Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ВЛОЖЕННОЙ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ ИЛИ УПРУГОЙ ШАЙБОЙ

М. П. Шереметьев

(Москва)

В работе рассматриваются два случая упругого равновесия бесконечной пластинки, в круглое отверстие которой вложена того же диаметра абсолютно жесткая или упругая шайба. В первом случае пластинка растягивается, а к шайбе помимо давления пластинки на шайбу никаких других сил не приложено. Во втором случае на шайбу действует сила, приложенная к центру шайбы, а напряжение в пластинке на бесконечности принимается равным нулю.

В предположении, что трение между пластинками и шайбой отсутствует, рассматриваемые задачи сводятся к уравнению типа Прандтля.

Последний параграф посвящен регуляризации полученных уравнений.

Изложенный прием легко обобщается на тот случай, когда отверстие пластинки и вложенная в это отверстие без зазоров абсолютно жесткая шайба не круглого очертания.

§ 1. Растяжение бесконечной пластинки, в круглое отверстие которой вложена абсолютно жесткая шайба. Пусть в круглое отверстие изотропной напряженной упругой пластинки вставлена абсолютно жесткая того же диаметра круглая шайба. При деформации пластинки шайба, вообще говоря, будет иметь соприкосновение с пластинкой не по всему контуру отверстия, а лишь на отдельных его участках.

Поставим себе задачей определить в растянутой в двух взаимно перпендикулярных направлениях пластинке, во-первых, условия, которым должны удовлетворять растягивающие силы, чтобы соприкосновение пластинки с кольцом имело место, и, во-вторых, напряженное состояние пластинки.

Будем предполагать, что размеры пластинки достаточно велики по сравнению с размерами отверстия, так что пластинку можно считать бесконечной. Кроме этого, будем предполагать, что касательные напряжения равны нулю по всему контуру отверстия пластинки.

Выберем начало координат в центре отверстия пластинки. Напряженное состояние на бесконечности определим следующим образом:

$$X_{x\infty} = P, \qquad X_{y\infty} = 0, \qquad Y_{y\infty} = Q \qquad\qquad (P > Q)$$

Обозначим через $u_1 = u + u'$, $v_1 = v + v'$ смещения точек контура отверстия, где u и v — смещения точек контура отверстия пластинки, когда жесткая шайба в пластинку не вставлена, а u' и v' — компоненты дополнительного смещения, которое получилось в результате того, что в отверстие пластинки вставлена жесткая шайба.

До деформации контур отверстия определялся уравнением

$$x = R\cos\vartheta, \qquad y = R\sin\vartheta$$

после деформации уравнение контура будет

$$\xi = x + u + u', \qquad \eta = y + v + v'$$

На дугах соприкосновения шайбы с пластинкой координаты ξ и η должны удовлетворять уравнению

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2 \quad \text{или} \quad (x + u + u')^2 + (y + v + v')^2 + R^2$$

Отбрасывая квадраты и произведения компонент смещения, получим

$$u\cos\vartheta + v'\sin\vartheta = -(u\cos\vartheta + v\sin\vartheta)$$

или

$$v_r' = -v_r = -\frac{R}{4}\left[P + Q + 2(P - Q)\cos 2\vartheta\right]\frac{\varkappa + 1}{2\mu}$$

Из этого равенства следует, что соприкосновение кольца с пластинкой будет происходить по той части контура, по которой $v_r < 0$. Шайба не будет оказывать влияние на напряженное состояние пластинки, если Q меняется в интервале $\frac{1}{3}P \leqslant Q \leqslant 3P$, так как в этом случае $v_r \geqslant 0$.

Если $Q < \frac{1}{3}P$, то $2(P - Q) > P + Q$ и пластинка будет соприкасаться с шайбой по некоторым дугам Γ_1 и Γ_2, которые в дальнейшем будем называть дугами контакта.

Составим интегральное уравнение задачи, предполагая, что $Q < \frac{1}{3}P$. На дугах контакта пластинки с шайбой радиальное смещение

$$v_{1r} = u_1\cos\vartheta + v_1\sin\vartheta = 0 \tag{1.1}$$

Продифференцируя равенство (1.1), получим

$$-u_1\sin\vartheta + v_1\cos\vartheta = -\left(\frac{du_1}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{dv_1}{d\vartheta}\sin\vartheta\right) \tag{1.2}$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь произвольную гладкую замкнутую кривую L, охватывающую круговое отверстие пластинки. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ будет ее уравнение до деформации. Уравнение же этой кривой после деформации в тех же осях координат будет $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(s) + \boldsymbol{\delta}(s)$, где $\boldsymbol{\delta}(s)$ — вектор смещения каждой точки кривой. Обозначим через $\boldsymbol{\theta}$ вектор угла поворота единичного вектора $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$, а через ε_0 — относительное удлинение той же линии в результате деформации. Между величинами $\boldsymbol{\theta}$, ε_0 и $\boldsymbol{\delta}(s)$ существует зависимость.

