Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

**И. Г. Малкин**

(Свердловск)

**§ 1. Постановка задачи.** В работе [1] М. А. Айзерман исследовал вопрос об устойчивости положения равновесия $x_1 = \cdots = x_n = 0$ регулируемой системы, описываемой дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + F_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $p_{sj}$ — постоянные, для которых характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \rho & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - \rho & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2}$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями. Что же касается функций $F_s$, то относительно них предполагается, что в каждой точке области

$$|x_s| \leqslant A \tag{1.3}$$

можно найти такие числа $a_{sj}$, что

$$F_s(x_1, \ldots, x_n) = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \tag{1.4}$$

При этом $a_{sj}$ будут изменяться в пределах

$$a_{sj}^{**} \leqslant a_{sj} \leqslant a_{sj}^{*} \tag{1.5}$$

Требуется определить значения $a_{sj}^{**}$ и $a_{sj}^{*}$, при которых равновесие асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при любом выборе функций $F_s$, удовлетворяющих условиям (1.3) и (1.5), и определить область допустимых начальных отклонений. М. А. Айзерман решает указанную задачу следующим образом.

Пусть $W(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная определенно-отрицательная квадратичная форма. Так как все корни уравнения (1.2) имеют отрицательные вещественные части, то по известной теореме Ляпунова существует одна и только одна квадратичная форма $V(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = W(x_1, \ldots, x_n)$$

и эта форма будет обязательно определенно-положительной.

Если теперь составить производную по времени от формы $V$ в силу уравнений (1.1), т. е. выражение

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} (p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + F_s) \tag{1.6}$$

то эта производная будет определенно-отрицательной, если только величины $a_{sj}^{**}$ и $a_{sj}^{*}$ достаточно малы. При этом условии согласно известной теореме Ляпунова равновесие будет асимптотически устойчиво и область допустимых начальных отклонений будет ограничена поверхностью наибольшего из эллипсоидов $V = \text{const}$, целиком расположенных в области (1.3). Таким образом, задача устойчивости приведена к алгебраической задаче определения наибольших значений для $|a_{sj}^{*}|$ и $|a_{sj}^{**}|$, при которых функция (1.6) будет определенно-отрицательной при выполнении условий (1.4) и (1.5).

Ширина области (1.5) будет зависеть от выбранной формы $W$. Однако, какова бы ни была эта форма, ширина области (1.5) определяется прежде всего запасом устойчивости линеаризированной системы, т. е. численными значениями вещественных частей корней уравнения (1.2). Очевидно прежде всего, что ширина области (1.5) должна быть во всяком случае не больше той, в которой все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11} + a_{11} - \rho & p_{12} + a_{12} & \ldots & p_{1n} + a_{1n} \\ p_{21} + a_{21} & p_{22} + a_{22} - \rho & \ldots & p_{2n} + a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} + a_{n1} & p_{n2} + a_{n2} & \ldots & p_{nn} + a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0$$

имеют отрицательные вещественные части. Однако практически при применении указанного выше метода ширина области (1.5) получается меньше указанного для нее верхнего предела.

В настоящей работе задача об устойчивости равновесия системы вида (1.1) рассматривается в несколько измененной постановке. При указанных условиях относительно $F_s(x_1, \ldots, x_n)$ эти функции удовлетворяют в области (1.3) неравенствам

$$|F_s(x_1, \ldots, x_n)| < Q\{|x_1| + \ldots + |x_n|\} \tag{1.7}$$

где $Q$ — некоторая положительная постоянная. Мы ставим задачей определить возможно большие значения для этой постоянной, при которых равновесие асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, каковы бы ни были функции $F_s$, удовлетворяющие условиям (1.7), а также дать оценку границ области допустимых начальных отклонений. В следующем параграфе доказывается теорема, в которой дается оценка указанных величин, выраженная непосредственно через корни уравнения (1.2).

