-1)+(L+l-2C)\,[(M+m)\,A-2A^2-(L+l)+2C]>0$$

Покажем, что при постоянных $p\,(t)$ и $q\,(t)$ мы получаем для устойчивости область Рауса. Положим $A=q-\alpha$, $C=p-\gamma$ $(\alpha>0,\ \gamma>0)$. Тогда условия (3.6) принимают вид:

$$p\gamma-\alpha-\gamma^2>0, \qquad q\alpha-\gamma-\alpha^2>0$$

и выполняются при достаточно малых α и γ. Первое из условий (3.8) опять-таки выполнено при достаточном малом α, а второе выполнено при достаточно малом γ и $AC-1>0$, т. е. при

$$pq-1>p\alpha+q\gamma-\alpha\gamma$$

Поскольку правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой, то это и означает, что при постоянных $p\,(t)$ и $q\,(t)$ мы получаем для устойчивости область Рауса: $p>0$, $pq>1$.

В общем для $r\,(t)\equiv 1$ случае, условия теоремы Ляпунова об устойчивости будут выполнены, если положим (3.9)

$$\frac{(L-l)^2}{8\,[(L+l)\,C-2C^2-(M+m)+2A]}=k, \qquad \frac{(M-m)^2}{8\,[(M+m)\,A-2A^2-(L+l)+2C]}=1-k$$

и, придавая k значения $0<k<1$, будем рассматривать (3.9) как уравнения для определения $A>0$ и $C>0$. Единственное оставшееся второе из условий (3.8) принимает вид:

$$32\,(1-k)\,A\,(AC-1)+(L+l-2C)\,(M-m)^2>0 \tag{3.10}$$

Поступила 15 IV 1952