В самом деле, вектор

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1} = \frac{d\mathbf{r}_1}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1}\left(\boldsymbol{\tau} + \frac{d\boldsymbol{\delta}(s)}{ds}\right) \tag{1.3}$$

с другой стороны, вектор $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\tau}$. Сравнивая эти выражения для вектора $\boldsymbol{\tau}_1$ и пренебрегая величиной $\varepsilon_0\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\tau}$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}(s)}{ds} = \varepsilon_0\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\tau} \tag{1.4}$$

или в проекциях на оси x и y

$$\frac{du}{ds} = -\theta\cos\alpha - \varepsilon_0\sin\alpha, \qquad \frac{dv}{ds} = -\theta\sin\alpha + \varepsilon_0\cos\alpha \tag{1.5}$$

Здесь α — угол, образованный нормалью с осью x, отсчитываемый от оси x. Касательная и нормаль ориентированы друг относительно друга как оси x и y.

Из уравнения (1.5) легко определяется угол поворота θ:

$$\theta = -\left(\frac{du}{ds}\cos\alpha + \frac{dv}{ds}\sin\alpha\right) \tag{1.6}$$

Если L совпадает с окружностью, то $\alpha = \vartheta$, и правая часть равенства (1.2) равняется $R\theta$, левая же равняется v_ϑ. Таким образом, на дугах контакта Γ_1 и Γ_2 шайбы с пластинкой тангенциальное смещение точек контура пластинки

$$v_\vartheta = R\theta \tag{1.7}$$

Так как $v_r = 0$ на дугах Γ_1 и Γ_2, то

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{R}\frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} + \frac{v_r}{R} = \frac{1}{R}\frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} \tag{1.8}$$

Из равенства (1.7) имеем

$$\frac{d\theta}{d\vartheta} = \frac{1}{R}\frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r) \tag{1.9}$$

где σ_ϑ и σ_r — компоненты напряжения в полярной системе координат, а E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Угол поворота θ может быть выражен через функции комплексного переменного $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, причем в данном случае

$$\theta = -\frac{(1+\varkappa)\,i}{4\mu}\left[\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}\right] \tag{1.10}$$

Подставим в (1.9) значение угла θ из (1.10); после выполнения дифференцирования равенство (1.9) преобразуется к виду

$$\frac{\varkappa+1}{4\mu}\, t_0\left[\Phi'(t_0) + \Phi'\left(\frac{R^2}{t_0^2}\right)\frac{R^2}{t_0^2}\right] = \frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r) \tag{1.11}$$

Напишем теперь условия для напряжений. Касательные напряжения $\tau_{r\vartheta}$ на всей окружности согласно предположению равны нулю, поэтому[1]

$$\frac{t_0^2}{R^2}\left[\frac{R^2}{t_0}\Phi'(t_0) + \Psi(t_0)\right] - \frac{R^2}{t_0^2}\left[t_0\overline{\Phi'(t_0)} + \overline{\Psi(t_0)}\right] = 0 \tag{1.12}$$

функции Φ и Ψ при наших условиях на бесконечности имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{P+Q}{2} + \Phi_0(z), \qquad \Phi_0(z) = \sum_1^\infty a_\nu z^{-\nu} \\ \Psi(z) &= -\frac{P-Q}{2} + \Psi_0(z), \qquad \Psi_0(z) = \sum_1^\infty b_\nu z^{-\nu} \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ — голоморфные функции в области пластинки, включая и бесконечно удаленную точку.

Из (1.12) непосредственно получаем, что

$$-\frac{z^2}{R^2}\left[\frac{R^2}{z}\Phi_0'(z)+\Psi_0(z)\right]=\frac{P-Q}{2}\frac{R^2}{z^2}-\frac{b_1}{R^2} \tag{1.14}$$

где b_1 — коэффициент функции $\Psi_0(z)$.

Нормальные напряжения определяются формулой

$$\Phi(t_0)+\overline{\Phi(t_0)}-\frac{t_0^2}{R^2}\left[\frac{R^2}{t_0}\Phi'(t_0)+\Psi(t_0)\right]=\begin{cases}\sigma_r & \text{на } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_3\\ 0 & \text{на } \Gamma_2 \text{ и } \Gamma_4\end{cases} \tag{1.15}$$

На основании (1.13) и (1.14) выражение для σ_r упростится; получим

$$\Phi_0(t_0)+\overline{\Phi_0(t_0)}+\frac{P+Q}{2}+\frac{P-Q}{2}\left(\frac{t_0^2}{R^2}+\frac{R^2}{t_0^2}\right)-\frac{b_1}{R^2}=\begin{cases}\sigma_r & \text{на } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_3\\ 0 & \text{на } \Gamma_3 \text{ и } \Gamma_4\end{cases} \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует, во-первых, что на дугах Γ_1, Γ_3

$$\sigma_\vartheta=\sigma_r-(P+Q)\left(\frac{t_0^2}{R^2}+\frac{R^2}{t_0^2}\right)+\frac{2b_1}{R^2} \tag{1.17}$$