**§ 2. Критерий устойчивости.** Обозначим через $x_{sj}(t, t_0)$ фундаментальную систему решений уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n$$

определяемую начальными условиями (при $t = t_0$)

$$x_{sj}(t_0, t_0) = \delta_{sj} \qquad ((s, j = 1, \ldots, n); \;\; \delta_{sj} \text{ — символ Кронекера})$$

Пусть $\lambda > 0$ — наименьшая из величин $\operatorname{Re}(-\rho_1), \ldots, \operatorname{Re}(-\rho_n)$, где $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни уравнения (1.2). Пусть далее $\alpha$ обозначает какую-нибудь положительную величину, меньшую $\lambda$. Тогда при любых $t \geqslant t_0$ и $t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Me^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.1}$$

где $M$ — положительная постоянная.

На основании (1.7) можно писать

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_{sj} F_j\right| < Q \left|\sum_{j=1}^{n} |x_{sj}| \{|x_1| + \cdots + |x_n|\}\right. \tag{2.2}$$

Обозначим через $m$ наибольшее число членов, содержащееся в правой части каждого из неравенств (2.2). Число $m$ не превосходит, очевидно, $n^2$, но оно может быть и меньше этой величины. Так, например, если каждая из функций $F_j$ содержит не больше одного аргумента, то $m \leqslant n$. То же самое будет иметь место и в том случае, если при каждом $s$ только одна из функций $x_{s1}, \ldots, x_{sn}$ отлична от нуля, что будет, например, иметь место, если матрица коэффициентов $p_{sj}$ является диагональной. Если при каждом $s$ число отличных от нуля функций $x_{s1}, \ldots, x_{sn}$ не превосходит $p$, а каждая из функций $F_j$ содержит не более $q$ аргументов, то $m \leqslant pq$. Наконец, если только одна из функций $F_j$ отлична от нуля и она зависит только от одного аргумента, то $m = 1$.

Теперь критерий устойчивости можно выразить следующим образом.

*Теорема.* Если выполняется условие

$$Q < \frac{\alpha}{Mm} \tag{2.3}$$

то положение равновесия $x_1 = \cdots = x_n = 0$ для системы (1.1) будет асимптотически устойчиво при любом выборе функций $F_s$, удовлетворяющих неравенствам (1.7), и при любых начальных отклонениях, лежащих в области

$$|x_s^\circ| \leqslant \eta \tag{2.4}$$

где $\eta$ удовлетворяют условию

$$\eta < A\left(\frac{1}{nM} - \frac{mQ}{n\alpha}\right) \tag{2.5}$$

*Доказательство.* Пусть $x_s(t)$ — произвольное решение уравнений (1.1) с начальными значениями $x_s^\circ = x_s(0)$, лежащими в области (2.4). Для этого решения величины $F_s$ будут вполне определенными функциями времени. Поэтому, рассматривая (1.1) как линейную неоднородную систему и интегрируя ее по методу Коши, находим, что функции $x_s(t)$ необходимо удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j^\circ x_{sj}(t, 0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t x_{sj}(t, \tau) F_j[x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)]\, d\tau \tag{2.6}$$

которые, следовательно, имеют решение. Покажем, что функции $x_s(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|x_s(t)| \leqslant Ae^{-\varepsilon t} \tag{2.7}$$

где $\varepsilon$ — достаточно малое положительное число. В самом деле, из (2.5) вытекает, что $\eta$ во всяком случае меньше $A$ и, следовательно, условия (2.7), выполняясь при $t = 0$ со знаками неравенства, будут выполняться по крайней мере при $t > 0$, достаточно малом. Допустим, что эти условия при некоторых значениях $t$ нарушаются. Тогда должен существовать такой момент времени $t = T$, при котором впервые хотя бы одно из условий (2.7) выполняется со знаком равенства. Так как при $0 \leqslant t \leqslant T$ условия (2.7) выполняются, то, полагая $\varepsilon < \alpha$ и принимая во внимание (2.3), (2.2) и (2.1), из (2.6) найдем

