Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. П. Еругин

(Ленинград)

Пенлеве в своих работах исследовал уравнение вида [1]

$$y'' = R(x, y, y') \tag{0.1}$$

где R — рациональная функция от y' и алгебраическая от x, y, следующим образом.

Сначала он находил необходимые условия, которым должно удовлетворять уравнение (0.1), чтобы отсутствовали особые подвижные критические (многозначные) точки.

Таким образом, он получил ряд уравнений, которые являются частным случаем уравнения (0.1). Например, таким уравнением является уравнение

$$y'' = 6y^2 + x \tag{0.2}$$

После этого Пенлеве, пользуясь частным видом уравнения (0.2), доказывает, что уравнение (0.2) не имеет критических подвижных особых точек.

Сначала он доказывает, что уравнение (0.2) не имеет подвижных существенно особых точек, но при этом доказательстве само собой получается, что нет и критических подвижных особых точек.

Мы будем рассматривать вопрос с другой точки зрения. Именно, мы рассмотрим вопрос о существовании систем вида

$$\frac{dx}{dz} = f_1(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dz} = f_2(x, y, z) \tag{0.3}$$

которые не имеют подвижных *существенно* особых точек.

Мы укажем достаточные условия, которым должны удовлетворять f_1 и f_2, при которых система (0.3) не имеет подвижных существенно особых точек. Для таких систем, следовательно, во всякой подвижной особой точке $z = z_0$ при $z \to z_0$ будет $y \to y_0$ (конечное или ∞), и $x \to x_0$ (конечное или ∞).

После этого дается *специальный* способ построения решения с начальными условиями $y \to \infty$, $x \to \infty$ при $z \to z_0$. При этом нужно именно употребить этот специальный способ построения такого решения, так как метод, основанный на теореме Коши, часто не позволяет это сделать (ибо для первоначальной системы $y \to \infty$ и $x \to \infty$, а после замены $u = y^{-1}$, $v = x^{-1}$ получаем решение $u \to 0$, $v \to 0$ при $z \to z_0$, но при этом оказывается, что правые части в точке $u = 0$, $v = 0$ и $z = z_0$ или разрывны, или принимают вид $0:0$). Этот новый метод позволяет наверное строить решение в виде асимптотических рядов, но эти ряды могут оказаться и сходящимися.

При таком исследовании легко выясняется, что уравнения Пенлеве типа (0.2) действительно имеют только подвижные полюсы.

Может оказаться, что уравнение вида (0.1) имеет многозначные подвижные особые точки, но не имеет существенных подвижных особых точек. Такие уравнения не поддаются изучению методом Пенлеве (так как метод Пенлеве основывается на разложении решения в области подвижного полюса). Излагаемый метод позволяет их изучить. Например, относительно уравнения $w'' = 6w^2 + z^2$ метод Пенлеве позволяет лишь сказать, что подвижные особые точки решений здесь имеются. Но изучить структуру решения в окрестности особой подвижной точки невозможно. Пользуясь же излагаемым методом, можно сказать, что решение этого уравнения не имеет подвижной существенно особой точки. Можно изучить также структуру решений в окрестности особой подвижной точки. Кроме того, система (0.3) может оказаться более общей, нежели уравнение (0.1), где R, как было отмечено, есть рациональная функция.

Заметим еще раз, что первая часть наших исследований доставляет класс уравнений вида (0.3), подвижные особые точки которых не будут существенно особыми. Вторая часть посвящена другому вопросу, именно построению решения системы, удовлетворяющего условию $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $z \to z_0$.

Попутно мы разрешаем вопрос о существовании или отсутствии других подвижных особых точек (с особыми начальными условиями) и применяем полученные здесь выводы к качественной теории дифференциальных уравнений.

§ 1. Исчезающие особые точки. Пусть дана аналитическая функция $\varphi(z)$, обладающая свойством: точка $z = a$ будет особой точкой $\varphi(z)$ на некоторых листах Римана, а на других листах $z = a$ будет регулярной точкой для $\varphi(z)$. При этом поверхность Римана может быть порождена конечным или бесконечным числом особых многозначных точек функции $\varphi(z)$. Точку $z = a$ мы будем называть *исчезающей особой точкой* функции $\varphi(z)$. Если точка a будет особой точкой функции $\varphi(z)$ на всех ее листах Римана, то a назовем *неисчезающей* особой точкой.

Например, для функции $\varphi(z) = (\ln z)^{-1}$ точка $z = 1$ — исчезающая особая точка.

Лемма 1. *Исчезающая* особая точка функции $\varphi(z)$ есть *однозначная* особая точка.

Действительно, пусть исчезающая особая точка $z = 0$ есть многозначная особая точка функции $\varphi(z)$. Тогда аналитическая функция $\psi(z) = \varphi(ze^{2\pi i}) - \varphi(z)$ отлична от нуля на некоторых листах Римана и равна нулю на других листах, что противоречит известному принципу аналитического продолжения.

Пусть дана система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dz} = Q(x, y, z) \tag{1.1}$$

Предположим, что P и Q — аналитические однозначные функции; при этом

$$P_1(x, \zeta, z) = \zeta^{m_1} P(x, \zeta^{-1}, z), \quad P_1(x, 0, z) = \text{const} \neq 0$$
$$Q_1(x, \zeta, z) = \zeta^{n_1} Q(x, \zeta^{-1} z) \tag{1.2}$$

$$P_2(\eta, y, z) = \eta^{m_2} P(\eta^{-1}, y, z), \quad Q_2(0, y, z) = \text{const} \neq 0$$
$$Q_2(\eta, y, z) = \eta^{n_2} Q(\eta^{-1}, y, z) \tag{1.3}$$

Введем новую переменную $y = \zeta^{-1}$; тогда из системы (1.1) получим

$$\frac{dx}{dz} = \frac{P_1(x, \zeta, z)}{\zeta^{m_1}}, \qquad \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{Q_1(x, \zeta, z)}{\zeta^{n_1-2}}$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\zeta^{m_1}}{P_1(x, \zeta, z)}, \qquad \frac{d\zeta}{dx} = -\frac{Q_1(x, \zeta, z)}{P_1(x, \zeta, z)}\zeta^{m_1-n_1+2} \tag{1.4}$$

Введем еще в рассмотрение следующие условия:

1) $m_1 > 0$, $m_1 - n_1 + 2 > 0$, $Q_1(x, 0, z)$ ограничена при конечных x и z
или

$$m_1 > 0, \qquad Q_1(x, \zeta, z)\, \zeta^{m_1-n_1+2}\Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \text{при конечных } x,\, z \tag{1.5}$$

2) $n_2 > 0$, $n_2 - m_2 + 2 > 0$ и $P_2(0, y, z)$ ограничено при конечных y и z
или

$$n_2 > 0, \qquad P_2(\eta, y, z)\, \eta^{n_2-m_2+2}\Big|_{\eta=0} = 0 \quad \text{при конечных } y,\, z \tag{1.6}$$

Замечание 1. Система (1.4) не имеет решения $\zeta \to 0$, $z \to z_0$ (конечное) при $x \to x_0$ (конечное), а имеет решение $\zeta \equiv 0$, $z \equiv z_0$. Если $m_1 = 0$, $m_1 - n_1 + 2 > 0$, то нет решения $\zeta \to 0$, $z \to z_0$ при $x \to x_0$, а есть $\zeta \equiv 0$, $z \to z_0$ при $x \to x_0$.

Замечание 2. Система (1.4) имеет в окрестности точки $(z_0, 0, x_0)$ общее решение

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta^* + \sum_{k\geqslant 1,\, n\geqslant 1} \zeta^{*k} (z^* - z_0)^l (x^* - x_0)^m (x - x^*)^n A_{klmn} = \zeta(\zeta^*, z^*, x^*, x) \\ z &= z^* + \sum_{k\geqslant 1,\, n\geqslant 1} \zeta^{*k} (z^* - z_0)^l (x^* - x_0)^m (x - x^*)^n B_{klmn} = z(\zeta^*, z^*, x^*, x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Это решение можно записать и так:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta^* + \sum_{k\geqslant 1,\, n\geqslant 0} \zeta^{*k} (z^* - z_0)^l (x^* - x_0)^m (x - x_0)^n \bar{A}_{klmn} = \zeta(\zeta^*, z^*, x^*, x) \\ z &= z^* + \sum_{k\geqslant 1,\, n\geqslant 0} \zeta^{*k} (z^* - z_0)^l (x^* - x_0)^m (x - x_0)^n \bar{B}_{klmn} = z(\zeta^*, z^*, x^*, x) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Это решение с начальными условиями $\zeta = \zeta^*$, $z = z^*$ при $x = x^*$.

Здесь A и B — постоянные, зависящие только от z_0 и x_0.

Ряды (1.7) сходятся относительно переменных ζ^*, z^*, x^*, x в области

$$(R) \qquad |\zeta^*| \leqslant r, \quad |z^* - z_0| \leqslant r, \quad |x^* - x_0| \leqslant r, \quad |x - x^*| \leqslant r \tag{1.9}$$

Таким образом, ряды (1.7) доставляют общее решение в области

$$(R_1) \qquad |\zeta| \leqslant r, \quad |z - z_0| \leqslant r, \quad |x - x_0| \leqslant r \tag{1.10}$$

где r достаточно малое. Через любую точку (ζ, z, x) этой области проходит одно решение, представляемое рядами (1.7) при соответствующих значениях ζ^*, z^*, x^*.

Если в (1.5) $m_1 = 0$, $m_1 - n_1 + 2 > 0$, то вместо (1.7) будет

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta^* + \sum_{k\geqslant 1,\, n\geqslant 1} \zeta^{*k} (z^* - z_0)^l (x^* - x_0)^m (x - x^*)^n A_{klmn} \\ z &= z^* + \sum_{k\geqslant 0,\, n\geqslant 1} \zeta^{*k} (z^* - z_0)^l (x^* - x_0)^m (x - x^*)^n B_{klmn} \end{aligned} \tag{1.11}$$

т. е. в ряде для z имеется свободный член относительно ζ^* под знаком суммы.

