Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ, ОПЕРТОЙ ВДОЛЬ КРАЯ

М. М. Фридман

(Саратов)

В работе устанавливается аналогия между задачей об изгибе тонкой изотропной упругой плиты, опертой вдоль края, и плоской задачей упругого равновесия однородного тела, когда на его границе заданы нормальная составляющая вектора упругих смещений и касательная составляющая внешних усилий. Благодаря этому для решения задачи от изгибе тонкой опертой плиты может быть применен метод решения аналогичной плоской задачи теории упругости. В работе дано решение общей задачи об изгибе тонкой изотропной плиты, опертой вдоль края. Область плиты предполагается конечной и многосвязной. Решение задачи об изгибе тонкой опертой плиты для односвязной области дано в работе [3]; решение, данное в настоящей работе, отлично от указанного решения и, как нам кажется, проще и естественнее.

§ 1. Средняя плоскость плиты принята за плоскость xy; ось Z направлена вертикально вниз. Область плиты S предполагается конечной и многосвязной областью, ограниченной контуром $L = L_0 + L_1 + \cdots + L_m$; при этом $L_0, L_1, \ldots, L_m$ — замкнутые и не имеющие общих точек кривые; кривая L_0 является внешней границей области S. За положительное направление на L_0 выбрано направление против часовой стрелки; на $L_1, L_2, \ldots, L_m$ положительное направление — направление по часовой стрелке. Координаты точек кривых $L_0, L_1, \ldots, L_m$ предполагаются непрерывными функциями дуги s, дифференцируемыми достаточное число раз. Направление внешней нормали к контуру L обозначается через n; α — угол, составленный направлением n с положительным направлением оси x.

Рассмотрим следующую задачу. Тонкая изотропная упругая плита шарнирно оперта вдоль контура L_0; вдоль кривых $L_1, L_2, \ldots, L_m$ плита шарнирно связана с абсолютно жесткими шайбами. Плита изгибается вертикальной нагрузкой q, распределенной вдоль ее верхнего основания, и усилиями, приложенными к абсолютно жестким шайбам. Пусть w — прогиб средней плоскости плиты, M_n — изгибающий момент, H_n — скручивающий момент, N_n — перерезывающая сила, ν — коэффициент Пуассона, D — жесткость плиты. Задача состоит в интегрировании уравнения

$$D \triangle\triangle w = q \tag{1.1}$$

при краевых условиях

$$w = 0, \quad M_n = 0 \quad \text{на } L_0; \qquad w = a_k x + b_k y + c_k, \quad M_n = 0 \quad \text{на } L_k \quad (k=1, \ldots, m)$$

где a_k, b_k, c_k — неизвестные вещественные постоянные. (1.2)

Представим прогиб w в виде суммы

$$w = w_1 + w_2 \tag{1.3}$$

где w_1 — общее решение бигармоничного уравнения, w_2 — частное решение неоднородного уравнения (1.1). Пусть M_{n1}, H_{n1}, N_{n1} и M_{n2}, H_{n2}, N_{n2} — изгибающие и скручивающие моменты и перерезывающие силы, соответствующие функциям w_1 и w_2. Частное решение w_2 уравнения (1.1) предполагается известной функцией. Общее решение w_1 бигармонического уравнения имеет вид:

$$w_1 = \bar{z}\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1(z)} + \chi_1(z) + \overline{\chi_1(z)} \tag{1.4}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$ — функции комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфные в области плиты.

Функции $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$ определяют напряженно-деформированное состояние тонкой изотропной упругой плиты, изгибаемой усилиями, приложенными вдоль ее края, когда на краю заданы прогиб и изгибающий момент. В области S функции $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$ имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{iP_k}{8D}z + \frac{M_k}{8D}\right)\lg(z - z_k) + \varphi(z)\\ \chi_1(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\overline{M}_k}{8D}z + iQ_k\right)\lg(z - z_k) + \chi(z)\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь P_k — главный вектор, $M_k = M_{kx} + iM_{ky}$ — главный момент внешних усилий, приложенных к контуру L_k, причем M_{kx} и M_{ky} — составляющие главного момента по осям x и y; функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ в области S однозначные и голоморфные, Q_k — вещественная постоянная, z_k — произвольная точка внутри L_k. Главный вектор P_k и главный момент M_k внешних усилий, приложенных к контуру L_k, величины известные.

