

**ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ, СВОДЯЩИХСЯ К ВАРИАЦИОННЫМ,
И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДВУСТОРОННИХ
ПРИБЛИЖЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

М. Г. Слободянский

(Москва)

В работе рассматривается вопрос о построении приближенного решения и оценки погрешности в линейных задачах, сводящихся к вариационным. Найденные приближенные решения и указанные оценки погрешности можно применить к определению двусторонних приближений для напряжений и других искомых величин в статических задачах упругости. Более подробно рассмотрены плоская задача теории упругости и задача об изгибе защемленной пластины.

В качестве примера рассмотрены задачи об изгибе защемленной квадратной и защемленной полукруглой пластины под действием равномерной нагрузки.

§ 1. Построение приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и оценка его погрешности. 1°. Пусть A — положительно-определенный симметричный оператор, определенный на линейном M в данном гильбертовом пространстве H , так что

$$Au = f, \quad Av = \psi \quad (1.1)$$

где u, v принадлежат M , а f, ψ — заданные элементы из H . Напомним, что оператор A называется симметричным [1], если $(Au, v) = (u, Av)$, положительным, если $(Au, u) > 0$ и положительно-определенным, если $(Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$, где γ — постоянное число, (u, v) — скалярное произведение элементов, $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ — норма элемента u .

Тогда, как известно [2, 3], существуют элементы u_0 и v_0 , принадлежащие M и дающие наименьшие значения соответствующим функционалам:

$$F_f(u) = (Au, u) - 2(u, f), \quad F_\psi(v) = (Av, v) - 2(v, \psi) \quad (1.2)$$

Во многих линейных задачах определение искомой функции, или ее производных до определенного порядка, или линейного оператора от искомой функции можно свести к задаче об определении скалярного произведения (f, v) . Это может быть сделано либо путем введения в некоторых случаях специальным образом подобранных элементов f или ψ , либо путем введения специальным образом построенных функций Грина, как увидим ниже на конкретных примерах (см. также [4]).

Поставим перед собой задачу построения приближенного значения (f, v) и оценки погрешности этого приближения.

Заметим, что $(f, v) = (\psi, u)$ в силу симметричности оператора A . Пусть u_n, v_n — элементы, принадлежащие M ; иначе говоря, пусть u_n, v_n — до-

пустимые элементы в вариационных задачах о минимуме функционалов $F_f(u)$ и $F_\psi(v)$. Имеем

$$(f, v) = (f, v_n) + (f, v - v_n) = (f, v_n) + (f_n, v - v_n) + (f - f_n, v - v_n) \quad (1.3)$$

где $Au_n = f_n$, $Av_n = \psi_n$. Так как в силу симметричности оператора A

$$(f_n, v - v_n) = (Au_n, v - v_n) = (A(v - v_n), u_n) = (\psi - \psi_n, u_n) \quad (1.4)$$

то из (1.3) получим

$$(f, v) - b_n = (f - f_n, v - v_n), \quad b_n = (f, v_n) + (\psi - \psi_n, u_n) \quad (1.5)$$

Если примем b_n за приближенное значение (f, v) , то для оценки погрешности этого приближения надо найти оценку $(f - f_n, v - v_n)$. Для этого воспользуемся неравенством

$$|(Au, v)|^2 \leq |(Au, u)| |(Av, v)| \quad (1.6)$$

Так как оператор A положительный и симметричный, то имеем

$$(A(u - \lambda v), u - \lambda v) > 0 \quad \text{или} \quad (Au, u) - 2\lambda(Au, v) + \lambda^2(Av, v) > 0$$

где λ — произвольный вещественный параметр.

Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена относительно λ неположителен, т. е. имеет место неравенство (1.6).

Применяя неравенство (1.6) к оценке $(f - f_n, v - v_n)$, получим

$$\begin{aligned} |(f - f_n, v - v_n)|^2 &= |(A(u - u_n), (v - v_n))|^2 \leq \\ &\leq |(A(u - u_n), u - u_n)| |(A(v - v_n), v - v_n)| \end{aligned} \quad (1.7)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} (A(u - u_n), u - u_n) &= (Au, u) + (Au_n, u_n) - 2(Au, u_n) = \\ &= (Au_n, u_n) - 2(f, u_n) + (Au, u) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Так как $(Au_0, u_0) - (f, u_0) = 0$, то, как известно,

$$F_f(u_0) = (Au_0, u_0) - 2(f, u_0) = -(f, u_0), \quad F_\psi(v_0) = -(f, v_0) \quad (1.9)$$

Подставляя (1.8) в (1.7), принимая во внимание (1.2) и (1.9), найдем

$$|(f - f_n, v_0 - v_n)| \leq [F_f(u_n) - F_f(u_0)]^{1/2} [F_\psi(v_n) - F_\psi(v_0)]^{1/2} \quad (1.10)$$

Предположим, что рассматриваемая задача приведена к другой вариационной задаче (например, при помощи принципа дополнительной работы Кастильяно в теории упругости) и таким же образом найдено

$$|(f, v_0) - b_n^*| \leq [F_f(u_0) - a_n^*]^{1/2} [F_\psi(v_0) - c_n^*]^{1/2} \quad (1.11)$$

где b_n^* — приближенное значение (f, v) ; при этом

$$a_n^* < F_f(u_0) < F_f(u_n), \quad c_n^* < F_\psi(v_0) < F_\psi(v_n) \quad (1.12)$$

Из (1.10), принимая во внимание (1.12), получим оценку погрешности приближенного решения (1.5):

$$|(f, v_0) - b_n| < [F_f(u_n) - a_n^*]^{1/2} [F_\psi(v_n) - c_n^*]^{1/2} \quad (1.13)$$

Построим теперь новое приближенное решение, приняв за приближенное значение (f, v) величину $\frac{1}{2}(b_n + b_n^*)$, и оценим разность

$$|(f, v_0) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*)|$$

Имеем на основании (1.10) и (1.11)

$$\begin{aligned} |(f, v_0) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*)| &\leq \frac{1}{2} |(f, v_0) - b_n| + \frac{1}{2} |(f, v_0) - b_n^*| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} [F_f(u_n) - F_f(u_0)]^{1/2} [F_\psi(v_n) - F_\psi(v_0)]^{1/2} + \\ &+ \frac{1}{2} [F_f(u_0) - a_n^*]^{1/2} [F_\psi(v_0) - c_n^*]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Применяя к правой части (1.14) неравенство Гельдера, найдем

$$|(f, v_0) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*)| < \frac{1}{2} [F_f(u_n) - a_n^*]^{1/2} [F_\psi(v_n) - c_n^*]^{1/2} \quad (1.15)$$

Правая часть (1.15) в два раза меньше правой части (1.13). Таким образом, если за приближенное значение (f, v) примем $\frac{1}{2}(b_n + b_n^*)$, то полученная оценка погрешности (1.15) будет в два раза меньше оценки погрешности (1.13), полученной для случая, когда за приближенное значение (f, v) принято b_n .