и, во-вторых, что

$$\begin{gathered}-\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r dt}{t-z}+\frac{P-Q}{2}\frac{R^2}{z^2}\\ \overline{\Phi}_0\left(\frac{R^2}{z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r dt}{t-z}+\frac{b_1}{R^2}-\frac{P+Q}{2}-\frac{P-Q}{2}\frac{z^2}{R^2}\end{gathered} \tag{1.18}$$

Дифференцируя последние два равенства по z и пользуясь тождеством

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r dt}{(t-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r' dt}{t-z}$$

которое легко проверить интегрированием по частям, так как σ_r на концах дуг Γ_1 и Γ_3 обращается в нуль, имеем

$$\begin{gathered}\Phi_0'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r' dt}{t-z}+(P-Q)\frac{R^2}{z^3}\\ \overline{\Phi_0'}\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{R^2}{z^2}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r' dt}{t-z}+(P-Q)\frac{z}{R^2}\end{gathered} \tag{1.19}$$

Предельные значения этих функций на контуре будут

$$\begin{gathered}\Phi_0'(t_0)=\frac{\sigma_r'}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r' dt}{t-t_0}+(P-Q)\frac{R^2}{t_0^3}\\ \overline{\Phi_0'}\left(\frac{R^2}{t_0}\right)\frac{R^2}{t_0^2}=-\frac{\sigma_r'}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r' dt}{t-t_0}+(P-Q)\frac{t_0}{R^2}\end{gathered} \tag{1.20}$$

Подставим предельные выражения функций и выражение σ_ϑ из (1.17) в формулу (1.11), в результате получим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r' dt}{t-t_0}=\frac{(\nu-1)4\mu}{(\varkappa+1)E}\frac{\sigma_r}{t_0}+\frac{(P-Q)[4\mu+E(\varkappa+1)]}{E(\varkappa+1)}\left(\frac{R^2}{t_0^3}+\frac{t_0}{R^2}\right)-\frac{8\mu b_1}{R^2E(\varkappa+1)t_0} \tag{1.21}$$

Полученное выражение и есть интегральное уравнение задачи, оно напоминает известное уравнение Прандтля в аэродинамике.

§ 2. На жесткую шайбу действует сила, приложенная к центру. Пусть на вложенную жесткую шайбу теперь действует сила, приложенная к центру шайбы и направленная вдоль оси x, и, кроме того, будем считать, что в пластинке напряжения на бесконечности отсутствуют.

В этой задаче главный вектор напряжений, приложенный к отверстию пластинки, отличен от нуля: $X = P$, $Y = 0$, где X и Y — компоненты главного вектора по осям координат, а следовательно, функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, характеризующие напряженное состояние, имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + \Phi_0(z) \\ \Psi(z) &= \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + \Psi_0(z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Обозначим через Γ_1 дугу контакта шайбы с пластинкой; тогда напряжения σ_r будут отличны от нуля только по Γ_1; на остальной части Γ_2 напряжения σ_r равны нулю, касательное же напряжение примем, как и в первом примере, равным нулю на всей окружности.

Из формулы (1.12) следует, что для данного случая

$$-\frac{z^2}{R^2}\left[\frac{R^2}{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right] = -\frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) - \frac{b_1}{R^2} \tag{2.2}$$

Поэтому напряжение σ_r по всему контуру отверстия будет определяться равенством

$$\Phi(t_0) + \overline{\Phi(t_0)} - \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\left(\frac{t_0}{R^2} + \frac{1}{t_0}\right) - \frac{b_1}{R^2} = \begin{cases} \sigma_r & \text{на } \Gamma_1 \\ 0 & \text{на } \Gamma_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r\,dt}{t-z} + \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} \\ \overline{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r\,dt}{t-z} + \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{z}{R^2} + \frac{b_1}{R^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из последних формул аналогично (1.19) имеем

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\,dt}{t-z} - \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z^2} \\ \overline{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{R^2}{z^2} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\,dt}{t-z} - \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{R^2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Предельные значения же их будут

$$\begin{aligned} \Phi'(t_0) &= -\frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{t_0^2} + \frac{\sigma_r'}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\,dt}{t-t_0} \\ \overline{\Phi}'\left(\frac{R^2}{t_0}\right)\frac{R^2}{t_0^2} &= -\frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{R^2} - \frac{\sigma_r}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\,dt}{t-t_0} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Из формулы (2.3) определится также и нормальное напряжение σ_ϑ на Γ_1:

$$\sigma_\vartheta = \sigma_r + \frac{\varkappa P}{\pi(1+\varkappa)}\left(\frac{t_0}{R^2} + \frac{1}{t_0}\right) + \frac{2b_1}{R^2} \tag{2.7}$$

Займемся теперь установлением граничных условий для смещений на Γ_1.