$$|x_s(T)| < nM\eta e^{-\alpha T} + mMQA \int_0^T e^{-\alpha(T-\tau)} e^{-\varepsilon\tau} d\tau =$$

$$= nM\eta e^{-\alpha T} + \frac{mMAQ}{\alpha - \varepsilon} e^{-\varepsilon T}\left(1 - e^{-(\alpha-\varepsilon)T}\right) < A\left(\frac{n\eta M}{A} + \frac{mMQ}{\alpha - \varepsilon}\right) e^{-\varepsilon T} \tag{2.8}$$

На основании (2.5) и (2.3) величину $\varepsilon$ можно выбрать настолько малой, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{n\eta M}{A}+\frac{mMQ}{\alpha-\varepsilon}<1$$

Но тогда неравенства (2.8) будут противоречить предположению, что при $t=T$ хотя бы одно из условий (2.7) выполняется со знаком равенства. Следовательно, условия (2.7) выполняются при всех $t>0$, что и доказывает теорему.

**§ 3. Анализ полученного критерия.** В формуле (2.3), определяющей $Q$, фигурирует постоянная $\alpha$. Этой постоянной согласно условию теоремы можно приписать произвольное значение, меньшее $\lambda$. Не следует, однако, думать, что наибольшее значение для $Q$ мы получим, если положим $\alpha=\lambda$. Дело в том, что от $\alpha$ зависит входящая также в выражение для $Q$ величина $M$ и максимум $Q$, вообще говоря, не совпадает с наибольшим значением $\alpha$. На практике величину $\alpha$ следует выбирать таким образом, чтобы получилось наибольшее значение для $Q$, что потребует решения элементарной задачи на максимум и минимум.

Область допускаемых начальных отклонений определяется формулой (2.5). Если функции $F_s$ удовлетворяют условиям (1.7) во всем пространстве, т. е. если $A=\infty$, то и $\eta=\infty$, т. е. рассматриваемое положение равновесия будет устойчиво при любых начальных отклонениях. Если же $A\neq\infty$, то $\eta$ зависит как от $A$, так и от взятого значения $Q$. Следует указать, что формула (2.5) дает грубую оценку для $\eta$. Повидимому, для этой величины можно дать более точную оценку.

Для пояснения выкладок и для сравнения с критерием М. А. Айзермана рассмотрим следующий пример.

*Пример.* Пусть предложена система

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda x+F(y),\qquad \frac{dy}{dt}=px-\lambda y \tag{3.1}$$

где $p$ и $\lambda$ — положительные постоянные, а функция $F(y)$ удовлетворяет неравенству $|F(y)|<Q|y|$. Требуется определить возможно наибольшее значение $Q$, при котором равновесие $x=y=0$ устойчиво. В рассматриваемом случае

$$x_{11}(t,t_0)=x_1(t,t_0)=e^{-\lambda(t-t_0)},\qquad x_{21}(t,t_0)=y_1(t,t_0)=p(t-t_0)\,e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$x_{12}(t,t_0)=x_2(t,t_0)=0,\qquad x_{22}(t,t_0)=y_2(t,t_0)=e^{-\lambda(t-t_0)}$$

Положим $\alpha=\lambda-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\lambda)$. Тогда можно писать

$$|x_{sj}(t,t_0)|<Me^{-\alpha(t-t_0)}\qquad \left(M=\max\left\{1,\frac{p}{\varepsilon e}\right\}\right)$$

Так как в рассматриваемом случае $m=1$ (вследствие того, что имеется только одна нелинейная функция, зависящая от одного аргумента), то (2.3) дает

$$Q<\frac{\lambda-\varepsilon}{M} \tag{3.2}$$

Полагая в уравнениях (3.1) $F=ay$, легко найдем, что характеристическое уравнение будет иметь отрицательные корни при условии

$$a<Q^*=\frac{\lambda^2}{p}$$

Следовательно, для того чтобы равновесие было устойчивым при любом выборе функции $F$, удовлетворяющей неравенству $|F|<Q|y|$, необходимо, чтобы $Q$ во всяком случае не превосходил величины $Q^*$.