При решении конкретных задач мы поэтому будем пользоваться приближенным решением в виде $\frac{1}{2}(b_n + b_n^*)$ и оценкой погрешности (1.15). Следует отметить, что определение b_n^* не усложняет решения задачи, ибо входящие в b_n^* величины необходимы для определения правой части (1.13) или (1.15).

2°. Дадим другой вывод оценки (1.15), более простой по выкладкам. Приведенный выше ход рассуждений, основанный на оценке погрешности (1.5), приводит (что примечательно) к тому же результату, что и приведенный ниже вывод.

Имеем тождество

$$(f, v_0) = \frac{1}{2} [(f, v_0) + (\psi, u_0)] = \frac{1}{4\lambda} [(f + \lambda\psi, u_0 + \lambda v_0) - (f - \lambda\psi, u_0 - \lambda v_0)] \quad (1.16)$$

где λ — пока неопределенный параметр.

Элемент $u_0 \pm \lambda v_0$ удовлетворяет уравнению (1.1) с правой частью $f \pm \lambda\psi$, и, следовательно, этот элемент дает функционалу $F_{f \pm \lambda\psi}$ наименьшее значение, где функционал $F_{f \pm \lambda\psi}$ равен правой части (1.2), в которой элемент f заменен на $f \pm \lambda\psi$. На основании (1.9) поэтому получим

$$F_{f \pm \lambda\psi}(u_0 \pm \lambda v_0) = - (f \pm \lambda\psi, u_0 \pm \lambda v_0) \quad (1.17)$$

Так как $u_n \pm \lambda v_n$ — элемент, принадлежащий M , то на основании свойства функционала $F_{f \pm \lambda \psi}$ имеем

$$F_{f-\lambda\psi}(u_0 - \lambda v_0) < F_{f-\lambda\psi}(u_n - \lambda v_n) = a_n + 2b_n\lambda + c_n\lambda^2 \quad (1.18)$$

где

$$a_n = F_f(u_n) > F_f(u_0), \quad c_n = F_\psi(v_n) > F_\psi(v_0) \quad (1.19)$$

Положим, что можно найти числа a_n^* , b_n^* , c_n^* , так что при любом λ имеем

$$F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0) > a_n^* - 2b_n^*\lambda + c_n^*\lambda^2 \quad (1.20)$$

Из (1.20) следует

$$a_n^* < F_f(u_0) < a_n, \quad c_n^* < F_\psi(v_0) < c_n; \quad a_n - a_n^* > 0, \quad c_n - c_n^* > 0$$

Из (1.16), принимая во внимание (1.17) и неравенства (1.18) и (1.20), получим при $\lambda > 0$

$$(f, v_0) - \frac{b_n + b_n^*}{2} \leq \frac{a_n - a_n^*}{4\lambda} + (c_n - c_n^*) \frac{\lambda}{4} \quad (1.21)$$

Можно показать, что величины b_n и b_n^* , входящие в (1.21), совпадают с введенными выше в 1°.

Примем теперь за приближенное значение (f, v_0) величину $\frac{1}{2}(b_n + b_n^*)$ и выберем $\lambda = \lambda_0$ так, чтобы правая часть в (1.21) имела наименьшее значение. Имеем

$$-\frac{a_n - a_n^*}{\lambda_0^2} + c_n - c_n^* = 0, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{a_n - a_n^*}{c_n - c_n^*}} \quad (1.22)$$

Следовательно,

$$\frac{a_n - a_n^*}{4\lambda_0} + (c_n - c_n^*) \frac{\lambda_0}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{(a_n - a_n^*)(c_n - c_n^*)} = \delta \quad (1.23)$$

Подставляя (1.23) в (1.21) и принимая во внимание (1.19), получим найденную выше оценку (1.15).

Замечание. До сих пор не было наложено на u_n и v_n никаких ограничений, кроме того, что они должны принадлежать M , т. е. они должны быть допустимыми элементами в данных вариационных задачах. Пусть $\{\varphi_n'\}$ — последовательность элементов линейала M и

$$u_n = \alpha_1' \varphi_1' + \dots + \alpha_n' \varphi_n', \quad v_n = \beta_1' \varphi_1' + \dots + \beta_n' \varphi_n' \quad (1.24)$$

где α_k' , β_k' — постоянные.

Если каким-либо приближенным методом (например, методом смягчения граничных условий) найдены значения α_k' и β_k' , то, беря за приближенное значение $(f, v_0) b_n$ из (1.5) или $\frac{1}{2}(b_n + b_n^*)$, сможем определять погрешность решения, пользуясь оценками (1.13) или (1.15).

Однако для получения наилучшей оценки погрешности (1.13) или (1.15) следует применить для определения постоянных α_k' и β_k' метод Рунца или метод Галеркина, так как при этом $F_f(u_n)$ и $F_\psi(v_n)$ принимают наименьшие, а a_n^* , c_n^* наибольшие значения при данном выборе элементов $\{\varphi_n'\}$.

Отметим в заключение, что если мы будем искать решения u_n и v_n по методу Рунца или по методу Галеркина, то $(\psi - \psi_n, u_n) = 0$ и выражение для b_n из (1.5) упрощается, а именно в этом случае $b_n = (f, v_n)$.

§ 2. Двусторонние приближения в пространственной задаче теории упругости. Пусть на части поверхности S_1 , области тела D , заданы смещения, а на части поверхности S_2 заданы поверхностные усилия. Смещения u , v , w могут быть выражены через функции Грина следующим образом [5]:

$$u(x, y, z) = \iiint_D (Xu_1' + Yv_1' + Zw_1') d\xi d\eta d\zeta + \iint_{S_2} (Xv_1' + Yv_1' + Zv_1'w_1') dS - \iint_{S_1} (Xv_1'u + Yv_1'v + Zv_1'w) dS \quad (2.1)$$

Здесь u_1' , v_1' , w_1' — смещения в направлении оси x (или ξ), вызванные сосредоточенной в точке (x, y, z) единичной силой, Xv_1' , Yv_1' , Zv_1' — соответствующие им усилия на поверхности, при этом

$$u_1' = v_1' = w_1' = 0 \quad \text{на } S_1, \quad Xv_1' = Yv_1' = Zv_1' = 0 \quad \text{на } S_2 \quad (2.2)$$

Аналогичные формулы имеют место для $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$. Заметим, что функции Грина, входящие в (2.1), симметричны относительно обеих пар аргументов (x, y, z) и (ξ, η, ζ) . Положим

$$u_1' = u_1^\circ + u_1, \quad v_1' = v_1^\circ + v_1, \quad w_1' = w_1^\circ + w_1 \quad (2.3)$$

где u_1° , v_1° , w_1° — смещения, обладающие теми же особенностями в точке (x, y, z) , что и функции Грина u_1' , v_1' , w_1' ; u_1 , v_1 , w_1 — смещения, удовлетворяющие уравнениям упругости с некоторыми массовыми силами X_1 , Y_1 , Z_1 .