Продифференцировав первое из условий (1.2) по дуге s и воспользовавшись формулами (1.3) — (1.5), запишем краевые условия задачи в виде

$$\begin{aligned}&ie^{i\alpha}\left[\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)\right] - ie^{-i\alpha}\left[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right] +\\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m} Q_k\left(\frac{e^{i\alpha}}{t - z_k} - \frac{e^{-i\alpha}}{\bar{t} - \bar{z}_k}\right) + A = f_1\\ &2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)}\right] + e^{2i\alpha}\left[\bar{t}\varphi''(t) + \psi'(t)\right] + e^{-2i\alpha}\left[t\overline{\varphi''(t)} + \overline{\psi'(t)}\right] +\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} Q_k\left[\frac{e^{2i\alpha}}{(t - z_k)^2} + \frac{e^{-2i\alpha}}{(\bar{t} - \bar{z}_k)^2}\right] = g_1 \qquad \text{на } L\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $\psi(z) = \chi'(z)$; через A обозначена функция, равная нулю на кривой L_0 и принимающая вещественные значения:

$$A_k = \frac{a_k + ib_k}{2}\,ie^{i\alpha} - \frac{a_k - ib_k}{2}\,ie^{-i\alpha} \qquad \text{на } L_k \;\; (k = 1, \ldots, m) \tag{1.7}$$

Функции f_1 и g_1 в (1.6) определяются равенствами

$$f_1 = \frac{1}{8\pi D} \operatorname{Re}\left\{e^{-i\alpha} \sum_{k=1}^{m} \left[2(iP_k t + M_k) \lg|t - z_k| + \frac{iP_k t\bar{t} + M_k \bar{t} - \bar{M}_k t}{\bar{t} - \bar{z}_k}\right]\right\} - \frac{dw_2}{ds}$$

$$g_1 = \frac{1}{8\pi D} \operatorname{Re}\left\{i \sum_{k=1}^{m} \left[2i\,\frac{1+\nu}{1-\nu} P_k \lg(t - z_k) + 2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\frac{iP_k t + M_k}{t - z_k} - \right.\right. \tag{1.8}$$

$$\left.\left. - e^{2i\alpha}\,\frac{-iP_k \bar{t} + \bar{M}_k}{t - z_k} - e^{2i\alpha}\,\frac{iP_k t\bar{t} + M_k \bar{t} - \bar{M}_k t}{2(t - z_k)^2}\right]\right\} + \frac{M_{n2}}{(1-\nu) D}$$

Краевые условия (1.6) задачи об изгибе тонкой изотропной упругой плиты, опертой вдоль края, аналогичны краевым условиям плоской задачи упругого равновесия однородного тела, когда на его границе заданы нормальная составляющая вектора упругих смещений и касательная составляющая внешних усилий [2]. Эта аналогия делает возможным применение к решению общей задачи об изгибе тонкой опертой плиты метода, предложенного Д. И. Шерманом [4] для решения соответствующей плоской задачи теории упругости.

§ 2. Будем искать решение задачи в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\theta(t)\,dt}{t - z}, \qquad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m} \frac{Q_k}{z - z_k} \tag{2.1}$$

где $\theta(t)$ и $\omega(t)$ — неизвестные функции.