Уравнения контура шайбы до и после деформации пластинки соответственно будут

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad (x-\Delta)^2 + y^2 = R^2 \tag{2.8}$$

Здесь Δ обозначает смещения центра шайбы в результате деформации. Обозначим через u и v проекции вектора смещения точек контура отверстия, тогда уравнение контура отверстия после деформации можно представить в параметрической форме так:

$$\xi = x + u, \qquad \eta = y + v \tag{2.9}$$

Координаты ξ и η на Γ_1 должны удовлетворять второму уравнению (2.8).

Если вместо xy в (2.8) подставим ξ и η из (2.9) и отбросим величины второго порядка малости по сравнению с u и v, то получим

$$xy + yv = x\Delta$$

или

$$u\cos\vartheta + v\sin\vartheta = \Delta\cos\vartheta = v_r \tag{2.10}$$

Дифференцируя (2.10) по ϑ и замечая, что $v\cos\vartheta - u\sin\vartheta = v_\vartheta$, а также согласно (1.6)

$$\frac{du}{d\vartheta}\cos\vartheta + \frac{dv}{d\vartheta}\sin\vartheta = -R\theta \tag{2.11}$$

получим

$$-R\theta + v_\vartheta = -\Delta\sin\vartheta \tag{2.12}$$

На контуре соприкосновения относительное удлинение $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$, пользуясь (2.10), можно представить в виде

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{R}\frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} + \frac{\Delta\cos\vartheta}{R} = \frac{1}{R}\frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} + \frac{v_r}{R} \tag{2.13}$$

Подставляя сюда $dv_\vartheta / d\vartheta$ из (2.12), получим

$$\frac{d\theta}{d\vartheta} = \varepsilon_{\vartheta\vartheta} \tag{2.14}$$

Таким образом, и в этом случае справедливо соотношение (1.9), а следовательно, и формула (1.11).

Подставив в (1.11) предельные выражения (2.6), после преобразований найдем интегральное уравнение задачи:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\,dt}{t-t_0} = \frac{(\nu-1)4\mu}{(\varkappa+1)E}\frac{1}{t_0}\sigma_r - \frac{\varkappa P\left[(\varkappa+1)E + 8\mu\right]}{2\pi E(1+\varkappa)^2}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{t_0^2}\right) - \frac{8b_1\mu}{R^2E(\varkappa+1)t_0} \tag{2.15}$$

§ 3. Растяжение бесконечной пластинки, в круглое отверстие которой вложена упругая шайба. Пусть в круглое отверстие изотропной ненапряженной упругой пластинки вставлена не абсолютно жесткая, а упругая того же диаметра круглая шайба.

Напряженное состояние на бесконечности определяем так же, как и в задаче § 1. Пластинка будет соприкасаться с шайбой по некоторым кривым, которые мы примем за некоторые дуги окружности Γ_1 и Γ_3. В этой задаче функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, а также напряжения σ_r и σ_ϑ на границе пластинки определяются формулами (1.13) (1.16) и (1.17).

Так как трение не учитывается, то условия на дугах соприкосновения шайбы с пластинкой имеют вид:

$$v_r = v_{1r}, \qquad \sigma_r = \sigma_{1r} \quad \text{на } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_3 \tag{3.1}$$

Здесь и в дальнейшем все величины, относящиеся к шайбе, компоненты смещений, упругие постоянные и т. д. обозначаются с индексом 1.

Нетрудно видеть, что первое из условий (3.1) эквивалентно условию

$$u\cos\vartheta + v\sin\vartheta = u_1\cos\vartheta + v_1\sin\vartheta \tag{3.2}$$

Дифференцируя это равенство по ϑ и учитывая (1.11), имеем

$$-R\theta + v_\vartheta = -R\theta_1 + v_{1\vartheta} \tag{3.3}$$

Так как

$$\frac{dv_{1\vartheta}}{d\vartheta} = R\varepsilon_{1,\vartheta\vartheta} - v_{1r}, \qquad \frac{dv_\vartheta}{d\vartheta} = R\varepsilon_{\vartheta\vartheta} - v_r$$

то, продифференцируя равенство (3.3) и принимая во внимание условие (3.1), имеем

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta} - \varepsilon_{1,\vartheta\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}(\theta - \theta_1) \tag{3.4}$$

Подставим в (3.4) вместо $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$ и $\varepsilon_{1,\vartheta\vartheta}$ их значения через напряжения, а вместо θ и θ_1 их выражения через функции Φ и Φ_1 и, выполнив в правой части дифференцирование, преобразуем уравнение (3.4) к виду

$$\frac{1}{E}(\sigma_\vartheta - \nu\sigma_r) - \frac{1}{E_1}(\sigma_{1\vartheta} - \nu\sigma_{1r}) =$$

$$= \frac{t_0(\varkappa+1)}{4\mu}\left[\Phi_0'(t_0) + \overline{\Phi}_0'\left(\frac{R^2}{t_0}\right)\frac{R^2}{t_0^2}\right] - \frac{t_0(\varkappa_1+1)}{4\mu_1}\left[\Phi_1'(t_0) + \overline{\Phi}'\left(\frac{R^2}{t_0}\right)\frac{R^2}{t_0^2}\right] \tag{3.5}$$