В частности, можно положить $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$, т. е. смещения u_1 , v_1 , w_1 удовлетворяют однородным уравнениям упругости в области D . Для определенности будем искать компоненту деформации $\partial u / \partial x$.

Подставляя (2.3) в (2.1) и дифференцируя по x , найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \iiint_D (Xu_{11}^\circ + Yv_{11}^\circ + Zw_{11}^\circ) d\xi d\eta d\zeta + \iint_{S_2} (Xv_{11}^\circ + Yv_{11}^\circ + Zv_{11}^\circ w_{11}^\circ) dS - \iint_{S_1} (Xv_{11}^\circ u + Yv_{11}^\circ v + Zv_{11}^\circ w) dS + F(U, U_{11}) \quad (2.4)$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\partial u_1^\circ}{\partial x} = u_{11}^\circ, \quad \frac{\partial v_1^\circ}{\partial x} = v_{11}^\circ, \quad \frac{\partial w_1^\circ}{\partial x} = w_{11}^\circ, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_{11}, \dots, \quad \frac{\partial Xv_1^\circ}{\partial x} = Xv_{11}^\circ, \dots$$

где Xv_{11}° , Yv_{11}° , Zv_{11}° — усилия на поверхности, соответствующие смещениям u_{11} , v_{11} , w_{11} ;

$$F(U, U_{11}) = \iiint_D (Xu_{11} + Yv_{11} + Zw_{11}) d\xi d\eta d\zeta + \iint_{S_2} (Xv_{11} + Yv_{11} + Zv_{11}w_{11}) dS - \iint_{S_1} (Xv_{11}u + Yv_{11}v + Zv_{11}w) dS \quad (2.5)$$

Входящие в (2.4) и (2.5) компоненты смещения u_{11} , v_{11} , w_{11} , рассматриваемые как функции от ξ , η , ζ , удовлетворяют в силу теоремы взаимности однородным уравнениям упругости относительно переменных ξ , η , ζ , а на поверхности удовлетворяют следующим граничным условиям;

$$\begin{aligned} u_{11} &= -u_{11}^{\circ}, & v_{11} &= -v_{11}^{\circ}, & w_{11} &= -w_{11}^{\circ} & \text{на } S_1 \\ X_{v11} &= -X_{v11}^{\circ}, & Y_{v11} &= -Y_{v11}^{\circ}, & Z_{v11} &= -Z_{v11}^{\circ} & \text{на } S_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, определение компоненты деформации $\partial u / \partial x$ сводится к нахождению $F(U, U_{11})$, т. е. к определению смещений u_{11} , v_{11} , w_{11} , удовлетворяющих уравнениям упругости относительно переменных ξ , η , ζ и граничным условиям (2.6). Если функции u_1° , v_1° , w_1° подобраны таким образом, что функции в правых частях (2.5) окажутся достаточно гладкими, то погрешность при определении u_{11} , v_{11} , w_{11} каким-либо приближенным методом будет того же порядка, что и при определении u , v , w , а погрешность при определении суммы интегралов в (2.5) будет, как следует ожидать, даже меньше, чем при определении самих функций u , v , w .

Этот способ использован в работе ^[4], где даны примеры построения указанных функций u_1° , v_1° , w_1° .

В § 5 рассмотрен вопрос о построении функций u_1° , v_1° , w_1° в случае плоской задачи теории упругости с заданными контурными усилиями и задачи об изгибе защемленной пластины.

Для определения $F(U, U_{11})$ можно ввести скалярное произведение в гильбертовом пространстве и свести задачу об определении $F(U, U_{11})$ к задаче об определении смещений u , v , w и u_{11} , v_{11} , w_{11} , которые, как известно, могут быть определены из условий минимума функционалов (1.2), и затем воспользоваться (1.15) для оценки погрешности приближенного значения $F(U, U_{11})$.

Однако в данном случае, частично повторив рассуждения § 1, построим приближенное значение для $F(U, U_{11})$ и оценку погрешности непосредственно.

Прежде всего, пользуясь теоремой взаимности и (2.5), легко установить, что

$$F(U, U_{11}) = F(U_{11}, U) \quad (2.7)$$

Введем следующие обозначения для работы деформации A , потенциальной энергии Π и дополнительной работы A^* :

$$A(u, v, w) = A(U) = A(\sigma_x, \dots, \tau_{xz}) = A(\sigma)$$

где под U в дальнейшем подразумеваем аргументы u , v , w ;

$$\Pi(U) = A(U) - \int_D \int \int (Xu + Yv + Zw) d\xi d\eta d\zeta - \int_{S_1} \int (X_v v + Y_v u + Z_v w) dS \quad (2.8)$$

$$A^*(\sigma) = A(\sigma) - \int_{S_2} \int (Xu + Yv + Zw) dS \quad (2.9)$$

Складывая (2.8) и (2.9) и принимая во внимание, что работа деформации равна половине работы внешних сил, найдем

$$\Pi(U) + A^*(\sigma) = 0 \tag{2.10}$$

Далее имеем

$$F(U, U) = \int\int\int_D (Xu + Yv + Zw) d\xi d\eta d\zeta + \int\int_{S_2} (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w) dS - \int\int_{S_1} (X_\nu u + Y_\nu v + Z_\nu w) \tag{2.11}$$

Сравнивая (2.11) и (2.8) или (2.9) и принимая во внимание, что работа деформации равна половине работы внешних сил, найдем

$$F(U, U) = -2\Pi(U), \quad F(U, U) = 2A^*(\sigma) \tag{2.12}$$

Напишем тождество, аналогичное (1.16):

$$F(U, U_{11}) = \frac{1}{4\lambda} [F(U + \lambda U_{11}, U + \lambda U_{11}) - F(U - \lambda U_{11}, U - \lambda U_{11})] \tag{2.13}$$

где λ — пока неопределенный параметр.

Справедливость первого равенства (2.12) следует из того, что

$$F(U, U_{11}) = F(U_{11}, U) \tag{2.14}$$

Подставляя (2.12) в (2.13), найдем

$$F(U, U_{11}) = \frac{1}{2\lambda} [\Pi(U - \lambda U_{11}) + A^*(\sigma + \lambda\sigma_{11})] \tag{2.15}$$

В частном случае тождество (2.15) при $\lambda = 1$ и без использования второго равенства (2.12) применено Е. Треффтцем к исследованию сходимости метода Ритца [5]. Тождество (2.13) выражает билинейный функционал через квадратичные функционалы и применяется в ряде вопросов анализа [1] (с параметром $\lambda = 1$).