Постоянные $a_k + ib_k$ и Q_k определим формулами

$$a_k + ib_k = \int_{L_k} \omega(t)\,ds, \qquad Q_k = \frac{1}{2}\int_{L_k} \left[\omega(t)\,dt + \overline{\omega(t)}\,d\bar{t}\right] \quad (k=1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

Подставим в краевые условия (1.6) предельные значения функций $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, $\psi(z)$ и $\psi'(z)$ на L и значения постоянных $a_k + ib_k$ и Q_k из (2.2). Прибавим к левым частям полученных равенств соответственно предельные значения функций $G_1(z)$ и $G_2(z)$ на контуре L

$$G_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{ie^{i\alpha}\left[\overline{\theta(t)} - \bar{t}\,\theta'(t) - \omega(t)\right] + ie^{-i\alpha}\left[\theta(t) - t\overline{\theta'(t)} - \overline{\omega(t)}\right]\right\}\frac{dt}{t - z}$$

$$G_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\overline{\theta'(t)} - \theta'(t)\right] - e^{2i\alpha}\left[\bar{t}\theta''(t) + \omega'(t)\right] + \right. \tag{2.3}$$

$$\left. + e^{-2i\alpha}\left[t\overline{\theta''(t)} + \overline{\omega'(t)}\right]\right\}\frac{dt}{t - z}$$

Кроме того, к левой части первого равенства прибавим функционалы B и C; к левой части второго — функционал E. Функционал B на кривой L_0 и на кривых L_k принимает вещественные значения:

$$B_0 = \int_L \left[\theta(t)\,\frac{dt}{t^2} + \overline{\theta(t)}\,\frac{d\bar{t}}{\bar{t}^2}\right], \qquad B_k = i\int_{L_k}\left[\frac{\theta(t)\,dt}{(t - z_k)^2} - \frac{\overline{\theta(t)}\,d\bar{t}}{(\bar{t} - \bar{z}_k)^2}\right] \quad (k=1, \ldots, m) \tag{2.4}$$

Функционалы C и E на кривой L_0 равны нулю; на L_k они принимают чисто мнимые значения:

$$iC_k=\int\limits_{L_k}\{ie^{i\alpha}[\overline{\theta(t)}-\bar{t}\theta'(t)-\omega(t)]+ie^{-i\alpha}[\theta(t)-t\overline{\theta'(t)}-\overline{\omega(t)}]\}\,ds=$$

$$=\int\limits_{L_k}[\overline{\omega(t)}\,d\bar{t}-\omega(t)\,dt] \tag{2.5}$$

$$iE_k=\int\limits_{L_k}\left\{2\frac{1+\nu}{1-\nu}[\overline{\theta'(t)}-\theta'(t)]-e^{2i\alpha}[\bar{t}\theta''(t)+\omega'(t)]+e^{-2i\alpha}[t\overline{\theta''(t)}+\overline{\omega'(t)}]\right\}ds=$$

$$=\int\limits_{L_k}\left\{\theta(t)\,d\left[2\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{d\bar{t}}{ds}+\frac{d}{dt}\left(\bar{t}\frac{dt}{ds}\right)\right]-\overline{\theta(t)}\,d\left[2\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{dt}{ds}+\frac{d}{d\bar{t}}\left(t\frac{d\bar{t}}{ds}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\overline{\omega(t)}\,d\frac{d\bar{t}}{ds}-\omega(t)\,d\frac{dt}{ds}\right\}\qquad(k=1,\ldots,m)$$

В результате получим

$$ie^{i\alpha}\overline{\theta(t)}-ie^{-i\alpha}[t\overline{\theta'(t)}+\overline{\omega(t)}]+K_1=f_1$$

$$2\frac{1+\nu}{1-\nu}\overline{\theta'(t)}+e^{-2i\alpha}[t\overline{\theta''(t)}+\overline{\omega'(t)}]+N_1=g_1 \tag{2.6}$$