Функции Φ_1 и Ψ_1, характеризующие напряженное состояние шайбы, являются голоморфными функциями в области шайбы, а следовательно, они представимы рядами:

$$\Phi_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu' z^\nu, \qquad \Psi_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu' z^\nu \tag{3.6}$$

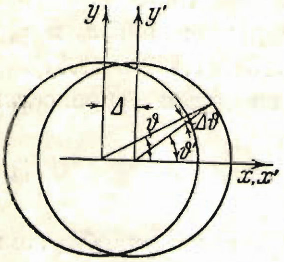
Вследствие равенства нулю касательных напряжений на границе шайбы равняется нулю следующее выражение:

$$\frac{t_0^2}{R^2}\left\{\frac{R^2}{t_0}\Phi_1'(t_0) + \Psi_1(t_0)\right\} - \frac{R^2}{t_0^2}\left\{t_0\overline{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{t_0}\right) + \Psi_1\left(\frac{R^2}{t_0}\right)\right\} = 0$$

из которого следует равенство нулю выражения

$$\frac{z^2}{R^2}\left\{\frac{R^2}{z}\Phi_1'(z)+\Psi_1(z)\right\}=0 \tag{3.7}$$

На основании последнего равенства напряжение σ_r по контуру шайбы определяется формулой



Фиг. 1

$$\Phi_1(t_0)+\overline{\Phi_1(t_0)}=\begin{cases}\sigma_r & \text{на } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_3\\ 0 & \text{на } \Gamma_2 \text{ и } \Gamma_4\end{cases} \tag{3.8}$$

На основании этой формулы

$$\sigma_{1\vartheta}=\sigma_{1r} \quad \text{на } \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_3 \tag{3.9}$$

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_{1r}\,dt}{t-z},$$

$$\overline{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z}\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_{1r}\,dt}{t-z} \tag{3.10}$$

Дифференцируя равенство (3.10) по z, получим

$$\Phi_1'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_{1r}'\,dt}{t-z}, \qquad \overline{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{z}\right)\frac{R^2}{z^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_{1r}'\,dt}{t-z} \tag{3.11}$$

Из равенства (3.11) по формулам Ю. В. Сохоцкого [4] — Племеля имеем

$$\begin{aligned}\Phi_1'(t_0)&=\frac{\sigma_{1r}}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_{1r}'\,dt}{t-t_0}\\ \overline{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{t_0}\right)\frac{R^2}{t_0^2}&=-\frac{\sigma_{1r}}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_{1r}'\,dt}{t-t_0}\end{aligned} \tag{3.12}$$

Для получения интегрального уравнения задачи нужно подставить в (3.5) выражения (1.20) и (3.12) и напряжения σ_ϑ и $\sigma_{1\vartheta}$ согласно (1.17) и (3.9); при этом нужно учесть, что $\sigma_r=\sigma_{1r}$ на Γ_1 и Γ_3. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_3}\frac{\sigma_r'\,dt}{t-t_0}&=\frac{2\left[(E_1\nu-E\nu_1)+E-E_1\right]}{(\varkappa+1)(\nu+1)E_1+(\varkappa_1+1)(\nu_1+1)E}\frac{1}{t_0}\sigma_r+\\ &+\frac{E_1\left[2+(\varkappa+1)(\nu+1)\right](P-Q)}{(\varkappa+1)(\nu+1)E_1+(\varkappa_1+1)(\nu_1+1)E}\left(\frac{t_0}{R^2}+\frac{R^2}{t_0^3}\right)-\frac{c}{t_0}\end{aligned} \tag{3.13}$$

где c — неизвестная постоянная:

$$c=\frac{b_1}{R^2}\frac{4E_1}{(\varkappa+1)(\nu+1)E_1+(\varkappa_1+1)(\nu_1+1)E}$$

Это уравнение отличается от уравнения (1.21) только постоянными коэффициентами.

§ 4. Упругая шайба, вложенная в круговое отверстие бесконечной пластинки, под действием сосредоточенной силы, приложенной в центре. Функции $\Phi_1(z)$ и $\Psi_1(z)$, характеризующие напряженное состояние шайбы в рассматриваемом случае, будут иметь вид:

$$\Phi_1(z) = \frac{P}{2\pi(1+\varkappa_1)}\frac{1}{z} + \Phi_{10}(z), \qquad \Psi_1(z) = -\frac{\varkappa_1 P}{2\pi(1+\varkappa_1)z} + \Psi_{10}(z)$$

где $\Phi_{10}(z)$, $\Psi_{10}(z)$ — голоморфные функции в области, занимаемой шайбой.