В дальнейших выводах существенными являются выбор параметра $\lambda = \lambda_0$ и совместное использование принципа возможных перемещений и принципа Кастильяно.

Для определения смещений $\{U\}$ и $\{U_{11}\}$ применим принцип минимума потенциальной энергии, а для определения соответствующих им напряжений $\{\sigma\}$ и $\{\sigma_{11}\}$ применим принцип минимума дополнительной работы.

При этом допустимые функции $\{U_n\}$ и $\{U_{11n}\}$ должны удовлетворять условиям на части поверхности S_1 , а допустимые напряжения $\{\sigma_n\}$ и $\{\sigma_{11n}\}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия и условиям на части поверхности S_2 :

$$\Pi(U_n - \lambda U_{11n}) = a_n + b_n \lambda + c_n \lambda^2 \tag{2.16}$$

$$A^*(\sigma_n + \lambda\sigma_{11n}) = a_n^* + b_n^* \lambda + c_n^* \lambda^2$$

где

$$a_n = \Pi(U_n), \quad a_n^* = A^*(\sigma_n), \quad c_n = \Pi(U_{11n}), \quad c_n^* = A^*(\sigma_{11n}) \tag{2.17}$$

Полагая в (2.15) параметр $\lambda > 0$ и принимая во внимание (2.16), получим

$$F(U, U_{11}) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*) < \frac{1}{2\lambda}(a + a_n^*) + (c_n + c_n^*) \frac{\lambda}{2} \quad (2.18)$$

Далее

$$a_n^* + a_n = A^*(\sigma_n) + \Pi(U_n) > A^*(\sigma) + \Pi(U)$$

Отсюда на основании (2.10) имеем

$$a_n^* + a_n > 0$$

Аналогично имеем

$$c_n^* + c_n > 0$$

Выберем параметр $\lambda = \lambda_0$ так, чтобы правая часть в (2.18) была наименьшей при $\lambda > 0$. Приравнявая нулю производную по λ от правой части (2.18), получим

$$-\frac{a_n^* + a_n}{\lambda^2} + c_n^* + c_n = 0$$

Отсюда

$$\lambda_0 = + \sqrt{\frac{a_n^* + a_n}{c_n^* + c_n}} = \sqrt{\frac{A^*(\sigma_n) + \Pi(U_n)}{A^*(\sigma_{11n}) + \Pi(U_{11n})}} \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.18), окончательно найдем

$$\left| F(U, U_{11}) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*) \right| \leq \delta \quad (2.20)$$

или

$$\frac{1}{2}(b_n + b_n^*) - \delta < F(U, U_{11}) < \frac{1}{2}(b_n + b_n^*) + \delta \quad (2.21)$$

где

$$\delta = \sqrt{[A^*(\sigma_n) + \Pi(U_n)] [A^*(\sigma_{11n}) + \Pi(U_{11n})]} \quad (2.22)$$

Очевидно, что $\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если при $n \rightarrow \infty$

$$A^*(\sigma_n) + \Pi(U_n) \rightarrow A^*(\sigma) + \Pi(U) = 0$$

Полученные формулы (2.20) — (2.22) являются основными для дальнейшего.

Таким образом, одновременно с определением приближенного решения $\frac{1}{2}(b_n^* + b_n)$ находим оценку для погрешности δ и, следовательно, двусторонние приближения для искомой величины du / dx .

Для определения A и Π в (2.22) задача, таким образом, сводится к решению двух систем линейных уравнений с матрицами $\|c_{ij}\|$ и $\|c_{ij}^*\|$ и со свободными членами d_j , d_{j11} и d_j^* , d_{j11}^* .

В заключение отметим, что при данном выборе функций u_1° , v_1° , w_1° , входящих в (2.3), матрицы $\|c_{ij}\|$ и $\|c_{ij}^*\|$ не зависят от выбора точки x , y , z и лишь свободные члены d_j , d_{j11} , d_j^* , d_{j11}^* являются функциями x , y , z . Следовательно, если найдены решения системы уравнений с матрицами $\|c_{ij}\|$ и $\|c_{ij}^*\|$ и свободными членами d_j , d_{j11} , d_j^* , d_{j11}^* , зависящими от x , y , z , то можно определить двусторонние приближения для напряжений как функции от x , y , z .

§ 3. Изгиб пластины под действием нормальной нагрузки. Пусть w и w' — прогибы защемленной по контуру пластины под действием нормальных нагрузок p и p' . Как известно,

$$\nabla^4 w = \frac{p}{B}, \quad \nabla^4 w' = \frac{p'}{B} \quad (3.1)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } l, \quad w' = \frac{\partial w'}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } l, \quad (3.2)$$

Здесь B — жесткость пластины, ν — внешняя нормаль к контуру l .

Применяя к рассматриваемой задаче формулы (2.20) и (2.22) и другие результаты § 2, получим

$$\left| \iint_S p' w \, dS - \frac{1}{2} (b_n + b_n^*) \right| < \delta \quad (3.3)$$

$$\delta = \sqrt{[\Pi(w_n) + A^*(\sigma_n)][\Pi(w_n') + A^*(\sigma_n')]} \quad (3.4)$$

Здесь $\Pi(w)$ — потенциальная энергия, $A(w)$ — энергия деформации пластины, $A^*(w)$ — дополнительная работа определяются формулами

$$\Pi(w) = A(w) - \iint_S p w \, dS \quad (3.5)$$

$$A(w) = \frac{B}{2} \iint_S \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] \right\} d\xi \, d\eta \quad (3.6)$$

$$A^*(\sigma) = A(\sigma) = A(w) \quad (3.7)$$

При этом w_n, w_n' — допустимые функции, которые на основании принципа минимума потенциальной энергии должны удовлетворять (3.2).

Заметим, что формулы (3.3) — (3.7) могут быть получены для пластины непосредственно, независимо от общих формул (2.20) и (2.22). Аналогичные выражения получим для $\Pi(w'), A^*(\sigma'), A(w')$, если в (3.5) — (3.7) подставим вместо $w \sim w'$ и вместо $p \sim p'$. Для нахождения приближенных значений $A^*(\sigma) = A(\sigma) = A(w)$ надо на основании принципа минимума дополнительной работы Кастильяно построить систему допустимых функций G_1, G_2, H_1 , удовлетворяющих уравнению равновесия^[10]

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial \xi \partial \eta} + p = 0 \quad (3.8)$$

и найти минимум $A^*(\sigma) = A(w)$:

$$A^*(\sigma) = A(w) = \frac{1}{2(1 - \sigma^2)B} \iint_S [G_1^2 + G_2^2 - 2\sigma G_1 G_2 + 2(1 + \sigma) H_1^2] d\xi \, d\eta \quad (3.9)$$

Уравнение (3.8) будет удовлетворено, если в (3.9), в частности, возьмем

$$\begin{aligned} G_1 &= -B \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} + \sigma \frac{\partial^2 w^*}{\partial \eta^2} \right), & G_2 &= -B \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial \eta^2} + \sigma \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2} \right) \\ H_1 &= -B(1 - \sigma) \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

где w^* — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению $\nabla^4 w^* = p/B$.