где

$$K_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\left\{\overline{\theta(t_0)}\left[\frac{ie^{i\alpha_0}-ie^{i\alpha}}{t_0-t}dt_0+d\left(ie^{-i\alpha}t\frac{d}{d\bar{t}_0}\lg\frac{t_0-t}{\bar{t}_0-\bar{t}}-e^{2i\alpha_0}\frac{ie^{-i\alpha_0}t_0-ie^{-i\alpha}t}{t_0-t}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+ie^{i\alpha}d\lg\frac{t_0-t}{\bar{t}_0-\bar{t}}\right]+\theta(t_0)\left(\frac{ie^{-i\alpha_0}-ie^{-i\alpha}}{t_0-t}dt_0+d\frac{ie^{i\alpha_0}\bar{t}_0-ie^{i\alpha}\bar{t}}{t_0-t}\right)-$$

$$\left.-\overline{\omega(t_0)}\left(\frac{ie^{-i\alpha_0}-ie^{-i\alpha}}{t_0-t}dt_0+ie^{-i\alpha}d\lg\frac{t_0-t}{\bar{t}_0-\bar{t}}\right)-\omega(t_0)\frac{ie^{i\alpha_0}-ie^{i\alpha}}{t_0-t}dt_0\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{(1+i)e^{i\alpha}}{t-z_k}-\frac{(1-i)e^{-i\alpha}}{\bar{t}-\bar{z}_k}\right]\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{\omega(t_0)\,dt_0+\overline{\omega(t_0)}\,d\bar{t}_0}{2}+A+B+C \tag{2.7}$$

$$N_1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\left\{\overline{\theta(t_0)}\left[-2\frac{1+\nu}{1-\nu}d\frac{d}{d\bar{t}_0}\lg\frac{t_0-t}{\bar{t}_0-\bar{t}}+\right.\right.$$

$$\left.+d\frac{d}{d\bar{t}_0}\left(e^{-2i\alpha_0}t_0\frac{d}{dt_0}\lg\frac{t_0-t}{\bar{t}_0-\bar{t}}+\frac{e^{-2i\alpha_0}t_0-e^{-2i\alpha}t}{\bar{t}_0-\bar{t}}\right)\right]-$$

$$-\theta(t_0)\,d\frac{d}{dt_0}\frac{e^{2i\alpha_0}\bar{t}_0-e^{2i\alpha}\bar{t}}{t_0-t}-\overline{\omega(t_0)}\,d\left(e^{-2i\alpha_0}\frac{d}{d\bar{t}_0}\lg\frac{t_0-t}{\bar{t}_0-\bar{t}}+\frac{e^{-2i\alpha_0}-e^{-2i\alpha}}{\bar{t}_0-\bar{t}}\right)+$$

$$\left.+\omega(t_0)\,d\frac{e^{2i\alpha_0}-e^{2i\alpha}}{t_0-t}\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{(1+i)e^{2i\alpha}}{(t-z_k)^2}+\frac{(1-i)e^{-2i\alpha}}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^2}\right]\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k}\frac{\omega(t_0)\,dt_0+\overline{\omega(t_0)}\,d\bar{t}_0}{2}+E$$

Умножим первое равенство (2.6) на $-ie^{i\alpha}$ и, продифференцировав вдоль каждой кривой $L_0, L_1, \ldots, L_m$ по $\bar{t}$, сложим со вторым, умноженным на $e^{2i\alpha}$. Рассматривая полученное таким образом равенство как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\overline{\theta(t)}$, найдем его решение, непрерывное вдоль каждой кривой $L_0, L_1, \ldots, L_m$. Это решение определяется равенством

$$\overline{\theta(t)} + K = f \tag{2.8}$$

где

$$K = \frac{1-\nu}{4} e^{-i\frac{1-\nu}{4}\alpha}\left[\frac{e^{\mp i(1-\nu)\pi}}{1-e^{\mp i(1-\nu)\pi}}\int\limits_{L_k} K_2 d\bar{t} + \int^{\bar{t}} K_2 d\bar{t}\right]$$