Напряженное состояние пластинки на бесконечности примем таким, каким оно принято в задаче § 2, т. е. равным нулю. Ясно, что в этом случае формулы (2.1) — (2.7) справедливы и для данной задачи. Что касается шайбы, то нормальное напряжение σ_{1r} для нее определится формулой

$$\sigma_{1r} = \Phi_1(t_0) + \overline{\Phi_1(t_0)} - \frac{t_0^2}{R^2}\left[\frac{R^2}{t_0}\Phi_1'(t_0) + \Psi_1(t_0)\right] \tag{4.1}$$

Так как касательные напряжения на контуре равны нулю, то

$$\frac{t_0^2}{R^2}\left[\frac{R^2}{t_0}\Phi_{10}'(t_0) + \Psi_{10}\right] + \frac{Pt_0}{2\pi(1+\varkappa_1)}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{\varkappa_1}{R^2}\right) = 0 \tag{4.2}$$

Поэтому напряжения σ_{1r} на всей границе шайбы можно представить следующим образом:

$$\Phi_{10}(t_0) + \overline{\Phi}_{10}\left(\frac{R^2}{t_0}\right) + \frac{P}{\pi(1+\varkappa_1)}\left(\frac{t_0}{R^2} + \frac{1}{t_0}\right) = \begin{cases}\sigma_{1r} & \text{на } \Gamma_1\\ 0 & \text{на } \Gamma_2\end{cases} \tag{4.3}$$

Отсюда имеем

$$\sigma_{1\vartheta} = \sigma_{1r} - \frac{P}{\pi(1+\varkappa_1)}\left(\frac{t_0}{R^2} + \frac{1}{t_0}\right) \tag{4.4}$$

Аналогично, как это делалось и раньше, из (4.3) находим, что

$$\begin{aligned}\Phi_{10}'(t_0) &= \frac{1}{2}\sigma_{1r}' + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_{1r}'\,dt}{t-t_0} - \frac{P}{\pi(1+\varkappa_1)}\frac{1}{R^2}\\ \overline{\Phi}_{10}'\left(\frac{R^2}{t_0}\right)\frac{R^2}{t_0^2} &= -\frac{1}{2}\sigma_{1r} + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_{1r}'\,dt}{t-t_0} - \frac{P}{\pi(1+\varkappa_1)}\frac{1}{t_0^2}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Для получения условий для смещений на границе будем рассуждать следующим образом.

Полное радиальное смещение на дуге контакта равно сумме: 1) радиального смещения контура пластинки $v_{0r} = \Delta\cos\vartheta$, вызываемого смещением шайбы как жесткого тела, и 2) совместным упругим смещением пластинки и шайбы v_{1r}; таким образом,

$$v_r = \Delta\cos\vartheta + v_{1r} \tag{4.6}$$

Из (4.6) непосредственно следует, что

$$u\cos\vartheta + v\sin\vartheta = \Delta\cos\vartheta + u_1'\cos\vartheta' + v_1'\sin\vartheta' \tag{4.7}$$

где u_1' и v_1' — смещения точек контура шайбы по отношению к системе координат x', y', неразрывно связанной с шайбой (фиг. 1). Ясно, что

$$u_1 = u_1' + \Delta, \quad v_1 = v_1', \quad \vartheta' = \vartheta + \Delta\vartheta \tag{4.8}$$

Угол $\Delta\vartheta$ имеет одинаковый порядок малости с u_1 и v_1. Пренебрегая величинами второго порядка малости по сравнению со смещениями и полагая $\cos\Delta\vartheta = 1$, из (4.7) легко получаем

$$u\cos\vartheta + v\sin\vartheta = u_1\cos\vartheta + v_1\sin\vartheta \quad \text{или} \quad v_r = v_{1r} \tag{4.9}$$

Таким образом, с точностью до величин второго порядка жестким смещением шайбы можно пренебрегать. Далее, аналогично, как в § 3, из (4.9) можно получить соотношение (3.5); но в данном случае

$$\begin{gathered}\Phi_1'(t_0) = -\frac{P}{2\pi(1+\varkappa_1)}\frac{1}{t^2} + \Phi_{10}'(t_0)\\ \frac{R^2}{t_0^2}\overline{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{t_0}\right) = -\frac{P}{2\pi(1+\varkappa_1)}\frac{1}{R^2} + \Phi_{10}'\left(\frac{R^2}{t_0}\right)\frac{R^2}{t_0^2}\end{gathered} \tag{4.10}$$