Если подставить (3.10) в (3.9), получим выражение, совпадающее с правой частью (3.6), если вместо w подставить w^* .

Для определения приближенного значения $A^*(\sigma') = A(w')$ надо таким же образом построить систему допустимых функций $w_n'^*$, удовлетворяющих уравнению $\nabla^4 w_n'^* = p'/B$ во всей области пластины.

Следует отметить, что в некоторых случаях может оказаться более выгодным взять допустимые функции для G_1, G_2, H_1 не в виде (3.10), лишь бы было удовлетворено уравнение равновесия (3.8). Далее b_n и b_n^* являются коэффициентами при λ в первой степени в выражениях $\Pi(w_n + \lambda w_n')$ и $A^*(w_n^* + \lambda w_n'^*)$. Положим, что допустимые функции взяты в виде

$$w_n = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n, \quad w_n' = \alpha_1' \varphi_1 + \dots + \alpha_n' \varphi_n \quad (3.11)$$

$$w_n^* = \psi_0 + \beta_1 \psi_1 + \dots + \beta_n \psi_n, \quad w_n'^* = \psi_0' + \beta_1' \psi_1 + \dots + \beta_n' \psi_n \quad (3.12)$$

где $\alpha_k, \alpha_k', \beta_k, \beta_k'$ — подлежащие определению постоянные, φ_k — допустимые функции, удовлетворяющие на контуре граничным условиям (3.2), ψ_k — допустимые функции, удовлетворяющие однородному уравнению (3.1), ψ_0, ψ_0' — частные решения неоднородных уравнений (3.1).

Пусть уравнения Галеркина, полученные из условия минимума $\Pi(w)$, $\Pi(w')$, $A^*(w)$, $A^*(w')$, будут

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k c_{ik} = d_i, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k' c_{ik} = d_i' \quad (3.13)$$

$$\sum_{k=1}^n \beta_k c_{ik}^* = d_i^*, \quad \sum_{k=1}^n \beta_k' c_{ik}^* = d_i'^* \quad (3.14)$$

где

$$c_{ik} = B \iint_S \varphi_k \nabla^4 \varphi_i \, d\xi \, d\eta, \quad d_i = \iint_S p \varphi_i \, d\xi \, d\eta, \quad d_i' = \iint_S p' \varphi_i \, d\xi \, d\eta \quad (3.15)$$

$$c_{ik}^* = B \int_l \left[\nabla^2 \psi_i \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} - \psi_i \frac{\partial \nabla^2 \psi_k}{\partial \nu} \right] dl - B \int_l \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \right) \right] dl \quad (3.16)$$

$$d_i^* = \iint_S p \psi_i \, d\xi \, d\eta + c_0, \quad d_i'^* = \iint_S p' \psi_i \, d\xi \, d\eta + c_0' \quad (3.17)$$

где c_0 и c_0' вычисляются по формуле (3.16) с подстановкой вместо ψ функций ψ_0 и ψ_0' соответственно. После преобразований получим

$$\Pi(w_n) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k d_k, \quad A^*(w_n^*) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k d_k + h \quad (3.18)$$

$$\Pi(w_n') = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_k' d_k', \quad A^*(w_n'^*) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \beta_k' d_k'^* + h'$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k d_k', \quad b_n^* = \sum_{k=1}^n \beta_k d_k'^* + d_0 \quad (3.19)$$

где $h = A^*(\psi_0)$, $h' = A^*(\psi_0')$, d_0 — коэффициент при λ в первой степени в выражении $A^*(\psi_0 + \lambda\psi_0')$.

Положим теперь, что p' — сосредоточенная в точке (ξ, η) единичная сила, нормальная к пластинке. В этом случае можно показать, что $b_n + b_n^* = w_n(\xi, \eta) + w_n^*(\xi, \eta)$, иначе говоря, за приближенное значение прогиба $w(\xi, \eta)$ надо взять функцию $\frac{1}{2} [w_n(\xi, \eta) + w_n^*(\xi, \eta)]$.

§ 4. Изгиб квадратной пластины под действием равномерной нагрузки. Рассмотрим задачу об изгибе защемленной по контуру квадратной пластины со стороной $a = 2$ под действием равномерной нагрузки p и определим прогиб в произвольной точке (ξ, η) (начало координат взято в центре пластины).

Приближенные решения этой классической задачи даны Б. М. Кояловичем [6], И. Г. Бубновым [7], Б. Г. Галеркиным [8] и другими авторами [9–11].

Приведенное ниже решение позволяет определить верхнюю и нижнюю границы для прогиба в каждой точке пластины. Пусть p' — нормальная нагрузка, состоящая из четырех сосредоточенных в точках (ξ, η) , $(\xi, -\eta)$, $(-\xi, \eta)$, $(-\xi, -\eta)$ сил величинной $1/4$. В силу симметрии имеем

$$w(\xi, \eta) = \iint p' w(x, y) dx dy \quad (4.1)$$

Положим в (3.11)

$$\varphi_1 = (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2, \quad \varphi_2 = (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 x^2, \quad \varphi_3 = (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 y^2, \dots \quad (4.2)$$

Иначе говоря, в качестве допустимых функций в (3.11) вследствие симметрии задачи берем функции вида $(x^2 - 1)(y^2 - 1)^2 x^{2r} y^{2s}$. Указанные функции удовлетворяют граничным условиям (3.2). Далее положим в (3.12)

$$\begin{aligned} \psi_k &= \cos \frac{\pi k}{2} x \left(\operatorname{sh} \frac{\pi k}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi k}{2} y - y \operatorname{ch} \frac{\pi k}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi k}{2} y \right) + \\ &+ \cos \frac{\pi k}{2} y \left(\operatorname{sh} \frac{\pi k}{2} \operatorname{ch} \frac{\pi k}{2} x - x \operatorname{ch} \frac{\pi k}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi k}{2} x \right) \\ \psi_0 &= \frac{P}{8B} (x^2 - 1)(y^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

За функцию ψ_0' примем прогиб квадратной пластинки, опертой по контуру под действием нормальной нагрузки p' , т. е. $\psi_0' = 0$, $\nabla^2 \psi_0' = 0$ на контуре l и $\nabla^4 \psi_0' = p'$.

