Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ МАССЫ ВНУТРИ НЕКРУГОВОГО КОНУСА

В. В. Соколовский

(Москва)

Настоящая работа посвящена напряженному состоянию пластической массы, ограниченной жесткой стенкой формы некругового конуса. Пластическая масса перемещается по направлению к вершине конуса, а на стенке имеет место полное прилипание.

Частный случай напряженного состояния пластической массы с жесткой стенкой формы кругового конуса был уже рассмотрен [1] нами ранее [1].

Примем сферическую систему координат $r\theta\varphi$ с центром в вершине конуса; напряженное состояние в этой системе определяется компонентами σ_r, σ_θ, σ_φ, $\tau_{\theta\varphi}$, $\tau_{\varphi r}$, $\tau_{r\theta}$.

Будем искать решение, предполагая, что $\tau_{\theta\varphi}=0$, а касательные компоненты напряжения $\tau_{\varphi r}$ и $\tau_{r\theta}$ зависят только от θ и φ, но не зависят от r.

Дифференциальные уравнения равновесия в сферических координатах имеют следующий вид:

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial\varphi}+2\sigma_r-(\sigma_\theta+\sigma_\varphi)+\tau_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta=0$$
$$\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+3\tau_{r\theta}+(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta=0,\qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+3\tau_{\varphi r}=0 \tag{1}$$

Основные зависимости между компонентами напряжения и деформации в предположении о несжимаемости материала

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi=0$$

примем в обычной форме:

$$\varepsilon_r=\frac{E}{S}(\sigma_r-\sigma),\qquad \varepsilon_\theta=\frac{E}{S}(\sigma_\theta-\sigma),\qquad \varepsilon_\varphi=\frac{E}{S}(\sigma_\varphi-\sigma)$$
$$\gamma_{\varphi r}=\frac{E}{S}\tau_{\varphi r},\qquad \gamma_{r\theta}=\frac{E}{S}\tau_{r\theta} \tag{2}$$

Среднее напряжение σ, входящее в эти формулы, выражается так:

$$3\sigma=\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_\varphi$$

а интенсивности напряжений и деформаций имеют вид [2]:

$$S=\sqrt{\tfrac{1}{6}\left[(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)^2+(\sigma_\varphi-\sigma_r)^2+(\sigma_r-\sigma_\theta)^2\right]+\tau_{\varphi r}{}^2+\tau_{r\theta}{}^2}$$

$$E=\sqrt{\tfrac{1}{6}\left[(\varepsilon_\theta-\varepsilon_\varphi)^2+(\varepsilon_\varphi-\varepsilon_r)^2+(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)^2\right]+\gamma_{\varphi r}{}^2+\gamma_{r\theta}{}^2}$$

---

[1] Воспользуемся случаем для исправления опечатки, вкравшейся в нашу статью [1]. На стр. 86 во втором уравнении (5.1) напечатано: $+3(t\sin\psi)=0$, должно быть: $+3(1-\mu)(t\sin\psi)=0$. Остальные формулы написаны правильно.

[2] Обозначения для компонент деформации сдвига отличаются от употребляемых обычно коэффициентом 2.

Условие пластичности без упрочнения материала выражает постоянство интенсивности напряжений:

$$S = k \tag{3}$$

причем k — физическая константа.

При решении поставленной задачи естественно считать, что смещение частиц будет происходить по направлению радиусов. Поэтому будем искать точное решение задачи, принимая компоненты смещения в виде

$$u_r = u_r(r, \theta, \varphi), \qquad u_\theta = u_\varphi = 0$$

Зависимости между компонентами деформации и радиальной компонентой смещения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad 2\gamma_{\theta\varphi} = 0, \quad 2\gamma_{\varphi r} = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}, \quad 2\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

дают на основании (2) такое равенство:

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi \tag{4}$$

Теперь нетрудно несколько упростить дифференциальные уравнения (1) и привести их к виду

$$\begin{gathered} r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) + \tau_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 3\tau_{r\theta} = 0, \qquad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + 3\tau_{\varphi r} = 0 \end{gathered} \tag{5}$$

а также представить условие пластичности в форме:

$$\frac{1}{3}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{\varphi r}^2 + \tau_{r\theta}^2 = k^2 \tag{6}$$

Компоненты напряжения могут быть представлены через три величины — среднее нормальное напряжение σ и две новые величины ψ, χ — следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma + k\frac{2\cos\psi}{\sqrt{3}}, & \tau_{\varphi r} &= k\sin\psi\sin\chi \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= \sigma - k\frac{\cos\psi}{\sqrt{3}}, & \tau_{r\theta} &= k\sin\psi\cos\chi \end{aligned} \tag{7}$$

причем ψ, χ зависят только от θ и φ.