Лемма 2. Предположим, что система (1.1) при условиях (1.5) имеет решение $x(z)$, $y(z)$ такое, что на пути $z \to z_0$ имеется последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, для которой соответственно имеем последовательности $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное) и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$.

Тогда для всякого x^* существует последовательность $z_1^*, z_2^*, \ldots \to z_0$ (эта последовательность лежит на некотором пути $z \to z_0$), для которой соответственно имеем $x_1^*, x_2^*, \ldots \to x^*$ и $y_1^*, y_2^*, \ldots \to \infty$.

Доказательство. Заменяя $y=\zeta^{-1}$, получим для рассматриваемого решения последовательности $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$ при $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ и функции $z(x)$, $\zeta(x)$, соответствующие этому решению, удовлетворяют системе (1.4). Для всех достаточно больших v рассматриваемое решение вблизи точки (z_v, ζ_v, x_v) можно представить согласно (1.8) в виде рядов

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_v + \sum_{k\geqslant 1} \zeta_v^k (z_v - z_0)^l (x_v - x_0)^m (x - x_0)^n \bar{A}_{klmn} = \zeta(\zeta_v, z_v, x_v, x) \\ z &= z_v + \sum_{k\geqslant 1} \zeta_v^k (z_v - z_0)^l (x_v - x_0)^m (x - x_0)^n \bar{B}_{klmn} = z(\zeta_v, z_v, x_v, x) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Эти ряды сходятся в области $|x - x_0| \leqslant r$ при всех $v \geqslant N$.
Беря из этой области $x = x^*$, получим

$$\zeta_v^* = \zeta_v + \sum_{k\geqslant 1} \zeta_v^k (z_v - z_0)^l (x_v - x_0)^m (x^* - x_0)^n \bar{A}_{klmn}$$

$$z_v^* = z_v + \sum_{k\geqslant 1} \zeta_v^k (z_v - z_0)^l (x_v - x_0)^m (x^* - x_0)^n \bar{B}_{klmn}$$

При $z_v \to z_0$, $x_v \to x_0$ и $\zeta_v \to 0$, очевидно, имеем и $\zeta_v^* \to 0$, $z_v^* \to z_0$. Отсюда видим, что для рассматриваемого решения имеем последовательность $z_1^*, z_2^*, \ldots \to z_0$ такую, что соответственно $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \ldots \to 0$ и $x_1^*, x_2^*, \ldots, \ldots \to x^*$ (здесь $x_1^* = x_2^* = \cdots = x^*$, но можно, конечно, выбрать и разные $x_1^*, x_2^*, \ldots \to x^*$), где x^* — любая точка из некоторой окрестности $|x - x_0| \leqslant r$. Если принять во внимание, что предельные точки x^* составляют замкнутое множество, то лемма будет доказана, так как показано, что множество точек x^* открытое (т. е. точки x^* заполняют всю плоскость).

Примечание. Если $m_1 = 0$ и $m_1 - n_1 + 2 > 0$, то можно для всякого x^* указать последовательность $z_1^*, z_2^*, \ldots \to z^*$ такую, что соответственно $x_1^*, x_2^*, \ldots \to x^*$ и $y_1^*, y_2^*, \ldots \to \infty$. Это следует из рядов (1.11); z^* есть непрерывная функция от x^* и при $x^* \to x_0$ будет $z^* \to z_0$.

Именно, в (1.11) полагаем $z^* = z_v, x^* = x_v$, $\zeta^* = \zeta_v$. Тогда при $x = x^*$ и при $x_v \to x_0$, $\zeta_v \to 0$, $z_v \to z_0$ будет $\zeta \to 0$, $z \to z^*$. Здесь снова $x_k^* = x^*$, но можно, конечно, брать и $x_k^* \to x^*$; точка x^* — любая из достаточно малой окрестности x_0, а значит — и вообще любая, ибо множество таких предельных точек есть одновременно замкнутое и открытое множество.

Лемма 3. Предположим, что система (1.1) имеет решение $x(z)$, $y(z)$ такое, что на пути $z \to z_0$ имеется последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, для которой соответственно имеем последовательность $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное), $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ и условия (1.5) выполнены. Тогда функции $z(x)$, $y(x)$ этого решения могут иметь на плоскости x только однозначные особые точки.

Доказательство. Пусть x^* — особая точка функций $z(x)$, $\zeta(x)$, соответствующих рассматриваемому решению и удовлетворяющих уравнениям (1.4). По лемме 2 имеется такая последовательность $x_1, x_2, \ldots \to x^*$, что соответственно $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$. Но тогда ясно, что на всех тех листах Римана, на которых точки (x_k, z_k, ζ_k) будут в достаточно малой окрестности точки $(x^*, z_0, 0)$, точка x^* будет регулярной для рассматриваемого решения, так как при (x_k, z_k, ζ_k), близких к точке $(x^*, z_0, 0)$, точка x^* попадает в область сходимости рядов (1.7), представляющих это решение в некоторой области, окружающей точку $(x^*, z_0, 0)$. Следовательно, x^* — исчезающая особая точка и на основании леммы 1 однозначная. Лемма 3 справедлива как при условиях (1.5), так и при условиях $m_1 = 0$, $m_1 - n_1 + 2 > 0$, что следует из примечания к лемме 2.

Замечание 3. Для решения, рассматриваемого в лемме 3, произвольная точка x^* имеет окрестность без особых точек на всех тех листах Римана, на которых точки (x_k, z_k, ζ_k) находятся достаточно близко от точки $(x^*, z_0, 0)$. Это следует из того, что точка x^* на указанных листах Римана будет регулярной для решения $z(x)$, $y(x)$, рассматриваемого в лемме 3.

Теорема 1. Если в системе (1.1) выполнены условия (1.2) и (1.5), где можно предполагать и $m_1 = 0$, то для особой точки z_0 решения $x(z)$, $y(z)$ системы (1.1) нет такой последовательности $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, лежащей на кривой $z \to z_0$, что соответственно будет $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное) и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна; тогда система (1.4) имеет решение, обладающее свойством $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$ при $x_1, x_2, \ldots \to x_0$. По лемме 3 это решение $z(x), \zeta(x)$ системы (1.4) может иметь только однозначные особые точки на всей плоскости x. Так как еще согласно замечанию к лемме 3 на всех листах Римана, на которых расположены точки (x_k, z_k, ζ_k) при $k \geqslant N$, точка x_0 окружена областью без особых точек, то можно считать точки $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ расположенными на некотором пути $Lx \to x_0$ и снова этим точкам $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ будут соответствовать те же самые $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$.

Построим ряды $z = z_k(x - x_k)$, $\zeta = \zeta_k(x - x_k)$, представляющие рассматриваемое решение в окрестности точек x_k (т. е. $z_k(0) = z_k$, $\zeta_k(0) = \zeta_k$) и имеющие радиусы сходимости соответственно r_k.

Для всех точек (x_k, z_k, ζ_k), достаточно близких к точке $(x_0, z_0, 0)$, имеем, очевидно, $r_k \geqslant r > 0$. Следовательно, при некоторых $k \geqslant N$ точка x_0 и все x_v $(v \geqslant N)$ вместе с отрезком пути L, входящим в точку x_0, попадают в область сходимости рядов $z_k(x - x_k)$, $\zeta_k(x - x_k)$.

Согласно замечанию 1 нет решения системы (1.1), обладающего свойством $z \to z_0$, $\zeta \to 0$ при $x \to x_0$.

Следовательно, $\zeta(x_0) = \zeta_k(x_0 - x_k) = \zeta^* \neq 0$ при $k \geqslant N$.

Но тогда, с одной стороны, по предположению имеем $\zeta(x_v) = \zeta(x_v - x_k) \to 0$ при $x_v \to x_0$, а, с другой стороны, в силу непрерывности функций $\zeta(x) = \zeta_k(x - x_k)$ это невозможно, так как $\zeta(x_0) = \zeta^* \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что предположение $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное) и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ невозможно. Теорема 1 доказана.

Будем говорить, что система (1.1) удовлетворяет условию (A), если при всяком конечном[1] z

$$P(x, y, z) \quad \text{становится неопределенным} \tag{1.13}$$

или

$$Q(x, y, z) \quad \text{становится неопределенным} \tag{1.14}$$

[1] Исключая особые точки z функций $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$.

или

$$P(x, y, z) = \infty \tag{1.15}$$

или

$$Q(x, y, z) = \infty \tag{1.16}$$

только в изолированных конечных точках (x, y).

Предположим, что в точке (x_1, y_1, z_1) функции $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ регулярные. Тогда решение

$$x = x(z, x_1, y_1, z_1), \qquad y = y(z, x_1, y_1, z_1) \tag{1.17}$$

с начальными значениями $x(z_1) = x_1$, $y(z_1) = y_1$ будет голоморфным в окрестности точки $z = z_1$.

Пусть точка $z = z_0$ есть особая точка этого решения. Предположим, что существует последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, для которой будет

$$x_1, x_2, \ldots \to x_0 \ (\text{конечное}), \qquad y_1, y_2, \ldots \to y_0 \ (\text{конечное}) \tag{1.18}$$

и в точке (x_0, y_0, z_0) функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ будут голоморфными. Построим для окрестностей точек z_k $(k \geqslant N)$ ряды

$$x = x(z - z_k), \qquad y = y(z - z_k) \tag{1.19}$$

с радиусами сходимости $r_k \geqslant r > 0$, представляющими решение (1.17).

