

О ФУНКЦИИ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Р. А. Межлумян

(Москва)

В работе рассматривается построение функции поперечной деформации, позволяющей определить коэффициент Пуассона при любой степени деформирования материала. Дается способ перестроения диаграммы одноосного растяжения в график функции $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$.

1. Вывод функции поперечной деформации. Основные зависимости между напряжениями и деформациями при упруго-пластических деформациях получены А. А. Ильюшиным [1] в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \theta + \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_{xx}, & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xy} \\ \sigma_y &= \left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \theta + \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_{yy}, & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{yz} \\ \sigma_z &= \left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \theta + \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_{zz}, & \tau_{zx} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{zx} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Эти уравнения справедливы по крайней мере в тех случаях, когда соблюдены условия простого нагружения [1]. Рассмотрим одноосное растяжение или сжатие. В этих случаях условия простого нагружения выполняются тождественно, так как в процессе деформирования направление главной оси напряжения и главной оси деформаций не меняются и совпадают с осями растягиваемого или сжимаемого стержня.

Пусть ось z направлена по продольной оси растягиваемого стержня, а оси x и y перпендикулярны ей. Тогда из граничных условий имеем

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \sigma_z = \frac{P}{F_k} \neq 0 \quad (1.2)$$

Здесь F_k — площадь поперечного сечения при данной нагрузке, P — растягивающее усилие. На основании (1.2) из выражений (1.1) для σ_x , σ_y и σ_z имеем

$$\left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \theta + \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_{xx} = 0 \quad (1.3)$$

$$\left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \theta + \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_{yy} = 0 \quad (1.4)$$

$$\left(K - \frac{2}{9} \frac{\sigma_i}{e_i} \right) \theta + \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_{zz} = \sigma_z \quad (1.5)$$

Сравнивая уравнения (1.3) и (1.4), имеем $e_{xx} = e_{yy}$. Складывая уравнения (1.3), (1.4), (1.5), получим

$$\sigma_z = 3K\theta \quad (\theta = 2e_{xx} + e_{zz}) \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в уравнение (1.5) и учитывая, что

$$\frac{\sigma_i}{e_i} = 3G [1 - \chi(e_i)] \quad (1.7)$$

получим соотношение между поперечными и продольными удлинениями:

$$e_{xx} = \frac{2G [1 - \chi(e_i)] - 3K}{6K + 2G [1 - \chi(e_i)]} e_{zz} \quad \text{или} \quad e_{xx} = -\alpha(e_i) e_{zz} \quad (1.8)$$

Здесь $\alpha(e_i)$ — функция поперечной деформации:

$$\alpha(e_i) = \frac{3K - 2G [1 - \chi(e_i)]}{6K + 2G [1 - \chi(e_i)]} \quad (1.9)$$

Подставим сюда модули сдвига G и объемной деформации K , выраженные через модуль нормальной упругости E и коэффициент Пуассона ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1.10)$$

После преобразований получим [2,3]

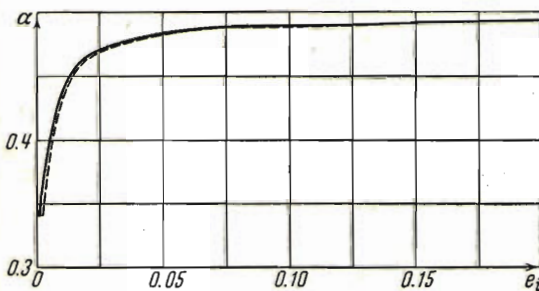
$$\alpha(e_i) = \frac{1 + \nu - (1 - 2\nu) [1 - \chi(e_i)]}{2(1 + \nu) + (1 - 2\nu) [1 - \chi(e_i)]} \quad (1.11)$$

Для $e_i \leq e^*$, где e^* — интенсивность деформаций в пределе пропорциональности, функция $\chi(e_i)$ тождественно равна нулю и согласно (1.11) функция поперечной деформации при упругих деформациях постоянна и равна коэффициенту Пуассона $\alpha(e_i) = \nu = \text{const}$. С увеличением интенсивности деформаций, начиная с предела пропорциональности, функция $\chi(e_i)$ монотонно растет, от нуля стремясь к единице. Из (1.11) видно, что при монотонном возрастании функции $\chi(e_i)$ функция $\alpha(e_i)$ также монотонно растет, так что $\alpha(e_i) \rightarrow 0.5$ при $\chi(e_i) \rightarrow 1$. Таким образом, [2,3] имеем

$$\nu \leq \alpha(e_i) \leq 0.5 \quad (1.12)$$

Следовательно, в замкнутом интервале $[e^*, e^{**}]$, где e^{**} — интенсивность деформаций при разрушении, функции $\alpha(e_i)$ и $\chi(e_i)$ непрерывны и ограничены.