Внося приведенные выражения в первое дифференциальное уравнение равновесия (1), получим

$$\frac{r}{k}\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\psi\cos\chi) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\psi\sin\chi) + 2\sqrt{3}\cos\psi + \sin\psi\cos\chi\operatorname{ctg}\theta = 0$$

а подставляя те же выражения во второе и третье дифференциальные уравнения равновесия (1), будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sigma}{k} - \frac{\cos\psi}{\sqrt{3}}\right) + 3\sin\psi\cos\chi = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\sigma}{k} - \frac{\cos\psi}{\sqrt{3}}\right) + 3\sin\psi\sin\chi = 0$$

Так как величины ψ, χ зависят только от θ и φ, то величина σ может быть представлена в форме

$$\sigma = -k[P(\theta, \varphi) + 2c\ln r] \tag{8}$$

Таким образом, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\psi\cos\chi)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\psi\sin\chi)+2\sqrt{3}\cos\psi+\sin\psi\cos\chi\operatorname{ctg}\theta=2c \tag{9}$$

и два дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(P+\frac{\cos\psi}{\sqrt{3}}\right)&=3\sin\psi\cos\chi\\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(P+\frac{\cos\psi}{\sqrt{3}}\right)&=3\sin\psi\sin\chi\end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда легко установить, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\sin\psi\sin\chi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\psi\cos\chi) \tag{11}$$

Искомые величины ψ и χ могут быть получены из системы двух дифференциальных уравнений (9) и (11), которая после простых преобразований будет

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\psi\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}&=2\left(c-\sqrt{3}\cos\psi\right)\frac{\cos\chi}{\sin\psi}-\operatorname{ctg}\theta\\ -\frac{\partial\chi}{\partial\theta}+\frac{\operatorname{ctg}\psi}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}&=2\left(c-\sqrt{3}\cos\psi\right)\frac{\sin\chi}{\sin\psi}\end{aligned} \tag{12}$$

Заметим, что эта система уравнений принадлежит к эллиптическому типу и путем замены переменных

$$\Theta=\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\qquad \Psi=\ln\sin\psi$$

может быть преобразована к следующему виду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial\Theta}+\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}&=2\sin\theta\left(c-\sqrt{3}\cos\psi\right)\frac{\cos\chi}{\sin\psi}-\cos\theta\\ -\frac{\partial\chi}{\partial\Theta}+\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}&=2\sin\theta\left(c-\sqrt{3}\cos\psi\right)\frac{\sin\chi}{\sin\psi}\end{aligned}$$

Оставшаяся искомая величина P определяется при помощи одного из дифференциальных уравнений (10).

На конической поверхности, ограничивающей пластическую массу, которая может быть определена уравнениями $\theta=\theta(\alpha)$, $\varphi=\varphi(\alpha)$, имеет место *прилипание*, т. е. $u_r=0$. Параметр α обозначает угол между касательной плоскостью, проходящей через рассматриваемую образующую конуса и меридиональной плоскостью, проведенной через ту же образующую. Следовательно

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=0,\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\cos\alpha+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\sin\alpha=0$$

Отсюда ясно, что на конической поверхности имеют место равенства

$$\varepsilon_r=\varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi=0,\qquad \gamma_{r\theta}\cos\alpha+\gamma_{\varphi r}\sin\alpha=0$$

которые вследствие (2) и (7) дают

$$\cos\psi=0,\qquad \cos(\chi-\alpha)=0$$

Имея в виду, что касательная компонента τ_{rn} вдоль образующей

$$\tau_{rn}=-\tau_{r\theta}\sin\alpha+\tau_{\varphi r}\cos\alpha=k\sin\psi\sin(\chi-\alpha)>0$$

с точностью до числа, кратного 2π, легко получить граничные условия

$$\psi = \frac{1}{2}\pi, \qquad \chi = \alpha + \frac{1}{2}\pi \qquad \text{при } \theta = \theta(\alpha),\ \varphi = \varphi(\alpha)$$

Частый случай кругового конуса, рассмотренный в нашей статье [1], опубликованной ранее, следует из предыдущей теории, если считать, что все величины не зависят от координаты φ, а величина $\chi = 0$.

Компоненты напряжения могут быть в этом случае представлены через две величины — среднее нормальное напряжение σ и величину ψ — следующим образом:

$$\sigma_r = \sigma + k\frac{2\cos\psi}{\sqrt{3}}, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma - k\frac{\cos\psi}{\sqrt{3}}, \qquad \tau_{r\theta} = k\sin\psi$$

причем ψ является функцией только от θ.

Среднее нормальное напряжение σ выражается в виде

$$\sigma = -k\left[P(\theta) + 2c\ln r\right]$$

величина ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{2c}{\cos\psi} - \operatorname{ctg}\theta \operatorname{tg}\psi - 2\sqrt{3}$$

а величина P — дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\theta}\left(P + \frac{\cos\psi}{\sqrt{3}}\right) = 3\sin\psi$$

На круговой конической поверхности $\theta=\gamma$, ограничивающей пластическую массу, попрежнему имеет место *прилипание*, т. е. $u_r = 0$. Отсюда следуют граничные условия

$$\psi = \frac{1}{2}\pi \text{ при } \theta = \gamma.$$

Подробное исследование этого случая с несколько иными обозначениями можно найти в нашей статье [1], уже цитированной выше.

Поступила 16 II 1952

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Плоское и осесимметричное равновесие пластической массы между жесткими стенками. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 1.