Такой выбор функции ψ_0' упрощает вычисление d_i^* и $d_i'^*$ по формулам (3.17). Функции ψ_k удовлетворяют однородному уравнению (3.1) и выбраны так, чтобы они были равны нулю на контуре ($\psi = 0$ на l), что сильно упрощает вычисление коэффициентов c_{ij}^* по формулам (3.16). Ограничиваясь в каждой сумме (3.11) и (3.12) первым членом и составляя уравнения Галеркина (3.13) и (3.14), пользуясь при этом формулами (3.15) и (3.16), найдем

$$\frac{256}{1225} \alpha_1 = \frac{256}{225} \frac{P}{B}, \quad \frac{256}{1225} \alpha_1' = \varphi_1(\xi, \eta) \quad (4.4)$$

$$898.2485 \beta_1 = 20.4134 \frac{P}{B}, \quad 898.2485 \beta_1' = \psi_1(\xi, \eta) \quad (4.5)$$

$$A^*(\psi_0) = \frac{11}{45} \left(\frac{P}{B} \right)^2, \quad A^*(\psi_0') = \frac{1}{2} \psi_0'(\xi, \eta) \quad (4.6)$$

Так как в нашем случае $b_n + b_n^* = w_n(\xi, \eta) + w_n^*(\xi, \eta)$, то приближенное значение для прогиба пластины в произвольной точке (ξ, η) будет

$$\frac{1}{2} (b_n + b_n^*) = \frac{1}{2} [\alpha_1 \varphi_1(\xi, \eta) + \psi_0(\xi, \eta) + \beta_1 \psi_1(\xi, \eta)] \quad (4.7)$$

и на основании (4.1) и (3.3) имеем

$$\left| w(\xi, \eta) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*) \right| < \delta \quad (4.8)$$

где δ определяется по формуле (3.4).

Для вычисления δ по формуле (3.4) воспользуемся формулами (3.18) и (4.6), получим

$$\delta = 0.001414 \frac{P}{B} [\psi_0'(\xi, \eta) - \alpha_1' \varphi_1(\xi, \eta) - \beta_1 \psi_1(\xi, \eta)] \quad (4.9)$$

Формулы (4.7) — (4.9) дают возможность найти приближенное значение для прогиба пластины в произвольной точке (ξ, η) и оценить погрешность.

В центре пластины $(\xi = 0, \eta = 0)$ получим из (4.7) — (4.9)

$$\left| w(0, 0) - 0.0208 \frac{P}{B} \right| < 0.0009 \frac{P}{B} \quad (4.10)$$

Если удержать в (3.11) три члена, а в (3.12) попрежнему ограничиться одним членом, то получим

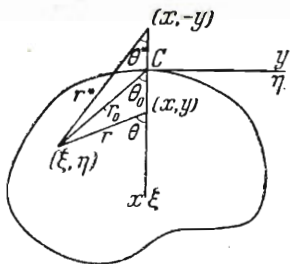
$$\begin{aligned} \frac{18}{7} \alpha_1 + \frac{18}{77} \alpha_2 + \frac{18}{77} \alpha_3 &= \frac{7}{128} \frac{P}{B}, & \frac{18}{7} \alpha_1' + \frac{18}{77} \alpha_2' + \frac{18}{77} \alpha_3' &= \frac{P}{B} \varphi_1(\xi, \eta) \\ \frac{18}{77} \alpha_1 + \frac{502}{1001} \alpha_2 + \frac{2}{77} \alpha_3 &= \frac{1}{124} \frac{P}{B}, & \frac{18}{77} \alpha_1' + \frac{502}{1001} \alpha_2' + \frac{2}{77} \alpha_3' &= \frac{P}{B} \varphi_2(\xi, \eta) \\ \frac{18}{77} \alpha_1 + \frac{2}{77} \alpha_2 + \frac{502}{1001} \alpha_3 &= \frac{1}{124} \frac{P}{B}, & \frac{18}{77} \alpha_1' + \frac{2}{77} \alpha_2' + \frac{502}{1001} \alpha_3' &= \frac{P}{B} \varphi_3(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Откуда найдем для центра пластины

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.020202, & \alpha_2 &= \alpha_3 = 0.005858, & \left| w(0,0) - 0.02030 \frac{P}{B} \right| &< 0.00023 \frac{P}{B} \\ \alpha_1' &= 0.020330, & \alpha_2' &= \alpha_3' &= -0.009010, \end{aligned}$$

т. е. δ составляет около 1.2% от значения прогиба в центре пластины.

§ 5. Определение напряжений в плоской задаче теории упругости и изгибающих моментов в задаче об изгибе пластины. Плоская задача теории упругости в случае заданных контурных усилий и задача об изгибе защемленной по контуру пластины приводятся к определению функции $w(x, y)$, удовлетворяющей уравнению $\nabla^4 w(x, y) = p/B$ и граничным условиям на контуре $w = 0, \partial w / \partial \nu = 0$ на l .



Фиг. 1

Пусть C точка на контуре l , оси x и y (также ξ и η) совпадают с касательной и внутренней нормалью к контуру (фиг. 1) в точке C .

Введем функцию Грина в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(x, y, \xi, \eta) &= g_0(x, y, \xi, \eta) + g(x, y, \xi, \eta) \\ g_0(x, y, \xi, \eta) &= r^2 \ln \frac{r}{r^*} + \frac{1}{2}(r^{*2} - r^2) \end{aligned} \quad (5.1)$$

где r — расстояние от точки (ξ, η) до точки (x, y) , r^* — расстояние от точки (ξ, η) до точки $(x, -y)$. Имеем

$$\delta \pi w(x, y) = \frac{1}{B} \iint_S p(\xi, \eta) g_0(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{B} \iint_S p(\xi, \eta) g(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.2)$$

Для определенности будем искать сумму изгибающих моментов; для этого найдем выражение $\nabla^2 w(x, y)$. Подставляя (5.1) в (5.2) и беря от обеих частей (5.2) оператор ∇^2 , получим

$$8\pi B \nabla^2 w(x, y) = \iint_S p(\xi, \eta) \nabla_{xy^2} g_0(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + \iint_S p(\xi, \eta) \nabla_{xy^2} g(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (5.3)$$

Здесь

$$\nabla_{xy^2} g_0 = 4 \left[\ln \frac{r}{r^*} + \frac{r}{r^*} \cos \theta \cos \theta^* + \cos^2 \theta^* \right]$$

при этом индексы у оператора ∇^2 указывают аргументы, по которым ведется дифференцирование, θ, θ^* — углы между радиусами-векторами r, r^* и осью y . Далее имеем

$$\nabla_{\xi\eta}^4 \nabla_{xy^2} g = 0 \quad (5.4)$$

$$\nabla_{xy^2} g = -\nabla_{xy^2} g_0 \quad \text{на } l, \quad \frac{\partial}{\partial v} \nabla_{xy^2} g = -\frac{\partial}{\partial v} \nabla_{xy^2} g_0 \quad \text{на } l \quad (5.5)$$