При z_k, достаточно близких к точке z_0, точка z_0 попадает в область сходимости рядов (1.19) и, следовательно, на всех листах Римана, на которых точки z_k лежат достаточно близко к точке z_0, точка z_0 не будет особенной и по лемме 1 будет поэтому *однозначной*.

Предположим, что последовательность $z_1, z_2, \ldots, \to z_0$ не лежит на кривой, окружающей особую многозначную точку[1].

Тогда при условиях (1.18) z_0 не является особой точкой. Если известно, что рассматриваемое решение (1.17) не имеет многозначных особых точек, то при условиях (1.18) точка z_0 не может быть особой.

Будем теперь предполагать, что особая точка решения (1.17) z_0 расположена на замкнутом контуре L, окружающем точку z_1 и не содержащем внутри себя особых точек решения (1.17).

Например, z_0 лежит на круге сходимости L рядов

$$x = x(z - z_1), \qquad y = y(z - z_1) \tag{1.20}$$

Пусть последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ лежит на кривой, расположенной внутри контура L и соединяющей точки z_1 и z_0. Тогда, очевидно, при условиях (1.18) z_0 не является особой точкой. Имеем теорему.

Теорема 2. Если имеем последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, расположенную внутри контура L, для которой соответственно $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное) и $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ (конечное) и в точке (z_0, y_0, x_0) функции $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ регулярные, то z_0 не является особой точкой решения (1.17) на том листе Римана, на котором расположена область, ограниченная контуром L (и на котором находится точка z_0) и содержащая точку z_1.

[1] Т. е. предполагается, что последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ расположена на одном листе Римана.

Пример. Рассмотрим уравнение $dy\,/\,dz = -z^{-1}y^2$, решением которого будет

$$y = \frac{1}{\lg(z\,/\,z_0) - 2\pi i}, \qquad y\Big|_{z=z_0} = -\frac{1}{2\pi i}, \qquad y\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{\lg(z_1\,/\,z_0) - 2\pi i}$$

где z_1 расположено на том же листе Римана, что и z_0.

Для этого решения точка z_0 не будем особенной на исходном листе Римана, на котором расположено и z_1. Но на первом верхнем листе Римана, т. е. после положительного обхода точки $z = 0$, точка z_0 уже будет особенной, именно полюсом.

Предположим теперь, что в точке (z_0, x_0, y_0) имеем одно из условий (1.13), (1.14), (1.15) или (1.16) и при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ имеем $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, $y_1, y_2, \ldots \to y_0$, но нет $x \to x_0$, $y \to y_0$ при $z \to z_0$.

Тогда, очевидно, на каждой достаточно малой окружности, окружающей точку x_0, имеется такая точка $x_0{}^*$, что при некоторой последовательности $z_1{}^*, z_2{}^*, \ldots \to z_0$ имеем $x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots \to x_0{}^*$, при этом будет либо $y_1{}^*, y_2{}^*, \ldots \to y_0{}^*$ (конечное), либо $y_1{}^*, y_2{}^*, \ldots \to \infty$.

Но это последнее согласно теореме 1 не имеет места, если выполнены условия (1.2) и (1.5) (где можно брать и $m_1 = 0$) и последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ лежит на пути $z \to z_0$, что мы и будем предполагать.

Если же $y_0{}^*$ конечное, то можно считать в точке $(z_0, x_0{}^*, y_0{}^*)$ условия (1.13) — (1.16) невыполненными, а тогда в этой точке функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ будут голоморфными. В этом случае точка z_0, следовательно, не будет особой для решения (1.17), если считаем z_0 лежащей на контуре L, о котором шла речь выше. Отсюда получаем теорему.

Теорема 3. Рассмотрим систему (1.1), для которой выполнены условия (1.2), (1.5) (где возможно $m_1 = 0$), (А), и ее решение (1.17). Предположим, что точка z_0 лежит на контуре L, ограничивающем область без особых точек решения (1.17) и содержащую точку z_1. Тогда, если существует последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, расположенная внутри контура L, для которой соответственно $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное), $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ (конечное), и в точке (z_0, x_0, y_0) имеем одно из условий (1.13), (1,14), (1.15) или (1.16), то имеем $x \to x_0$ и $y \to y_0$ при $z \to z_0$.

Теорема 4. Рассмотрим систему (1.1), для которой выполнены условия (1.2), (1.5) (где возможно $m_1 = 0$), (А), и ее решение (1.17). Возьмем точку z_0 на контуре L, ограничивающем область без особых точек решения (1.17) и содержащую точку z_1. Тогда точка z_0 на исходном листе Римана не будет существенно особенной подвижной точкой такого рода, что при $z \to z_0$ $x(z)$ остается неопределенным или $x(z) \to x_0$ (конечное).[1]

Доказательство. Если при $z \to z_0$ (z остается внутри области, ограниченной контуром L) $x(z)$ не имеет предела, то на пути $z \to z_0$ найдется последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ такая, что соответственно будет $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное). Тогда без ограничения общности можно считать, что имеем также или $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ (конечное), или $y_1, y_2, \ldots \to \infty$.

---

[1] Предположение в леммах 2 и 3, а также в теореме 1, что последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ лежит на кривой $z \to z_0$, можно опустить и в теореме 4 утверждать, что для существенно особой точки z_0 нет такой последовательности $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, которой соответствовала бы последовательность $x_1, x_2, \ldots$, не имеющая предела, или $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное), т. е. обязательно должно быть $x_1, x_2, \ldots \to \infty$.

Согласно теоремам 2 и 3 случай $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ (конечное) невозможен, если z_0 — существенно особая точка. Случай $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ невозможен по теореме 1. Следовательно, если выполнены условия (1.2), (1.5) и (А) и z_0 — существенно особая точка решения (1.17), то возможно только, что $y(z)$ остается неопределенным, а $x(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Так же докажется теорема.

Теорема 5. Рассмотрим систему (1.1), для которой выполнены условия (1.3), (1.6) и (А), и ее решение (1.17). Возьмем точку z_0 на контуре L, ограничивающем область без особых точек решения (1.17) и содержащую точку z_1. Тогда точка z_0 на исходном листе Римана не будет существенно особой подвижной точкой такого рода, что при $z \to z_0$ $y(z)$ остается неопределенным [или $y(z) \to y_0$ (конечное)].

Следствие. Если выполнены условия (1.3), (1.6) и (А) и z_0 существенно особая точка решения (1.17), то $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Сопоставляя теоремы 4 и 5, приходим к теореме.

Теорема 6. Если для системы (1.1) выполнены условия (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) и (А) и z_0 — особая точка решения (1.17) на контуре L, то при $z \to z_0$ имеем либо $x(z) \to \infty$, $y(z) \to \infty$, либо $x(z) \to x_0$, $y(z) \to y_0$, где (x_0, y_0) такие, что в точке (x_0, y_0, z_0) имеем (1.13), или (1.14), или (1.15), или (1.16).

Теорема 7. Если для системы (1.1) выполнены условия (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) и (А), то решение (1.17) на контуре L не имеет существенно особых подвижных точек.

Теорема 8. Если для системы (1.1) выполнены условия (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) и на конечном расстоянии нет точек (x, y, z), для которых имеем (1.13), (1.14), (1.15) или (1.16), то $x(z) \to \infty$, $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$, если z_0 — особая точка решения (1.17) на контуре L.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z$$

Полагая $w = x$, $dw / dz = y$, получим систему

$$\frac{dx}{dz} = y, \qquad \frac{dy}{dz} = 6x^2 + z$$

Здесь $P(x, y, z) = y$, $Q(x, y, z) = 6x^2 + z$. В соответствии с (1.2) и (1.3) имеем

$$P_1 = 1, \quad m_1 = 1, \quad Q_1 = 6x^2 + z, \quad n_1 = 0$$

$$P_2 = y, \quad m_2 = 0, \quad Q_2 = 6 + z\eta^2, \quad n_2 = 2$$

Здесь условия (1.5) и (1.6) выполнены, поэтому существенно особой подвижной точки нет. Если z_0 — особая точка решения, то $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $z \to z_0$.

Рассмотрим теперь и тот случай, когда $P_1(x, 0, z) = p(x)$. Будем предполагать, что $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ суть полиномы. Тогда, предполагая выполненными условия (1.5) $m_1 > 0$, $m_1 - n_1 + 2 > 0$, будем иметь результаты, аналогичные предыдущим.

Замечание 1.* Система (1.4) не имеет решения $\zeta \to 0$, $z \to z_0$ (конечное) при $x \to x_0$ (конечное), если $p(x_0) \neq 0$, а имеет решение $\zeta \equiv 0$, $z = z_0$. Если $m_1 = 0$,

$m_1 - n_1 + 2 > 0$, то нет решения $\zeta \to 0$, $z \to z_0$ при $x \to x_0$, а есть решение $\zeta \equiv 0$, $z \to z_0$ при $x \to x_0$.

*Замечание 2**. Система (1.4) имеет в окрестности точки $(x_0, 0, z_0)$ общее решение в виде (1.7) и (1.8), если $p(x_0) \neq 0$.

*Лемма 2**. Предположим, что система (1.1) имеет решение $x(z)$, $y(z)$ такое, что на пути $z \to z_0$ имеется последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, для которой соответственно имеем последовательности $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ $(p(x_0) \neq 0)$ и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ (решения $z \to z_0$, $y \to \infty$ при $x \to x_0$ нет по замечанию 1*).

Тогда для всякого x^* существует последовательность $z_1^*, z_2^*, \ldots \to z_0$ (эта последовательность лежит на некотором пути $z \to z_0$), для которой соответственно имеем $x_1^*, x_2^*, \ldots \to x^*$, $y_1^*, y_2^*, \ldots \to \infty$.

Это справедливо и для x^*, удовлетворяющего уравнению $p(x^*) = 0$.