2. Построение функций поперечной деформации по экспериментальным данным. Пусть нам дана диаграмма одноосного растяжения в условиях напряжений и деформаций, т. е. нам известен из опыта ряд значений условного нормального напряжения и осевого относительного удлинения:



Фиг. 1

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_0}, \quad e_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.1)$$

Здесь P — растягивающая сила, F_0 — первоначальная площадь поперечного сечения и l — длина. При растяжении интенсивность напряжений равна истинному осевому нормальному напряжению $\sigma_{\text{н}}$, которое определяется формулой

$$\sigma_i = \sigma_{\text{н}} = \frac{P}{F_k} \quad (2.2)$$

Здесь F_k — истинная площадь растягиваемого образца, соответствующая данной нагрузке. Между F_k и F_0 существует очевидное соотношение

$$F_k = F_0 [1 - \alpha(e_i) e_1]^2 \quad (2.3)$$

Из (2.1), (2.2) и (2.3) следует

$$\sigma_i = \sigma_{ii} = \frac{\sigma_1}{[1 - \alpha(e_i) e_1]^2} \quad (2.4)$$

Интенсивность деформаций при растяжении равна:

$$e_i = \frac{2}{3} [1 + \alpha(e_i)] e_1 \quad (2.5)$$

Далее функция $\chi(e_i)$ в общем случае определяется следующей формулой

$$\chi(e_i) = 1 - \frac{\sigma_i}{3Ge_i} \quad (2.6)$$

В первом приближении предположим, что материал несжимаемый; тогда

$$3G = E, \quad e_i = e_1 \quad (2.7)$$

Определяем функцию $\chi(e_i)$ в первом приближении:

$$\chi^{(1)}(e_1) = 1 - \frac{\sigma_1}{Ee_1} \quad (2.8)$$

Подставляя значения функции $\chi^{(1)}(e_1)$, определяемой формулой (2.8), в уравнение (1.11), строим функцию поперечной деформации в первом приближении

$$\alpha^{(1)}(e_1) = \frac{1 + \nu - (1 - 2\nu)[1 - \chi^{(1)}(e_1)]}{2(1 + \nu) + (1 - 2\nu)[1 - \chi^{(1)}(e_1)]} \quad (2.9)$$

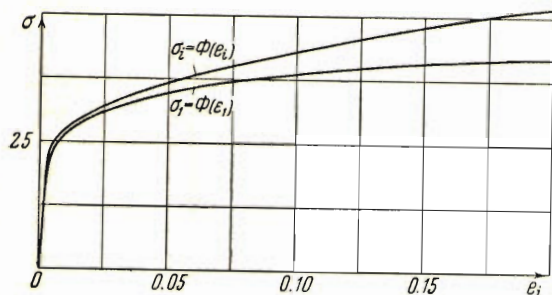
Во втором приближении интенсивности напряжений и деформаций вычисляем формулами

$$\sigma_i^{(2)} = \frac{\sigma_1}{[1 - \alpha^{(1)}(e_1) e_1]^2}, \quad (2.10)$$

$$e_i^{(2)} = \frac{2}{3} [1 + \alpha^{(1)}(e_1)] e_1$$

$$\chi^{(2)}(e_i) = 1 - \frac{\sigma_i^{(2)}}{3Ge_i^{(2)}} \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (1.11), строим функцию поперечной деформации во втором приближении.



Фиг. 3

Процесс последовательных приближений продолжаем до тех пор, пока разница последовательных значений вычисляемых величин не уменьшится до требуемой величины. Сходимость метода последовательных приближений доказываем, базируясь на принципе сжатых отображений. В самом деле, функция $\alpha(e_i)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Тихонова-Качинского и, следовательно, последовательность функций $\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ сходится равномерно. На основании теоремы о неявной функции легко показать, что единственным пределом равномерно сходящейся последовательности функций $\alpha, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots$ является функция $\alpha(e_i)$. Таким образом, располагая данными σ_1 и e_1 , которые легко изменяются при испытаниях на растяжение, можем построить зависимость $\sigma_i = \sigma_i(e_i)$.