Рассмотрим случай, когда точка (x, y) стремится к точке $C(0,0)$ и в пределе совпадает с точкой C , т. е. $x=0, y=0$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l} \nabla_{xy^2} g_0 &= 4 \frac{\partial}{\partial l} (1 + \cos 2\theta) \quad \text{на } l - \Delta l \\ \frac{\partial}{\partial v} \nabla_{xy^2} g_0 &= 4 \frac{\partial}{\partial v} (1 + \cos 2\theta_0) \quad \text{на } l - \Delta l \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь θ_0 — угол между осью y и радиусом-вектором r_0 , соединяющим точку (ξ, η) с точкой C . Сколь угодно малую часть контура Δl вблизи точки C можно выбрать так, что для наперед заданных сколь угодно малых ϵ_1 и ϵ_2 будет

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial}{\partial l} \nabla_{xy^2} g_0 &= \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \left\{ 2\eta \left[\frac{\xi^2 + (\eta - y)(\eta + y)}{r^2 r^{*2}} + 2 \frac{\xi^2 - (\eta + y)^2}{r^{*4}} \right] \frac{\partial \xi}{\partial \eta} - \right. \\ &\quad \left. - \xi \left[\left(\frac{4\eta y}{r r^{*2}} \right)^2 - \frac{4\eta^2}{r^{*4}} \right] \frac{\partial \eta}{\partial v} \right\} < \epsilon_1 \quad \text{на } \Delta l \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial}{\partial v} \nabla_{xy^2} g_0 &= \lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} \left\{ 2\eta \left[\frac{\xi^2 + (\eta - y)(\eta + y)}{r^2 r^{*2}} + 2 \frac{\xi^2 - (\eta + y)^2}{r^{*4}} \right] \frac{\partial \eta}{\partial v} + \right. \\ &\quad \left. + \xi \left[\left(\frac{4\eta y}{r r^{*2}} \right)^2 - \frac{4\eta^2}{r^{*4}} \right] \frac{\partial \xi}{\partial v} \right\} < \frac{2}{R_c} + \epsilon_2 \quad \text{на } \Delta l \end{aligned}$$

Далее при малом Δl

$$\begin{aligned} |\eta| &\leq \frac{\xi^2}{2R_c} + \epsilon_3, \quad |\xi| \leq r^*, \quad |\xi| \leq r, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} \leq 1 \quad \text{на } \Delta l \\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial \xi}{\partial v} &= \frac{1}{r^*} \left(\frac{\xi}{R_c} + \epsilon_4 \right) \leq \frac{1}{R_c} + \epsilon_5 \quad \text{на } \Delta l \end{aligned} \quad (5.8)$$

где R_C — радиус кривизны контура l в точке C (предполагаем, что кривизна непрерывна вблизи рассматриваемой точки), $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ — малые величины, являющиеся функциями величины Δl . Из найденных оценок следует, что на части контура Δl главный вектор и главный момент контурных усилий, соответствующий граничным значениям $\nabla_{xy^2} g_0$, на Δl стремятся к нулю при $y \rightarrow 0, \Delta l \rightarrow 0$.

Таким образом, когда точка (x, y) совпадает с точкой C контура l , функция $\nabla_{xy^2} g$ принимает вместо со своей нормальной производной следующие значения на контуре:

$$\nabla_{xy^2} g = -4(1 + \cos 2\theta_0) \quad \text{на } l, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \nabla_{xy^2} g = -\frac{\partial}{\partial \nu} 4(1 + \cos 2\theta_0) \quad \text{на } l \quad (5.9)$$

Для дальнейшего удобнее положить

$$\nabla_{xy^2} g = w_0 + w' \quad (5.10)$$

где w_0 удовлетворяет уравнению (5.4) и тем же граничным условиям (5.9) и (5.5), что и $\nabla_{xy^2} g$.

Следовательно,

$$\nabla^4 w' = p', \quad w' = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } l \quad (5.11)$$

где $p' = \nabla^4 w_0$.

Применяя теперь для нахождения второго интеграла в (5.3) выводы § 3, получим

$$\left| \frac{1}{B} \iint p(\xi, \eta) w'(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{1}{2} (b_n + b_n^*) \right| < \delta \quad (5.12)$$

$$\delta = \sqrt{[A^*(w_n^*) + \Pi(w_n)] [A^*(w_n'^*) + \Pi(w_n')]} \quad (5.13)$$

где величины имеют те же значения, что и в § 3.

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе заземленной полукруглой пластины.

§ 6. Изгиб заземленной полукруглой пластины. Пусть заземленная полукруглая пластина радиуса единица находится под действием равномерной нагрузки интенсивности p (фиг. 2).

Найдем сумму изгибающих моментов в точке C .

Положим в (5.10)

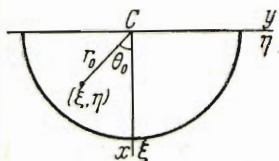
$$w_0 = 4(r_0^4 - 2r_0^2)(1 + \cos 2\theta_0) \quad (6.1)$$

Функция w_0 удовлетворяет [на контуре тем же условиям (5.5) или (5.9), что и $\nabla_{xy^2} g$. Из (5.11) получим

$$\nabla^4 w' = -\nabla^4 w_0 = p' = -256, \quad w' = \frac{\partial w'}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } l \quad (6.2)$$

Из (5.3) имеем далее

$$\begin{aligned} 8\pi B \nabla^2 w(0,0) = & \iint_D p 4(1 + \cos 2\theta_0) r_0 dr_0 d\theta_0 + \iint_D p 4(r_0^4 - 2r_0^2)(1 + \cos 2\theta_0) r_0 dr_0 d\theta_0 + \\ & + \iint_D p w' d\xi d\eta = \frac{2}{3} \pi + \iint_D p w' d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.3)$$



Фиг. 2

Для определения второго интеграла в (6.3) воспользуемся неравенством (5.12). Для этого положим в (3.11)

$$\begin{aligned} w &= r_0^2 \cos^2 \theta_0 (r_0 - 1)^2 [\alpha_1 + \alpha_2 r_0 \cos \theta_0] \\ w' &= r_0^2 \cos^2 \theta_0 (r_0 - 1)^2 [\alpha_1' + \alpha_2' r_0 \cos \theta] \end{aligned} \quad (6.4)$$