Примечание к лемме 2 также имеет место: если $m_1 = 0$, $m_1 - n_1 + 2 > 0$, то можно для всякого x^* указать последовательность $z_1^*, z_2^*, \ldots \to z^*$ такую, что соответственно будет $x_1^*, x_2^*, \ldots \to x^*$ и $y_1^*, y_2^*, \ldots \to \infty$.

Обозначим через a корни уравнения $p(x) = 0$.

*Лемма 3**. Предположим, что для решения, обладающего свойством

$$(a) \qquad z_1, z_2, \ldots \to z_0, \quad y_1, y_1, \ldots \to \infty \quad \text{при} \quad x_1, x_2, \ldots \to a$$

точка $x = a$ $(p(a) = 0)$ не есть особая многозначная точка.

Предположим, что существует решение $x(z)$, $y(z)$ системы (1.1) [для которой выполнены условия (1.5)] такое, что на пути $z \to z_0$ есть последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, для которой имеем последовательности

$$(x_0) \qquad x_1, x_2, \ldots \to x_0 \quad (x_0 \text{ конечное и } p(x_0) \neq 0), \qquad y_1, y_2, \ldots \to \infty$$

Тогда этому решению соответствуют функции $z(x)$, $y(x)$, имеющие на плоскости x только однозначные особые точки.

Доказательство. По лемме 2*, если имеется решение системы (1.1), обладающее свойством (x_0), то это решение обладает и свойством (a). Такими же рассуждениями, как при доказательстве леммы 3*, покажем, что всякая точка x^*, для которой $p(x^*) \neq 0$, не есть многозначная особая точка для рассматриваемого решения $z(x)$, $y(x)$.

Если решение, обладающее свойством (a), однозначное в окрестности $x = a$, то рассматриваемое в лемме 3 решение системы (1.1) будет, следовательно, однозначным на всей плоскости x. Очевидно также, что если система (1.1) не имеет решения, обладающего свойством (a), то она не имеет и такого решения, которое обладало бы свойством (x_0). Если точка a для рассматриваемого в лемме 3* решения многозначная, то теорема 1 уже не имеет места, так как она основана на однозначности функций $z(x)$, $y(x)$. Следовательно, в случае многозначности точки a может существовать решение $x(z)$, $y(z)$, обладающее свойством $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное) и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, и точка z_0 может быть подвижной существенно особой точкой решения системы (1.1), так как теорема 8 основана на теореме 1 (через теорему 4). Можно соответственно повторить замечания 1*, 2*, лемму 2* и лемму 3* для решения системы (1.1), обладающего свойством $x_1, x_2, \ldots \to \infty$, $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, если $Q_2(0, y, z) = q(y)$. И если как в окрестности точки a, $(p(a) = 0)$, так и в окрестности точки b, $(q(b) = 0)$ соответственно решения, обладающие свойством $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ при $x_1, x_2, \ldots \to a$ или $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, $x_1, x_2, \ldots \to \infty$ при $y_1, y_2, \ldots \to b$, однозначны, то имеет место теорема 8.

Лемма 4. Пусть дана аналитическая функция $x = x(z)$, обладающая следующими свойствами.

(1) Последовательность $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, где последовательность $z_1, z_2, \ldots$ расположена на кривой L $z \to z_0$.

(2). Обратная функция $z = z(x)$ — голоморфная в окрестности точек x_k при $k \geqslant N$.

(3). Радиусы сходимости r_k разложений

$$z - z_k = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m(x_k)(x - x_k)^m$$

ограничены снизу, т. е. $r_k > r$.

(4). Коэффициенты $\alpha_1(x_k), \ldots, \alpha_{l-1}(x_k)$ стремятся к нулю при $x_k \to x_0$.

(5). Производная

$$\frac{d^l z}{dx^l} \to al! \neq 0 \qquad \text{при} \quad x_k - x_0 \to 0 \quad \text{и} \quad x - x_k \to 0$$

Тогда мы имеем $x(z) \to x_0$ при $z \to z_0$ по кривой L.

Доказательство. Лемма не верна в том случае, если при $z \to z_0$ функция $x(z)$ описывает в плоскости x кривую, обходящую бесконечное число раз какую-нибудь фиксированную точку x_1, которая будет точкой ветвления функции $z = z(x)$, т. е. переменная $x(z)$ при $z \to z_0$ удаляется на фиксированное расстояние $\Delta > 0$ от точки x_0 при соответствующих значениях $z = z^*$, как угодно близких от z_0. Пусть $x = x^*$ соответствуют значениям $z = z^*$, так что $|x^* - x_0| = \Delta$ и $|x^* - x_k| \to \Delta$ при $x_k \to x_0$.

Рассмотрим ряд

$$z^* - z_k = \sum_{m=1}^{l-1} \alpha_m(x_k)(x^* - x_k)^m + (x^* - x_k)^l \Big[\alpha_l(x_k) + \sum_{m=l+1}^{\infty} \alpha_m(x_k)(x^* - x_k)^m\Big]$$

Будем предполагать, что значение z^* есть значение z, следующее за значением z_k на кривой $z \to z_0$. Тогда ясно, что $|z^* - z_k| \to 0$ при $z_k \to z_0$.

При z_k, достаточно близких к z_0, на основании условий (4) и (5) леммы

$$\Big|\sum_{m=1}^{l-1} \alpha_m(x_k)(x^* - x_k)^m\Big| < |x^* - x_k|^l \frac{1}{2} a$$

$$\Big|\alpha_l(x_k) + \sum_{m=l+1}^{\infty} \alpha_m(x_k)(x^* - x_k)^m\Big| > a$$

когда $|x^* - x_k| \leqslant \Delta$ и $k \geqslant N$. Следовательно, при всех z_k, достаточно близких к z_0, имеем

$$|z^* - z_k| > |x^* - x_k|^l \frac{1}{2} a$$

Мы получили противоречие, так как $|z^* - z_k| \to 0$ при $z_k \to z_0$, а $|x^* - x_k| \to \Delta$ при $x_k \to x_0$. Следовательно, предположение о том, что

$$\varlimsup_{z \to z_0} |x(z) - x_0| \neq 0$$

будет неверным. Лемма доказана.

Пусть теперь система (1.1) такова, что $m_1 \geqslant 0$ и $m_1 - n_1 + 2 = 0$, а $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ суть полиномы относительно x, y и целые функции относительно z. Пусть z_0 — особая точка решения $x(z)$, $y(z)$. Если $x(z)$ не имеет предела при $z \to z_0$, то имеем последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ такую, что $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ и либо $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ (конечное), либо $y_1, y_2, \ldots \to \infty$.

Если имеет место случай $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ (конечное), то точка z_0 — однозначная особая точка. Если же z_0 лежит на контуре L, окружающем начальную точку z_1 и не содержащем внутри себя особых точек, то z_0 — регулярная точка на исходном листе Римана.

Пусть имеет место случай $y_1, y_2, \ldots \to \infty$. Тогда рассмотрим систему (1.4), где будем предполагать, как и прежде, что $P_1(x, 0, z) = \text{const} \neq 0$ и $Q_1(x, 0, z)$ — ограниченная при всех конечных x, z.

Тогда, если $z_1, z_2, \ldots \to z_0$ и $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \to 0$ при $x_1, x_2, \ldots \to x_0$, то на некотором листе Римана это решение обладает свойством $z \to z_0$ и $\zeta \to 0$ при $x \to x_0$ и это решение, следовательно, на этом листе Римана голоморфное в окрестности точки $x = x_0$.

К такому выводу приходим следующим образом. Так как предположено $m_1 - n_1 + 2 = 0$, то для рассматриваемого решения системы (1.4) $z(x), \zeta(x)$ функция $z(x)$ удовлетворяет условиям (1), (2), (3) и (4) леммы 4, где нужно положить $l = m_1$. Кроме того, на основании непрерывной зависимости решения $z(x)$, $\zeta(x)$ от начальных значений x_k, z_k, ζ_k имеем также $|z(x) - z_k| < \delta$ и $|\zeta(x) - \zeta_k| < \delta$ при $|x - x_k| < \Delta$ и при x_k, z_k, ζ_k, достаточно близких к точке $(x_0, z_0, 0)$; здесь по всякому δ найдется соответствующее значение Δ — одно для всех (x_k, z_k, ζ_k), находящихся в некоторой окрестности точки $(x_0, z_0, 0)$. Следовательно, $|z(x) - z_k| \to 0$, $|\zeta(x) - \zeta_k| \to 0$ при $|x - x_k| \to 0$, $|x_k - x_0| \to 0$, $|z_k - z_0| \to 0$ и $\zeta_k \to 0$.

Отсюда следует, что для рассматриваемого решения функция $z(x)$ удовлетворяет и условию (5) леммы 4. Но тогда $z(x) \to z_0$ при $x \to x_0$.

По теореме существования и единственности мы заключаем теперь, что рассматриваемое решение системы (1,4) обладает свойством $z(x) \to z_0$ и $\zeta(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и это решение голоморфное в окрестности точки $x = x_0$. Отсюда следует, что рассматриваемое решение системы (1.1) при условиях $m_1 \geqslant 0$, $m_1 - n_1 + 2 = 0$ обладает свойством $x(z) \to x_0$ и $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$ и точка $z = z_0$ будет для функции $x(z)$ регулярной или алгебраической точкой, а для $y(z)$ или полюсом, или алгебраическим полюсом (подвижным). Мы будем иметь, таким образом, семейство решений с подвижной особой точкой z_0, содержащее, кроме z_0, еще одну произвольную постоянную x_0. Эти решения легко строятся при помощи системы (1.4).

Из этих рассуждений следует, что если в системе (1.1) $m_1 \geqslant 0$ и $m_1 - n_1 + 2 = 0$, то система (1.1) не имеет подвижной существенно особой точки z_0 такой, что функция $x(z)$ остается ограниченной или неопределенной при $z \to z_0$. Другими словами, если точка z_0 существенно особая, то обязательно $x(z) \to \infty$ при $z \to z_0$, а $y(z)$ неопределенная.