В качестве примера приведем перестроение условной диаграммы растяжения для сплава Д1Т. Механические свойства сплава при 20° С следующие: $E = 7000 \text{ кг/мм}^2$, $G = 2600 \text{ кг/мм}^2$, $\nu = 0.34$. Состояние материала — закаленный и естественно состаренный. Данные материала и диаграмма взяты из работы [4]. Путь вычислений значе-

Таблица 1

σ_1	$e_1 \cdot 10^5$	$E e_1$	σ_1^*	$\chi^{(1)}(e_1)$	$\alpha^{(1)}(e_1)$	F_k/F_0
19.600	280	19.600	0.000	0.000	0.340	1.000
21.900	338	23.660	1.760	0.0742	0.351	0.998
24.000	538	37.660	13.660	0.362	0.392	0.992
26.800	991	69.370	42.570	0.615	0.434	0.990
30.000	1 980	138.600	108.600	0.784	0.462	0.980
32.000	2 950	204.500	172.500	0.844	0.473	0.970
33.750	3 920	274.400	240.650	0.878	0.478	0.960
35.000	4 870	340.900	305.900	0.896	0.482	0.955
36.000	5 820	407.400	371.400	0.912	0.485	0.942
36.750	6 760	473.200	436.450	0.922	0.487	0.932
37.400	7 690	538.300	500.900	0.930	0.488	0.923
38.000	8 610	602.700	564.700	0.936	0.489	0.914
38.500	9 520	666.400	627.900	0.942	0.490	0.902
40.000	11 760	823.200	783.200	0.948	0.491	0.870
40.750	13 960	977.200	936.450	0.958	0.492	0.856
42.000	18 410	1274.700	1232.700	0.964	0.493	0.810

Таблица 2

$\sigma^{(1)}$	$e_i^{(1)} \cdot 10^5$	$3Ge_i^{(1)}$	$\sigma_i^{(1)*}$	$\chi^{(2)}(e_i)$	$\alpha^{(1)}(e_i)$
19.600	252	19.600	0.000	0.000	0.340
21.940	306	23.900	1.960	0.082	0.352
24.100	502	39.200	15.100	0.385	0.395
27.000	954	74.500	47.500	0.637	0.437
30.600	1 950	152.200	121.600	0.798	0.464
33.000	2 940	229.300	196.300	0.854	0.474
35.200	3 940	307.200	272.000	0.885	0.479
36.600	4 930	384.000	347.400	0.904	0.483
38.200	5 930	462.000	423.800	0.918	0.486
39.400	6 930	541.000	501.600	0.925	0.487
40.500	7 930	618.300	577.800	0.933	0.488
41.600	8 930	696.000	654.400	0.939	0.489
42.700	9 920	774.000	732.300	0.944	0.490
46.000	12 420	968.000	922.000	0.952	0.491
47.600	14.900	1160.000	1114.400	0.959	0.492
52.000	19.900	1553.000	1501.000	0.965	0.493

ний $\alpha(e_i)$, $\chi(e_i)$, e_i , σ_i виден из табл. 1 и 2, где $\sigma_1^* = Ee_1 - \sigma_1$, $\sigma_i^{(1)*} = 3Ge_i^{(1)} - \sigma^{(1)}$, причем значения напряжений даны в кг/мм². Графики функций σ_i , $\alpha(e_i)$ и $\chi(e_i)$ показаны на фиг. 1, 2 и 3, где пунктиром показаны первые приближения.

Поступила 31 III 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. Гостехиздат. М. 1948.
2. М е ж л у м я н Р. А. Определение несущей способности тонкостенной конструкции с учетом упрочнения материала. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
3. М е ж л у м я н Р. А. Прикладная теория упруго-пластических оболочек и применение ее к расчету конструкций. Инженерный сборник. 1951. Т. X.
4. Р а т н е р С. И., Г а л и м у р з а А. Г., К а д о б н о в а Н. В. Диаграммы деформации различных полуфабрикатов из цветных сплавов. Оборонгиз. 1951.