и подставим в (3.15) и (3.13). Получим

$$\begin{aligned} \frac{29}{120} \pi \alpha_1 + \frac{128}{315} \alpha_2 &= \frac{1}{120} \frac{P}{B} \pi & \frac{29}{120} \pi \alpha_1' + \frac{128}{315} \alpha_2' &= -\frac{1}{120} \pi 256 \\ \frac{128}{315} \alpha_1 + \frac{17}{168} \pi \alpha_2 &= \frac{4}{315} \frac{P}{B} & \frac{128}{315} \alpha_1' + \frac{17}{168} \pi \alpha_2' &= -\frac{4}{315} 256 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= +0.041485 \frac{P}{B}, & \alpha_2 &= -0.013082 \frac{P}{B} \\ \alpha_1' &= -10.620075, & \alpha_2' &= +3.349069 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (3.18) и (3.19), найдем

$$\Pi(w_n) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n d_k \alpha_k = -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{120} \alpha_1 + \frac{4}{315} \alpha_2 \right] \left(\frac{P}{B} \right)^2 = -0.000460 \left(\frac{P}{B} \right)^2 \quad (6.7)$$

$$\Pi(w_n') = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n d_k' \alpha_k' = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{120} \times 256 \alpha_1' + \frac{4}{315} \times 256 \alpha_2' \right] = -0.000460 \times 256^2 \quad (6.8)$$

$$b_n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (d_k \alpha_k' + d_k' \alpha_k) = 0.117752 \frac{P}{B} \quad (6.9)$$

Для нахождения $A^*(w_n^*)$ и $A^*(w_n'^*)$ положим в (3.12)

$$\begin{aligned} w_n^* &= \frac{P}{64B} (r_0^4 - 2r_0^2) (1 + \cos 2\theta_0) + \beta_1 r_0^2 (1 + \cos 2\theta_0) + \beta_2 r^3 (3 \cos \theta_0 + \cos 3\theta_0) + \\ &+ \beta_3 r_0^4 (\cos 2\theta_0 + \cos 4\theta_0) + \beta_4 r_0^5 (5 \cos 3\theta_0 + 3 \cos 5\theta_0) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} w_n'^* &= -4 (r_0^4 - 2r_0^2) (1 + \cos 2\theta_0) + \beta_1' r_0^2 (1 + \cos 2\theta_0) + \beta_2' r_0^3 (3 \cos \theta_0 + \cos 3\theta_0) + \\ &+ \beta_3' r^4 (3 \cos \theta_0 + \cos 3\theta_0) + \beta_4' r_0^5 (5 \cos 3\theta_0 + 3 \cos 5\theta_0) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Подставляя (6.10) и (6.11) в (3.16), (3.17), (3.14), найдем

$$\begin{aligned} 8\pi\beta_1 + 64\beta_2 + 6\pi\beta_3 + \frac{128}{3}\beta_4 &= -\frac{1}{32}\pi\frac{P}{B} \\ 64\beta_1 + 72\pi\beta_2 + \frac{576}{5}\beta_3 + 120\pi\beta_4 &= \frac{3}{5}\frac{P}{B} \\ 6\pi\beta_1 + \frac{576}{5}\beta_2 + 66\pi\beta_3 + \frac{7296}{7}\beta_4 &= \frac{3}{32}\pi\frac{P}{B} \\ \frac{128}{3}\beta_1 + 120\pi\beta_2 + \frac{7296}{7}\beta_3 + 2000\pi\beta_4 &= \frac{6}{7}\frac{P}{B} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Совершенно аналогичные уравнения мы получим для определения β_1', \dots только с другими правыми частями

$$d_1'^* = 8\pi, \quad d_2'^* = -\frac{768}{5}, \quad d_3'^* = -24\pi, \quad d_4'^* = -\frac{1536}{7} \quad (6.13)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -3.140537 \frac{P}{B}, & \beta_2 &= 1.281853 \frac{P}{64B} \\ \beta_3 &= -0.631488 \frac{P}{64B}, & \beta_4 &= 0.058870 \frac{P}{64B} \end{aligned} \quad (6.14)$$

$\beta_1' = 4 \times 3.140537$, $\beta_2' = -4 \times 1.281853$, $\beta_3' = 4 \times 0.631488$, $\beta_4' = -4 \times 0.058870$
Подставляя (6.13) и (6.14) в (3.18) и (3.19), найдем

$$A(w_n^*) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 d_k^* \beta_k + h = 0.000567 \left(\frac{P}{B}\right)^2 \quad (6.15)$$

$$A(w_n'^*) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 d_k'^* \beta_k' + h' = 0.000567 \times 256^2 \quad (6.16)$$

$$b_n^* = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 (d_k^* \beta_k' + d_k'^* \beta_k) + d_0 = -0.145152 \frac{P}{B} \quad (6.17)$$

где d_0 имеет то же значение, что и в (3.19), h и h' — работы деформации, соответствующие первым членам в (6.11) и (6.12).

Подставляя в (5.12) и (5.13) найденные значения для $A^*(w_n^*)$, $A^*(w_n'^*)$, $\Pi(w_n)$, $\Pi(w_n')$, b_n , b_n^* , получим

$$(0.262904 - \delta) \frac{P}{B} < \frac{1}{B} \iint_D p w d\xi d\eta < (0.262904 + \delta) \frac{P}{B} \quad (6.18)$$

$$\delta = 0.000107 \times 256 \quad (6.19)$$

Подставляя (6.18) и (6.19) в (6.3), окончательно найдем

$$\left| \nabla^2 w(0,0) - 0.72873 \frac{P}{B} \right| < 0.001090 \frac{P}{B} \quad (6.20)$$

Так как в точке $C(0,0)$ (фиг. 2) имеем $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$, то для изгибающего момента M_1 в точке $C(0,0)$ имеем двусторонние приближения

$$|M_1 - 0.072873 p| < 0.001090 p, \quad 0.071783 p < M_1 < 0.073963 p \quad (6.21)$$

Найденная величина для изгибающего момента будет отличаться от действительного значения не более чем на 1.5 %.

Приближенное значение $M_1 = 0.07312 p$ в точке $C(0,0)$, найденное в работе Сапонджяна [12], согласуется с полученными неравенствами.

Поступила 6 II 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. V. Гостехиздат. 1947.
2. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. ГТТИ. 1950.
3. Friedrichs K. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf d. Spektralzerlegung. V. Differentialoperatoren. Math. Ann. 1934. Bd. 109. H. 4—5.
4. Слободянский М. Г. Определение производных искомых функций методом конечных разностей. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
5. Треффтц Е. Математическая теория упругости. ГТТИ. 1934.
6. Коялович Б. М. Об одном уравнении с частными производными. Спб. 1902.
7. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Т. 2. Спб. 1914.
8. Галеркин Б. Г. Прямоугольные пластинки. Известия Политехнического ин-та. 1915. Т. XXIV.
9. Ненку Н. Der Spannungszustand in rechteckigen Platten. München. 1913.
10. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. Гостехиздат. 1943.
11. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат. 1948.
12. Сапонджян О. М. Применение метода дополнительных воздействий к решению задачи об изгибе плит, плоской задачи и задачи кручения призматических стержней. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 5.