Если в системе (1.1) $n_2 \geqslant 0$, $n_2 - m_2 + 2 = 0$, $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ суть полиномы относительно x, y и целые функции относительно z, а также выполнено условие, что $Q_2(0, y, z) = \text{const} \neq 0$, то мы имеем и другое семейство решений с подвижной особой точкой z_0, определенной свойством $x(z) \to \infty$ и $y(z) \to y_0$ при $z \to z_0$. В этом случае нет решений с подвижной существенно особой точкой z_0 такого рода, что функция $y(z)$ остается ограниченной или неопределенной при $z \to z_0$, т. е. если z_0 существенно особая точка, то $y(z) \to \infty$, а $x(z)$ остается неопределенной при $z \to z_0$. Это позволяет высказать следующую теорему.

Теорема 9. Предположим в системе (1.1) $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ такие полиномы относительно x и y, коэффициенты которых суть целые функции относительно z и при этом

$$m_1 \geqslant 0, \qquad m_1 - n_1 + 2 = 0, \qquad P_1(x, 0, z) = \text{const} \neq 0$$

$$n_2 \geqslant 0, \qquad n_2 - m_2 + 2 = 0, \qquad Q_2(0, y, z) = \text{const} \neq 0$$

Тогда решение такой системы $x(z)$, $y(z)$ не имеет существенно особой подвижной точки.

Эта система имеет два семейства решений с подвижной особой точкой z_0. Первое семейство определено свойством $x(z) \to x_0$, $y(z) \to \infty$ при $z \to z_0$ и второе семейство свойством $x(z) \to \infty$, $y(z) \to y_0$ при $z \to z_0$, где x_0, y_0 и z_0 — произвольные конечные числа. Действительно, пусть z_0 — особая точка решения $x(z)$, $y(z)$. Тогда либо

$$\text{(a)} \quad x \to \infty \quad \text{при } z \to z_0$$

либо имеется последовательность $z_1, z_2, \ldots \to z_0$, которой соответствует

$$\text{(b)} \quad x_1, x_2, \ldots \to x_0 \ \text{(конечное)} \quad \text{при } z_1, z_2, \ldots \to z_0$$

Пусть имеет место последний случай. Предположим, что этой же последовательности $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ (конечное) соответствует последовательность $y_1, y_2, \ldots \to y_0$ (конечное). Тогда z_0 — регулярная точка.

Следовательно, наряду с $x_1, x_2, \ldots \to x_0$ должно быть также и $y_1, y_2, \ldots \to \infty$ при $z_1, z_2, \ldots \to z_0$.

Но в этом случае, как мы видели, z_0 также не будет существенно особой точкой и мы имеем решение, обладающее свойством $y(z) \to \infty$ и $x(z) \to x_0$ при $z \to z_0$. Это решение легко строится. Если имеем $x(z) \to \infty$ при $z \to z_0$, то либо имеем решение, обладающее свойством

$$\text{(c)} \qquad x(z) \to \infty, \quad y(z) \to y_0 \quad \text{при } z \to z_0$$

либо решение, обладающее свойством

$$\text{(d)} \qquad x(z) \to \infty, \quad y(z) \to \infty \quad \text{при } z \to z_0$$

Решение, обладающее свойством (c), наверное, как мы видели, имеется и его легко построить. Вопрос о существовании решения, обладающего свойством (d), требует особого исследования.

Пример. Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \qquad \frac{dy}{dt} = -x - y - y^3 \tag{1.21}$$

Для этой системы, как легко видеть, имеем

$$m_1 = 1, \qquad m_1 - n_1 + 2 = 0, \qquad P_1(x, 0, z) = 1$$

$$n_2 = 1, \qquad n_2 - m_2 + 2 = 0, \qquad Q_2(0, y, z) = 1$$

Следовательно, решение системы (1.21) не имеет существенно особой подвижной точки. Но для этой системы мы имеем и решение, обладающее свойством $x \to x_0$, $y \to \infty$ при $t \to t_0$, и решение, обладающее свойством $x \to \infty$, $y \to y_0$ при $t \to t_0$, где x_0, y_0 и t_0 — произвольные конечные значения. Эти решения могут быть как вещественные (при вещественных x_0, t_0 или y_0, t_0), так и комплексные.

Выясним теперь, существует или нет решение системы (1.21), обладающее свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to t_0$. С этой целью введем новые переменные $u = y/x$, $v = x^{-1}$. Тогда система (1.21) перейдет в систему

$$\frac{du}{dt} = -\frac{(1+u^2)(u+v^2)}{v^2}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{v^2 - uv^2 - 1}{v} \tag{1.22}$$

Нас интересует решение, обладающее свойством $v \to 0$ при $t \to t_0$. При этом переменная u может удовлетворять одному из условий:

(а) $u \to 0$ при $t \to t_0$, (в) u не имеет предела при $t \to t_0$

(б) $u \to u_0$ (конечное) при $t \to t_0$, (г) $u \to \infty$ при $t \to t_0$

Систему (1.22) можно записать в виде

$$\frac{dt}{du} = -\frac{v^2}{(1+u^2)(u+v^2)}, \qquad \frac{dv}{du} = \frac{1 + uv^2 - v^2}{(1+u^2)(u+v^2)} v \tag{1.23}$$

Мы видим, что здесь не существует вещественное решение, обладающее свойством $v \to 0$ и $t \to t_0$ при $u \to u_0$ (конечное). Следовательно, случай (б) невозможен.

Покажем что в вещественной области невозможен и случай (а), т. е. невозможно вещественное решение (когда начальные значения t_0, x_0 и y_0 вещественные), обладающее свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to t_0$ (конечное или нет), так что $y/x = u \to 0$. Запишем второе из уравнений (1.23) в виде

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} \frac{1 + uv^2 - v^2}{(1+u^2)(1 + v^2/u)} \tag{1.24}$$

Так как по условию $u \to 0$, $v \to 0$, $\dfrac{v}{u} = \dfrac{1}{y} \to 0$, то можно написать

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u}(1 + \alpha(u))$$

где $\alpha(u)$ при $u \to 0$ для рассматриваемого решения бесконечно малая порядка не меньшего, чем бесконечно малые uv^2, v^2, u^2, $v^2/u = v/y$. Так как

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + \ldots, \qquad \frac{1}{1 + v^2/u} = 1 - \frac{v^2}{u} + \ldots$$

где не выписаны бесконечно малые более высокого порядка. Следовательно,

$$\frac{dv}{v} = \frac{du}{u} + p(u)\,du, \qquad \text{где } p(u) \to 0 \text{ при } u \to 0$$

Отсюда для предполагаемого решения должно было бы быть

$$\lg \frac{v}{u} = \lg \frac{1}{y} = \int_{u_1}^{u} p(u)\,du + C \quad (C = \mathrm{const})$$

Так как должно быть $y \to \infty$ и $u \to 0$, то мы видим, что слева переменная не ограничена, а справа ограничена для предполагаемого решения. Полученное противоречие доказывает, что случай (а) в вещественной области невозможен.

Для вещественного решения невозможен и случай (г). Действительно, заменяя $u = \zeta^{-1}$, из (1.24) получим

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\zeta + v^2 - v^2\zeta}{(1+\zeta^2)(1+v^2\zeta)}\, d\zeta + C \tag{1.25}$$

Для рассматриваемого решения должно быть $v \to 0$, $\zeta \to 0$ и $v^2\zeta = 1/xy \to 0$. Но тогда в равенстве (1.25) слева стоит величина неограниченная и справа ограниченная, что невозможно. Этим доказано, что случай (г) исключается. Заметим теперь, что так как $x \to \infty$ и $y \to \infty$, то u и v в конечном счете принимают определенный знак. Принимая во внимание еще, что $v^2/u = 1/xy \to 0$, видим, что функция $u = u(v)$, определенная уравнением (1.24), может изменить возрастание на убывание или наоборот только в точках кривой $1 + uv^2 - v^2 = 0$. В плоскости (u, v) имеем восемь зон, ограниченных осями u, v и кривой $1 + uv^2 - v^2 = 0$, в которых du/dv сохраняет знак. Принимая во внимание все только что отмеченные обстоятельства, легко увидим, что функция $u = u(v)$ рассматриваемого решения не может быть неопределенной при $v \to 0$. Следовательно, случай (в) также не имеет места.

Случаи (б), (в) и (г) невозможны и при $t_0 = \infty$, т. е. невозможно решение системы (1.21), обладающее свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $t \to \infty$, так что $u = y/x$ не имеет предела или $u \to u_0$ конечное при $t \to \infty$. К такому выводу мы приходим немедленно после замены в уравнениях (1.23) $t = \tau^{-1}$ и рассматривая решение, обладающее свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $\tau \to 0$, так как только что проведенные рассуждения нигде не меняются.

Заметим еще, что *система* (1.21) *не имеет и такого решения, что* $x \to x_0$ (конечное) и $y \to \infty$ при $t \to \infty$. Это мы получим непосредственно из системы (1.4) после замены независимой переменной $t = \tau^{-1}$. *К такому же выводу мы придем и всякий раз, когда вообще в системе* (1.1) $m_1 \geqslant 0$, $m_1 - n_1 + 2 \geqslant 0$, *а функции*

$$\frac{\tau^2}{P_1(x, \zeta, \tau^{-1})}, \qquad \frac{Q_1(x, \zeta, \tau^{-1})}{P_1(x, \zeta, \tau^{-1})}$$

ограничены при $\tau \to 0$ *и при* $\zeta \to 0$ *для конечных значений* x *и либо первая стремится к нулю в силу* $\tau \to 0$, *либо вторая стремится к нулю в силу* $\zeta \to 0$.