Подстановка этих выражений в (3.5) с учетом (2.6) и (4.5) и выражений (2.7) и (4.4) приводит к интегральному уравнению:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\,dt}{t-t_0} = \frac{2[(\nu-1)E_1-(\nu_1-1)E]}{(\varkappa+1)(\nu+1)E_1+(\varkappa_1+1)(\nu_1+1)E}\frac{\sigma_r}{t_0} - \\ -\frac{(1+\varkappa)(1+\varkappa_1)[3(\nu_1+1)E-\varkappa(\nu+1)E_1]-4[\varkappa(1+\varkappa_1)E_1+(1+\varkappa)E]}{2(1+\varkappa)(1+\varkappa_1)[(\varkappa+1)(\nu+1)E_1+(\varkappa_1+1)(\nu_1+1)E]}\frac{P}{\pi}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{t_0^2}\right) - \\ -\frac{1}{t_0R^2}\frac{4E_1b_1}{[(\varkappa+1)(\nu+1)E_1+(\varkappa_1+1)(\nu_1+1)E]}\end{gathered} \tag{4.11}$$

Если пластинка с вложенной шайбой находится в обобщенном плоском напряженном состоянии, т. е. если $\varkappa = (3-\nu)(1+\nu)$, то коэффициенты интегральных уравнений упрощаются, так как справедливы соотношения:

$$\frac{(\nu-1)4\mu}{(\varkappa+1)E} = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}, \qquad \frac{4\mu+E(\varkappa+1)}{E(\varkappa+1)} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{8\mu}{E(\varkappa+1)} = 1$$

$$(\varkappa+1)(\nu+1) = (\varkappa_1+1)(\nu_1+1) = 4$$

Если, кроме того, материал шайбы и пластинки одинаков, то коэффициент при σ_r обращается в нуль и уравнения (3.13) и (4.13) обращаются в легко разрешимые сингулярные интегральные уравнения.

§ 5. Регуляризация интегральных уравнений рассмотренных задач. Для примера возьмем уравнение (2.14) и запишем его в таком виде:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\,dt}{t-t_0} = \frac{k\sigma_r}{t_0} - f(t_0) \tag{5.1}$$

где

$$k = -\frac{(\nu-1)4\mu}{(\varkappa+1)E} > 0, \qquad f(t_0) = h\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{t_0^2}\right) + \frac{q}{t_0}$$

$$h = \frac{\varkappa P[(1+\varkappa)E+8\mu]}{2\pi(1+\varkappa)^2E}, \qquad g = \frac{8\mu b_1}{R^2(\varkappa+1)E}$$

Будем временно в (5.1) правую часть рассматривать как известную функцию. Применив формулу обращения интеграла типа Коши, получим

$$\sigma_r' = -\frac{1}{\sqrt{(t_0-\alpha)(t_0-\beta)}}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}{t-t_0}\left[f(t)+\frac{k\sigma_r}{t}\right]dt + \frac{c}{\sqrt{(t_0-\alpha)(t_0-\beta)}}$$

Здесь $\alpha = Re^{-i\varphi}$, $\beta = Re^{i\varphi}$ — величины, определяющие концы дуги.

Перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$\sigma_r' = -\frac{1}{\sqrt{(t_0-\alpha)(t_0-\beta)}}\frac{k}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}{t(t-t_0)}\sigma_r\,dt - F(t_0) \tag{5.2}$$

где $F(t_0)$ — известная функция, определяемая формулой

$$F(t_0) = \frac{1}{\sqrt{(t_0-\alpha)(t_0-\beta)}}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sqrt{(t-\alpha))t-\beta)}}{t-t_0}f(t)\,dt + \frac{c}{\sqrt{(t_0-\alpha)(t_0-\beta)}}$$

Поступая далее известным способом [2] и учитывая, что в данном случае интегралы берутся не по отрезку, а по некоторой дуге, будем иметь

$$\sigma_r = A_2 t_0^{k} + B_2 t_0^{-k} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} K_1(t_0, t)\,\sigma_r + \varphi_1(t_0) \tag{5.3}$$

где

$$\varphi_1(t_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{R}^{t_0}\left(\frac{t_0^k}{t_1^k} - \frac{t_1^k}{t_0^k}\right) f(t_1)\,dt_1 - \frac{1}{2}\int\limits_{R}^{t_0}\left(\frac{t_0^k}{t_1^k} + \frac{t_1^k}{t_0^k}\right) F(t_1)\,dt_1$$

$$K_1(t_0, t) = \int\limits_{R}^{t_0}\frac{R(t_1, t)}{\sqrt{(t_1-\alpha)(t_1-\beta)}}\left(\frac{t_0^k}{t_1^k} + \frac{t_1^k}{t_0^k}\right)dt_1 \tag{5.4}$$

$$R(t_0, t) = \left[\frac{k\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}}{t} - \frac{k\sqrt{(t_0-\alpha)(t_0-\beta)}}{t_0}\right]\frac{1}{t-t_0}$$

В коэффициент g функции f входит функционал b_1, выражение для которого определяется из (2.4), положив $z=0$, так что

$$g = \frac{4\mu}{(\varkappa+1)E}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r\,dt}{t}$$