В зависимости от величины отношения $\lambda/p$ будем рассматривать два случая.

*Случай 1.* $\lambda / p < 2 / e$. В этом случае наибольшее значение для $Q$ получим, если положим $\alpha = {}^1/_2 \lambda$ и, следовательно, $M = 2p / \lambda e$. Формула (3.2) дает для $Q$

$$Q < \frac{e}{4} \frac{\lambda^2}{p} = \frac{e}{4} Q^* \approx 0.68\, Q^*$$

Это значение составляет свыше 68% максимально возможного.

*Случай 2.* $\lambda / p > 2 / e$. В этом случае следует положить $\alpha = p / e$, что даст $M = 1$ и

$$Q < \lambda - \frac{p}{e} = \left(\frac{p}{\lambda} - \frac{p^2}{e\lambda^2}\right) Q^*$$

Отношение $Q / Q^*$ зависит в этом случае от $p / \lambda$.

Найдем теперь величину $Q$, пользуясь методом М. А. Айзермана. С этой целью, полагая $W = -x^2 - y^2$, ищем квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2}(Ax^2 + Bxy + Cy^2)$$

удовлетворяющую уравнению

$$-\lambda x \frac{\partial V}{\partial x} + (px - \lambda y)\frac{\partial V}{\partial y} = -x^2 - y^2$$

Приравнивая коэффициенты, легко находим

$$A = -\frac{1}{\lambda} - \frac{p^2}{2\lambda^3}, \qquad B = \frac{p}{2\lambda^2}, \qquad C = -\frac{1}{\lambda}$$

Заменяя теперь уравнения (3.1) уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = px - \lambda y$$

составляем производную от $V$ по $t$ в силу этих уравнений. Имеем

$$\frac{dV}{dt} = -x^2 - \left(1 - \frac{ap}{2\lambda^2}\right) y^2 - \frac{a}{\lambda}\left(1 + \frac{p^2}{2\lambda^2}\right) xy$$

Для того чтобы эта форма получилась определенно-отрицательной, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$a^2\left(1 + \frac{p^2}{2\lambda^2}\right)^2 - 4\lambda^2\left(1 - \frac{ap}{2\lambda^2}\right) < 0 \tag{3.3}$$

Интересующая нас величина $Q$ совпадает с наибольшим значением величины $|a|$, при котором справедливо неравенство (3.3). Полагая $a = kQ^*$, легко находим, что $k$ совпадает с положительным корнем уравнения

$$k^2 + \frac{8\lambda^2 p^2}{(2\lambda^2 + p^2)^2} k - \frac{16\lambda^2 p^2}{(2\lambda^2 + p^2)^2} = k^2 + \frac{8(\lambda / p)^2}{[1 + 2(\lambda / p)^2]^2} k - \frac{16(\lambda / p)^2}{[1 + 2(\lambda / p^2]^2} = 0$$

Этот корень всегда зависит от отношения $\lambda / p$. При $\lambda / p = 1 / \sqrt{2}$ имеем $k = 1$ и, следовательно, для $Q$ получается максимально возможное значение $Q^* = \lambda / \sqrt{2}$. Однако при $\lambda / p$, достаточно малом, величина $k$ получается сколь угодно малой. В то же время изложенный выше метод дает для этого случая $k > 0.68$.

Рассмотренный пример показывает, что в одних случаях изложенный выше метод дает лучшие результаты, чем метод М. А. Айзермана, а в других случаях предпочтительней пользоваться последним методом.

Поступила 22 VI 1951

Уральский государственный университет

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Об учете нелинейных функций от нескольких аргументов при исследовании устойчивости системы автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика. 1947. Т. VIII. Вып. 1.