Мы также видим, что система (1.21) не имеет решения, обладающего свойством $x \to \infty$ и $y \to y_0$ (конечное) при $t \to \infty$.

Все эти рассуждения приводят нас к следующим выводам относительно вещественных решений системы (1.2).

Существуют движения, определяемые системой (1.2), которые обладают свойством $x \to x_0$ (конечное) и $y \to \infty$ при $t \to t_0$ (конечное) или $x \to \infty$ и $y \to y_0$ (конечное) при $t \to t_0$ (конечное)

Не существует движений, обладающих этими свойствами при $t_0 \to \infty$.

Не существуют движения, обладающие свойством $x \to \infty$ и $y \to \infty$.

Не существуют движения, для которых или $x(t)$, или $y(t)$ оставалось бы неопределенным при $t \to t_0$ (конечное).

Не существует движение, точка которого $M(t) \to \infty$ по спирали. Движение $M(t)$ ограничено при $t \to \infty$, если полярный угол не ограничен.

Всякое движение, определяемое системой (1.21), обладает одним из свойств [2]: либо оно ограничено (и тогда оно существует при всех t), либо оно непродолжимо при $t > t_0$ (и тогда оно асимптотически приближается к прямой $x = x_0$ при $y \to \infty$ или к прямой $y = y_0$ при $x \to \infty$, когда $t \to t_0$). Это показывает, что условия в теореме 1 работы [3] являются лишь достаточными, так как мы получили для системы (1.21) такой же результат, как и в этой теореме 1, хотя условия теоремы 1, как легко видеть, для системы (1.21) не выполнены. Для системы [4]

$$\frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \qquad \frac{dy}{dt} = -x - y + y^3$$

условия теоремы 1 работы [3], как легко видеть, выполнены и, следовательно, для каждого движения $M(t)$, определенного этой системой, либо движение $M(t)$ непродолжимо вне промежутка $|t - t_0| \leqslant M$, либо оно ограничено при $-\infty < t < \infty$.

Мы показали ранее, что эта система определяет асимптотически устойчивое невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$. Область асимптотической устойчивости ограничена неустойчивым предельным циклом.

Теперь, опираясь на только что приведенные методы, мы можем сказать, что вне предельного цикла точка $M(t)$ всякого движения удаляется в бесконечность при $t \to t_0$, приближаясь асимптотически или к прямой $y = y_0$, или к прямой $x = x_0$.

Мы видим, таким образом, что выводы, полученные в аналитической теории, могут быть использованы и в качественной теории дифференциальных уравнений. Это показано на примерах, когда в (1.1) $n_1 - m_1 + 2 = 0$ или $m_2 - n_2 + 2 = 0$. Но это можно показать и в общем случае.

Запишем систему (1.1) в виде $dx/dt = P(x, y, t)$, $dy/dt = Q(x, y, t)$ и будем предполагать, что P и Q суть полиномы с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие условиям (2) и (5) (где, возможно, и $m_1 = 0$). Предположим, что мы построили решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ с вещественными начальными значениями.

По теореме, приведенной в работе [2], если это решение непродолжимо для $t > t_0$, то точка этого движения $M(t) \to \infty$ при $t \to t_0$.

По теореме 4 мы видим, что $M(t) \to \infty$ только так, что точка $M(t)$ остается в области $x > 0$ или $x < 0$, так как обязательно $x(t) \to \infty$, т. е. точка $M(t)$ остается с одной стороны от оси y и, следовательно, в бесконечно удаленных частях плоскости нет такого предельного цикла, что $M(t) \to \infty$ по спирали при $t \to t_0$ (конечное).

Но возможно еще, что точка $M(t) \to \infty$ по спирали при $t \to \infty$. Предположим, что для рассматриваемой системы выполняются еще условия

$$(r) \qquad \begin{aligned} &rL(r) \leqslant |xP(x, y, t) + yQ(x, y, t)| && \text{при } r > r_0 \\ &L(r) > 0, \quad \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{L(r)} \text{ — ограничено} && \text{при } r \to \infty. \end{aligned}$$

Тогда согласно теореме в работе [3] решение такой системы или непродолжимо вне конечного промежутка $|t - t_0| \leqslant M$, или решение ограничено при $-\infty < t < \infty$. Отсюда следует, что для такой системы невозможно $M(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, т. е. для такой системы невозможно, в частности, чтобы $M(t) \to \infty$ по спирали при $t \to \infty$. Таким образом, если для рассматриваемой системы выполнены условия (2), (5) и (r), то точка $M(t)$ в движении, определяемом этой системой, не может уходить в бесконечность по спирали ни при $t \to t_0$, ни при $t \to \infty$, т. е. в бесконечно удаленных точках предельного цикла нет. Если, кроме того, выполнены и условия (3), (6), то точка $M(t)$ движения может уходить в бесконечность согласно теореме 8 только так, что $x(t) \to \infty$ и $y(t) \to \infty$ при $t \to t_0$ (конечное), т. е. точка $M(t) \to \infty$, оставаясь в одной четверти. Далее увидим, что эти движения мы и фактически сможем построить.

§ 2. Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\frac{dy}{dz} = 6x^2 + z, \qquad \frac{dx}{dz} = y \tag{2.1}$$

Выше показано, что если z_0 особая точка решения системы (2.1), то обязательно

$$x \to \infty, \quad y \to \infty \quad \text{при } z \to z_0 \tag{2.2}$$

Дадим способ построения решения, определенного условиями (2.2), и покажем, что точка z_0 для этого решения может быть только полюсом. Из (2.1) имеем

$$y\,dy = 6x^2\,dx + z\,dx \tag{2.3}$$

или в силу второго уравнения системы (2.1)

$$y\,dy = 6x^2\,dx + zy\,dz \tag{2.4}$$

Отсюда

$$y^2 = 4x^3 + \int_{z_1}^{z} 2zy\,dz + c, \quad \text{или} \quad 4x^3 = y^2 - \int_{z_1}^{z} 2zy\,dz - c \tag{2.5}$$

Выведем вспомогательные формулы для решения системы, обладающего свойством (2.2). Сделаем замечание для дальнейшего. Рассматривая y на пути (z_1, z) как функцию дуги l, отсчитываемой от точки z_1, можно записать $y = y_1(l) + iy_2(l)$, где $y_1(l)$ и $y_2(l)$ — соответственно вещественная и мнимая части y. Отсюда

$$|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \quad \text{и} \quad \left|\frac{dy}{dl}\right| = \sqrt{y_1'^2(l) + y_2'^2(l)} \tag{2.6}$$

Далее

$$\frac{d|y|}{dl} = \frac{y_1y_1' + y_2y_2'}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \frac{y_1y_1' + y_2y_2'}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\;\frac{\sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}}{\sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}}$$

Отсюда видим, что можно написать

$$\frac{d|y|}{dl} = \cos(y, y')\left|\frac{dy}{dl}\right|$$

где (y, y') — угол между радиусом-вектором, соответствующим комплексному числу y, и касательной к кривой, соответствующей пути (z_1, z) в точке y.

В силу конформности отображения функции $y = y(z)$ можно так выбрать путь l от z_1 до z_0, что на всем этом пути будет $0 < \delta_1 < |\cos(y, y')|$.

Если путь z_1, z_0 лежит на вещественной оси, то это выполнено, так как тогда очевидно, что $|\cos(y, y')| = 1$. Это позволяет на основании (2.1) написать

$$\frac{d|y|}{dl} = \delta(l)\left|\frac{dy}{dl}\right| = \delta(l)\,|6x^2 + z| \tag{2.7}$$

где $0 < \delta \leqslant \delta(l) \leqslant M$ и δ, M — постоянные числа. Можно также написать

$$\frac{d|x|}{dl} = \delta(l)\,|y| \tag{2.8}$$

Рассмотрим теперь интеграл, стоящий в правой части (2.5). Обозначим

$$\alpha(z) = y^{-2}\int_{z_1}^{z} zy\,dz \tag{2.9}$$

Покажем, что при $z \to z_0$ величина $\alpha(z)$ есть малая порядка zx^{-2}. Действительно

$$|\alpha(z)| \leqslant |y|^{-2}\int_0^l |z|\,|y|\,dl$$

$$\lim_{z\to z_0} |y|^{-2}\int_0^l |z|\,|y|\,dl = \lim \frac{|y|\,|z|}{2\,|y|\,d\,|y|\,/\,dl} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{|z|}{2\delta(l)\,|6x^2 + z|} = \lim_{x\to\infty} \frac{|z|}{2\,|x|^2\,\delta(l)\,|6 + zx^{-2}|} = 0$$

Отсюда и следует, что

$$\alpha(z) = O(zx^{-2}) \tag{2.10}$$

Рассмотрим теперь величину

$$\beta_n(x) = \int_{\infty}^{x} O(x^{-n})\,dx \qquad (n > 1)$$

В силу второго уравнения системы (2.1)

$$\beta_n(x) = \int_{z_0}^{z} O(x^{-n})\,y\,dz$$

Пользуясь формулой (2.8), получим

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{|x|^{1-n}}\int_0^l |O(x^{-n})|\,|y|\,dl\right\} = \lim \frac{|O(x^{-n})|\,|y|}{(1-n)\,|x|^{-n}\,|y|\,\delta(l)} = O(1)$$

где $O(1)$ — величина ограниченная. Следовательно, можно написать

$$\beta_n(x) = O(x^{1-n}) \qquad (n > 1) \tag{2.11}$$

т. е. при $x \to \infty$ (или $z \to z_0$) величина $\beta_n(x)$ будет малой порядка x^{1-n}.