Выделим теперь в (5.4) из интеграла, содержащего функции f и F, члены с коэффициентом g. Для функции f этот коэффициент, если изменить порядок интегрирования, можно представить в виде

$$\frac{2\mu}{(\varkappa+1)E}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\left\{\int\limits_{R}^{t_0}\left(\frac{t_0^k}{t_1^k} - \frac{t_1^k}{t_0^k}\right)\frac{\sigma_r(t)}{tt_1}\,dt_1\right\}dt \tag{5.5}$$

В функции же F член, содержащий коэффициент g, будет следующий:

$$J = \frac{g}{\sqrt{(t_0-\alpha)(t_0-\beta)}}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sqrt{(t-\alpha)(t-\beta)}\,dt}{t(t-t_0)} = \frac{\gamma(\sqrt{\alpha\beta}-t_0)}{t_0\sqrt{(t_0-\alpha)(t_0-\beta)}}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r\,dt}{t}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{R}^{t_0}\left(\frac{t_0^k}{t_1^k} + \frac{t_1^k}{t_0^k}\right) J(t_1)\,dt_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\left\{\int\limits_{R}^{t_0}\left(\frac{t_0^k}{t_1^k} + \frac{t_1^k}{t_0^k}\right)\frac{\gamma(\sqrt{\alpha\beta}-t_1)}{tt_1\sqrt{(t_1-\alpha)(t_1-\beta)}}\right\}\sigma_r\,dt \tag{5.6}$$

Подставляя значения интегралов из (5.5), (5.6) в (5.3), получим

$$\sigma_r = At_0^k + Bt_0^{-k} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} K(t_0, t)\,\sigma_r\,dt + \omega(t_0) \tag{5.7}$$

Здесь

$$K(t_0, t) = \int\limits_{R}^{t_0}\left\{\frac{tt_1 R(t_1, t) + \gamma(\sqrt{\alpha\beta}-t_1)}{tt_1\sqrt{(t_1-\alpha)(t_1-\beta)})}\left(\frac{t_0^k}{t_1^k} + \frac{t_1^k}{t_0^k}\right) - \gamma\left(\frac{t_0^k}{t_1^k} - \frac{t_1^k}{t_0^k}\right)\frac{1}{t_1 t}\right\}dt_1$$

а через $\omega(t_0)$ обозначена известная функция, в выражение которой уже не входит функционал b_1, $\gamma = 4\mu / (\varkappa + 1) E$. Постоянные A и B определяются из условия обращения в нуль σ_r в точках α и β.

Займемся определением постоянной, входящей в выражение σ_r'. Для этой цели используем условие однозначности смещений при обходе по любому замкнутому пути, охватывающему отверстие пластинки. Имеем

$$2\mu [u + iv]_L = [\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}]_L = 0 \tag{5.8}$$

Здесь символ $[\ ]_L$ означает приращение выражения в скобках при обходе контура L против часовой стрелки. Из (2.4) следует, что

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \sigma_r \ln(t - z)\, dt + \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)} \ln(z) \tag{5.9}$$

Из (2.2), пользуясь формулой (2.4), определим $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = \frac{R^2}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\sigma_r'\, dt}{t(t-z)} + \frac{R^2}{2\pi i}\frac{1}{z}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\, dt}{t} + \frac{\varkappa P}{\pi(1+\varkappa)}\frac{R^2}{z^3} + \frac{b_1}{z^2} + \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} \tag{5.10}$$

Из (5.10) следует, что

$$\psi(z) = \int \Psi(z)\, dz + C_1 = -\frac{R^2}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r' \ln(t-z)}{t}\, dt + \frac{R^2}{2\pi i}\ln z \int_{\Gamma_1}\frac{\sigma_r'\, dt}{t} -$$

$$- \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{R^2}{z^2} + \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\ln z - \frac{b_1}{z} + C_1$$

Подсчитаем приращения функций при обходе вдоль замкнутого контура:

$$[\varphi(z)]_L = \int_{\Gamma_1}\sigma_r\, dt + \frac{i\varkappa P}{1+\varkappa}, \quad [\psi(z)]_L = \frac{i\varkappa P}{1+\varkappa}, \quad 2\mu[u+iv]_L = \int_{\Gamma_1}\sigma_r\, dt + iP = 0$$

Отсюда и из (5.8) следует, что постоянная C должна определяться из условия

$$\int_{-\varphi}^{\varphi} \sigma_r \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

Решение интегрального уравнения будет зависеть только от параметра φ. Для определения φ из (5.8) получаем, что

$$R\int_{-\varphi}^{+\varphi}\sigma_r\cos\varphi\, d\varphi = -P$$

В заключение выражаю благодарность Д. И. Шерману за ценные советы, которые я получил при выполнении данной работы.

Поступила 12 XII 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР. 1949.
2. Магнарадзе Л. Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета. Сообщения Академии наук Грузинской ССР. 1942. Т. III. № 6.
3. Шерман Д. И. К уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха. Известия АН СССР, ОТН. 1948. № 5.
4. Сохоцкий Ю. В. Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды. Спб. 1873.