На основании (2.9) и (2.10) из (2.5) получаем

$$4x^3 = y^2(1 + O(x^{-2}) - cy^{-2}) \quad \text{или} \quad cy^{-2} = \frac{c}{4}x^{-3}(1 + O(x^{-2}) - cy^{-2}) \tag{2.12}$$

Так как $x \to \infty$ и $y \to \infty$ при $z \to z_0$, то при больших $|x|$ имеем $|cy^{-2}| < |cx^{-2}|$. Это позволяет переписать (2.12) в виде

$$4x^3 = y^2(1 + O(x^{-2})) \tag{2.13}$$

Из равенства (2.13) легко выводим и такое:

$$y^2 = 4x^3(1 + O(x^{-2})) \tag{2.14}$$

Здесь, конечно, $O(x^{-2})$ не то, которое в равенстве (2.13), но снова малая порядка x^{-2} при больших $|x|$. Из равенства (2.14) получаем

$$y = 2x^{3/2}(1 + O(x^{-2})) \tag{2.15}$$

Теперь из уравнений (2.1) на основании (2.15) имеем

$$dz = \frac{dx}{y} = \frac{1 + O(x^{-2})}{2x^{3/2}}\,dx$$

Интегрируя слева от z_0 до z и справа от ∞ до x, в соответствии с (2.2), найдем

$$z - z_0 = -x^{-1/2} + \int_{\infty}^{x} \frac{1}{2}x^{-3/2}O(x^{-2})\,dx = -x^{-1/2} + \int_{\infty}^{x} O(x^{-7/2})\,dx \tag{2.16}$$

На основании (2.11) это перепишем в виде

$$z - z_0 = -x^{-1/2} + O(x^{-5/2}) \tag{2.17}$$

Подставляя отсюда z в (2.4), получим

$$y\,dy = 6x^2\,dx + [z_0 - x^{-1/2} + O(x^{-5/2})]\,dx$$

Отсюда, интегрируя, найдем

$$y^2 = 4x^3 + 2z_0x - 4x^{1/2} + \int_{\infty}^{x} O(x^{-5/2})\,dx + c \tag{2.18}$$

На основании (2.11) это запишется в виде

$$y^2 = 4x^3 + 2z_0 x - 4x^{1/2} + O(x^{-3/2}) + c \tag{2.19}$$

где c — произвольная постоянная. Из (2.19) получаем

$$y^2 = 4x^3 \left[1 + \frac{1}{2} z_0 x^{-2} - x^{-5/2} + \frac{1}{4} c x^{-3} + O(x^{-9/2})\right] \tag{2.20}$$

Отсюда

$$y = 2x^{3/2} \left[1 + \frac{1}{4} z_0 x^{-2} - \frac{1}{2} x^{-5/2} + \frac{1}{8} c x^{-3} + O(x^{-4})\right] \tag{2.21}$$

Пользуясь этой формулой, мы из уравнений (2.1) найдем

$$dz = \frac{dx}{y} = \frac{1 - {}^1/_4 z_0 x^{-2} + {}^1/_2 x^{-5/2} - {}^1/_8 c x^{-3} + O(x^{-4})}{2x^{3/2}}\, dx \tag{2.22}$$

Интегрируя это равенство, получим

$$z - z_0 = -x^{-1/2} + \frac{1}{20} z_0 x^{-5/2} - \frac{1}{12} x^{-3} + \frac{1}{56} c x^{-7/2} + O(x^{-9/2}) \tag{2.23}$$

Легко видеть, что равенства (2.15) и (2.17) дают асимптотическое представление решения системы (2.1), определенного свойством (2.2). Равенства (2.21) и (2.23) доставляют более точное асимптотическое разложение этого решения.

Этот процесс разворачивания асимптотических рядов можно продолжить как угодно далеко. Таким образом, мы имеем асимптотические ряды для рассматриваемого решения. Сходимость этих рядов пока не доказана (но будет доказана позднее).

Заметим теперь следующее.

Формула (2.18) возникает из (2.5) после замены величины z на основании (2.17) и интегрирования. Следовательно, величина $O(x^{-5/2})$ в формуле (2.18) есть величина с таким же обозначением, стоящая в правой части формулы (2.17), т. е. слагаемое в z. Подставляя в (2.18) все более точные разложения $O(x^{-5/2})$ (получаемые в виде разложения по степеням $x^{-1/2}$), мы будем получать все более точные разложения y в виде, аналогичном формулам (2.15) и (2.21), т. е. в виде ряда Лорана по степеням величины $x^{-1/2}$. При этом очевидно, что произвольная постоянная c в формуле (2.18) порождает в разложении y член ${}^1/_4 c x^{-3/2}$; так как еще формула (2.21) есть не приближенное значение y, а точное, в котором не определено лишь слагаемое $O(x^{-4})$, то ясно, что, подставляя все более точные разложения $O(x^{-5/2})$ в (2.18), мы должны оставлять неизменным значение произвольной постоянной c. Как видно из (2.18), c есть также предельное значение функции $\psi = y^2 - 4x^3 - 2z_0 x + 4x^{1/2}$, составленной для рассматриваемого решения, при $z \to z_0$.

По самому этому способу получения решения системы (2.1) (в виде разложения z и y по степеням величины $x^{-1/2}$) видно, что мы получаем все решения этой системы, обладающие свойством (2.2). Разложения, получаемые по этому способу, являются во всяком случае асимптотическими, а может быть, и сходящимися, чего мы еще не доказали. Это семейство решений зависит от произвольной постоянной c.

Переходим к доказательству сходимости получаемых разложений $z(x)$ и $y(x)$ в ряд по степеням величины $x^{-1/2}$. Из (2.15) видим, что, полагая

$$u = yx^{-3/2}, \qquad y = ux^{3/2} \tag{2.24}$$

получим для рассматриваемого решения

$$u \to 2 \quad \text{при } z \to z_0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} x^{-3/2} - \frac{3}{2} y x^{-5/2} \tag{2.25}$$

или в силу (2.3) и (2.24)

$$\frac{du}{dx}=\frac{6x^2+z}{u}x^{-3}-\frac{3}{2}ux^{-1} \tag{2.26}$$

Запишем еще второе из уравнений (2.1) на основании (2.24) в виде

$$\frac{dz}{dx}=u^{-1}x^{-{}^3/_2} \tag{2.27}$$

Полагая $v=x^{-{}^1/_2}$, запишем уравнения (2.26) и (2.27) в форме

$$v\frac{du}{dv}=\frac{3u^2-12}{u}-\frac{2zv^4}{u}, \qquad \frac{dz}{dv}=-\frac{2}{u} \tag{2.28}$$

Пусть

$$u-2=\tau, \qquad z-z_0=\theta \tag{2.29}$$

Тогда из уравнений (2.28) получаем

$$v\frac{d\tau}{dv}=\frac{3(\tau^2+4\tau)-2(z_0+\theta)v^4}{2+\tau}, \qquad \frac{d\theta}{dv}=-\frac{2}{2+\tau} \tag{2.30}$$

и

$$\tau\to 0, \quad \theta\to 0 \quad \text{при } v\to 0 \tag{2.31}$$

Так как $\tau=O(v^4)$ на основании (2.12), (т. е. τ есть малая порядка v^4 при $v\to 0$), то положим $\tau=v^3w$. Тогда уравнения (2.30) переходят в уравнения

$$v\frac{dw}{dv}=\frac{6w-2(z_0+\theta)v}{2+v^3w}, \qquad \frac{d\theta}{dv}=-\frac{2}{2+v^3w} \tag{2.32}$$

Полагая

$$\zeta=\theta+v, \qquad \eta=w-\frac{1}{2}z_0v \tag{2.33}$$

мы из уравнений (2.32) найдем

$$v\frac{d\eta}{dv}=\frac{6\eta+2v^2-2v\zeta-{}^1/_2z_0v^4({}^1/_2z_0v+\eta)}{2+v^3({}^1/_2z_0v+\eta)}, \quad v\frac{d\zeta}{dv}=\frac{v^4({}^1/_2z_0v+\eta)}{2+v^3({}^1/_2z_0v+\eta)} \tag{2.34}$$

Преобразование (2.33) имело целью уничтожить справа первые степени v и привести линейные члены относительно неизвестных к каноническому виду.

Перепишем уравнения (2.34) в виде

$$v\frac{d\eta}{dv}=3\eta+v^2-\zeta v+\omega_5(v,\eta,\zeta), \qquad v\frac{d\zeta}{dv}=\psi_5(v,\eta,\zeta) \tag{2.35}$$

Здесь ω_5 и ψ_5 — сходящиеся в окрестности точки $v=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ — степенные ряды, начинающиеся с пятых степеней. Нас интересует решение уравнений (2.35), определенное начальными условиями $\eta\to 0$ и $\zeta\to 0$ при $v\to 0$.

Рассмотрим вообще систему уравнений

$$v\frac{d\eta}{dv}=3\eta+v^2+\alpha_1\zeta v+\sum_{k+l+m\geqslant 4}\alpha_{klm}v^k\eta^l\zeta^m, \quad v\frac{d\zeta}{dv}=\sum_{k+l+m\geqslant 4}\beta_{klm}v^k\eta^l\zeta^m \tag{2.36}$$

где ряды справа сходятся в окрестности точки $v=\zeta=\eta=0$.

Будем искать решение этих уравнений в виде

$$\eta=\sum_{k=1}^{\infty}\eta_kv^k, \qquad \zeta=\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_kv^k \tag{2.37}$$

с постоянными коэффициентами η_k и ζ_k.

Коэффициенты η_k и ζ_k найдем, подставляя ряды (2.37) в уравнения (2.36) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях v в левой и правой частях. Таким образом, легко находим

$$\eta_1 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0, \qquad \eta_2 = -1, \qquad \zeta_3 = 0, \qquad \eta_3 = c$$

где c — произвольное постоянное.

Наконец, η_l и ζ_l при $l \geqslant 4$ определяются единственным образом по формулам

$$\begin{aligned} \eta_l &= \frac{1}{l-3} P_l(\alpha, \beta, \eta_1, \eta_2, c, \eta_4, \ldots, \eta_{l-1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{l-1}) \\ \zeta_l &= \frac{1}{l} Q_l(\alpha, \beta, \eta_1, \eta_2, c, \eta_4, \ldots, \eta_{l-1}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{l-1}) \end{aligned} \tag{2.38}$$

где P_l, Q_l — многочлены от коэффициентов α и β правых частей системы (2.36) и от η_p, ζ_p при $p \leqslant l-1$ с положительными коэффициентами.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\begin{aligned} \eta &= v^2 + |c| v^3 + |\alpha_1| v\zeta + \sum_{k+l+m\geqslant 4} |\alpha_{klm}| v^k \eta^l \zeta^m \\ \zeta &= \sum_{k+l+m\geqslant 4} |\beta_{klm}| v^k \eta^l \zeta^m \end{aligned} \tag{2.39}$$

Здесь $|a|$ означает модуль, а ряды справа суть ряды с положительными коэффициентами, сходящиеся, очевидно, в окрестности точки $v = \zeta = \eta = 0$, и представляют мажорантные ряды правых частей уравнений (2.36). Известно, что уравнения (2.39) определяют голоморфные функции в окрестности $v = 0$:

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\eta}_k v^k, \qquad \zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\zeta}_k v^k \tag{2.40}$$

Коэффициенты этих рядов найдем, подставляя их в уравнения (2.39) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях v.

Таким образом, получим $\bar{\zeta}_1 = \bar{\eta}_1 = 0$, $\bar{\eta}_2 = 1$, $\bar{\zeta}_2 = 0$, $\bar{\eta}_3 = |c|$, $\bar{\zeta}_3 = 0$ и

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_l &= P_l(|\alpha|, |\beta|, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, |c|, \ldots \bar{\eta}_{l-1}, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_{l-1}) \\ \bar{\zeta}_l &= Q_l(|\alpha|, |\beta, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, |c|, \ldots, \bar{\eta}_{l-1}, \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_{l-1}) \end{aligned} \qquad (l \geqslant 4) \tag{2.41}$$

где P_l и Q_l — те же многочлены, что и (2.38), но аргументы α и β заменены их модулями. Легко видим, что

$$|\eta_m| \leqslant \bar{\eta}_m, \qquad |\zeta_m| \leqslant \bar{\zeta}_m \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

Так как ряды (2.40) (очевидно, с положительными коэффициентами) сходятся, то отсюда следует, что и ряды (2.37) также сходятся в окрестности $v = 0$. Этим доказано существование голоморфного решения (2.37) уравнений (2.35). Так как уравнения (2.35) и суть уравнения типа (2.36), то мы имеем голоморфное решение уравнений (2.35) в виде

$$\eta = -v^2 + cv^3 + \sum_{k\geqslant 4} \eta_k v^k, \qquad \zeta = \sum_{k\geqslant 5} \zeta_k v^k \tag{2.42}$$

где c — произвольная постоянная. Возвращаясь к переменным x, y и z, получим

$$\begin{aligned} y &= 2v^{-3} + \frac{1}{2} z_0 v - v^2 + \frac{1}{4} cv^3 + \cdots \\ z &= z_0 - v + \frac{1}{20} z_0 v^5 - \frac{1}{12} v^6 + \frac{1}{56} cv^7 + \cdots \end{aligned} \qquad (v = x^{-1/2}) \tag{2.43}$$

Мы здесь заменили коэффициент c при v^3 через $^1/_4\, c$ и продолженное разложение для z взяли из равенства (2.23).

Ранее мы получали разложения типа (2.21) и (2.23), которые доставляли во всяком случае асимптотическое представление решений, определенных свойством (2.2), и содержали все такие решения.

Теперь, рассуждая иным образом, мы получили некоторое семейство таких решений в виде сходящихся рядов по степеням величины $v = x^{-1/2}$ и также зависящее от произвольного постоянного c (в обоих случаях коэффициенты при v^3).

Таким образом, оба эти семейства совпадают, содержат все решения, определенные свойством 2, и представлены сходящимися рядами. Обращая (2.43), получим

$$x = \frac{1}{(z - z_0)^2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k (z - z_0)^k\right), \qquad y = \frac{1}{(z - z_0)^3}\left(-2 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k (z - z_0)^k\right) \qquad (2.44)$$

где x_k, y_k — постоянные и ряды, стоящие в числителях, сходятся в области $|z - z_0| < r$, $r > 0$. Мы видим, таким образом, что в точке z_0 решение, определенное свойством (2.2), имеет полюс и такие решения образуют семейство, содержащее одну произвольную постоянную.

Теперь мы решения системы (2.1), определенные свойством (2.2), можем искать и непосредственно в виде (2.44) с неопределенными коэффициентами x_k и y_k.

Интересно было бы выяснить, имеет ли решение (2.44), кроме z_0, еще полюсы, и если имеет, то какова их конфигурация на плоскости z в зависимости от произвольного постоянного c, входящего в это решение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z^2 \qquad (2.45)$$

Решения этого уравнения согласно теории Пенлеве имеют подвижные многозначные особые точки. Изучим структуру этих решений. Вводя новые переменные $w = x$, $dw/dz = y$, получим систему, эквивалентную уравнению (2.45):

$$\frac{dx}{dz} = y, \qquad \frac{dy}{dz} = 6x^2 + z^2 \qquad (2.46)$$

Решения этой системы по теореме 8 не имеют существенно особых подвижных точек. Если z_0 — особая точка решения системы (2.46), то мы имеем

$$x \to \infty, \qquad y \to \infty \qquad \text{при} \qquad z \to z_0 \qquad (2.47)$$

Из уравнений (2.46) получим

$$y\,dy = 6x^2dx + z^2\,dx$$

Отсюда

$$y^2 = 4x^3 + 2\int_{x_1}^{x} z^2dx + c, \quad \text{или} \quad 4x^3 = y^2 - 2\int_{x_1}^{x} z^2dx + c \qquad (2.48)$$

Можно это записать и так:

$$4x^3 = y^2 - 2\int_{z_1}^{z} z^2y\,dz + c \qquad (2.49)$$

Как и прежде, покажем, что

$$\alpha(z) = y^{-2}\int_{z_1}^{z} z^2y\,dz = O(z^2x^{-2}) \qquad (2.50)$$

т. е. $\alpha(z)$ при $z \to z_0$ есть малая такого же порядка, как и x^{-2}. Это позволяет из (2.49) получить $4x^3 = y^2(1 + O(x^{-2}))$; отсюда

$$y = 2x^{3/2}(1 + O(x^{-2})) \qquad (2.51)$$

Пользуясь (2.51), на основании (2.11) получим из $dz = y^{-1}dx$ интегрированием

$$z - z_0 = -x^{-1/2} + O(x^{-5/2}) \tag{2.52}$$

Теперь равенство (2.48) можно переписать в виде

$$y^2 = 4x^3 + 2\int^{x} [z_0 - x^{-1/2} + O(x^{-5/2})]^2\, dx + c \tag{2.53}$$

Отсюда

$$y^2 = 4x^3 + 2z_0^2 x + 2\ln x - 8z_0 x^{1/2} + \int_{\infty}^{x} O(x^{-5/2})\, dx + c$$

или на основании (2.11)

$$y^2 = 4x^3 + 2z_0^2 x + 2\ln x - 8z_0 x^{1/2} + O(x^{-3/2}) + c \tag{2.54}$$

Выносим справа $4x^3$ за скобки, тогда будем иметь

$$y^2 = 4x^3\left[1 + \frac{1}{2} z_0^2 x^{-2} - 2z_0 x^{-5/2} + \frac{1}{4} cx^{-3} + \frac{1}{2} x^{-3}\ln x + O(x^{-9/2})\right] \tag{2.55}$$

Извлекая корень, найдем

$$y = 2x^{3/2}\left[1 + \frac{1}{4} z_0^2 x^{-2} - z_0 x^{-5/2} + \frac{1}{4} x^{-3}\ln x + \frac{1}{8} cx^{-3} + O(x^{-4})\right] \tag{2.56}$$

Теперь, интегрируя снова равенство $dz = y^{-1}dx$, получим

$$z - z_0 = -x^{-1/2} + \frac{1}{20} z_0^2 x^{-5/2} - \frac{1}{6} z_0 x^{-3} + \frac{1}{28} x^{-7/2}\ln x + \left(\frac{1}{98} + \frac{1}{72} c\right) x^{-7/2} + O(x^{-9/2}) \tag{2.57}$$

Таким образом, для z имеем разложения (2.52) и (2.57), а для y — разложения (2.51) и (2.56). Этот процесс можно продолжить как угодно далеко. Вообще имеем

$$z = z_0 + P(x^{-1/2}) + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(x^{-1/2}) \ln^k x \tag{2.58}$$

где $P(x^{-1/2})$ и $\theta_k(x^{-1/2})$ — ряды по положительным степеням величины $x^{-1/2}$ без свободных членов, причем наинизшая степень в ряде $\theta_k(x^{-1/2})$ возрастает с увеличением k. Для y получаем

$$y = 2x^{3/2}\left[1 + P_1(x^{-1/2}) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(x^{-1/2}) \ln^k x\right] \tag{2.59}$$

где ряды $P_1(x^{-1/2})$ и $R_k(x^{-1/2})$ имеют такой же вид, как и $P(x^{-1/2})$, $\theta_k(x^{-1/2})$. Ряды, встречающиеся здесь, суть во всяком случае асимптотические.

Поступила 17 IV 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гл. III. ГИТТЛ. М. 1950.
2. Еругин Н. П. О продолжении решений дифференциальных уравнений. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 1.
3. Еругин Н. П. Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
4. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.