$$K_2 = e^{-i\frac{3+\nu}{2}\alpha}\left(e^{2i\alpha}N_1 - \frac{die^{i\alpha}K_1}{d\bar{t}}\right) \tag{2.9}$$

$$f = \frac{1-\nu}{4} e^{-i\frac{1-\nu}{4}\alpha}\left[\frac{e^{\mp i(1-\nu)\pi}}{1-e^{\mp i(1-\nu)\pi}}\int\limits_{L_k} f_2 d\bar{t} + \int^{\bar{t}} f_2 d\bar{t}\right]$$

$$f_2 = e^{-i\frac{3+\nu}{2}\alpha}\left(e^{2i\alpha}g_1 - \frac{die^{i\alpha}f_1}{d\bar{t}}\right) \tag{2.10}$$

Знак минус соответствует кривой L_0, знак плюс — кривым L_k $(k=1, \ldots, m)$. Подставив функцию $\overline{\theta(t)}$ из (2.8) в первое равенство (2.6), получим

$$\overline{\omega(t)} + N = g \tag{2.11}$$

где

$$N = e^{2i\alpha}K - t\frac{dK}{d\bar{t}} + ie^{i\alpha}K_1, \qquad g = e^{2i\alpha}f - t\frac{df}{d\bar{t}} + ie^{i\alpha}f_1 \tag{2.12}$$

Собирая соотношения (2.8) и (2.11) вместе, для определения $\theta(t)$ и $\omega(t)$ получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\overline{\theta(t)} + K = f, \qquad \overline{\omega(t)} + N = g \tag{2.13}$$

§ 3. Допустим, что функции $\theta(t)$ и $\omega(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (2.13). Тогда функции (2.1) на контуре L удовлетворяют условиям

$$ie^{i\alpha}\overline{[\varphi(t) + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)]} - ie^{-i\alpha}[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m} Q_k\left(\frac{e^{i\alpha}}{t-z_k} - \frac{e^{-i\alpha}}{\bar{t}-\bar{z}_k}\right) + G_1(t) + A + B + C = f_1$$

на L (3.1)

$$2\frac{1+\nu}{1-\nu}[\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)}] + e^{2i\alpha}[\bar{t}\varphi''(t) + \psi'(t)] + e^{-2i\alpha}[t\overline{\varphi''(t)} + \overline{\psi'(t)}] +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} Q_k\left[\frac{e^{2i\alpha}}{(t-z_k)^2} + \frac{e^{-2i\alpha}}{(\bar{t}-\bar{z}_k)^2}\right] + G_2(t) + E = g_1$$

Представим функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$ в виде

$$G_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y), \qquad G_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$$

Отделяя в (3.1) вещественные и мнимые части, получим

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0 \quad \text{на } L_0, \qquad v_1 + C_k = 0, \quad v_2 + E_k = 0 \quad \text{на } L_k \quad (k=1, \ldots, m).$$

Отсюда следует, что на L нормальная производная функций u_1 и u_2 равна нулю. В области S функции u_1 и u_2 равны постоянным H_1 и H_2; функции v_1 и v_2 равны нулю. Следовательно, функционалы C и E равны нулю. Заметим, что обращение в нуль функционала C влечет за собою однозначность функции $\chi(z)$ в области S.

Функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$, определяемые формулами (2.3), в области S равны вещественным постоянным H_1 и H_2. Вследствие этого функции

$$\delta_1(t) = ie^{i\alpha}\,[\overline{\theta(t)} - \bar{t}\theta'(t) - \omega(t)] + ie^{-i\alpha}\,[\theta(t) - t\overline{\theta'(t)} - \overline{\omega(t)}] - H_1$$

$$\delta_2(t) = 2\frac{1+\nu}{1-\nu}\,[\overline{\theta'(t)} - \theta'(t)] - e^{2i\alpha}\,[\bar{t}\theta''(t) + \omega'(t)] + e^{-2i\alpha}\,[\overline{t\,\theta''(t)} + \overline{\omega'(t)}] - H_2$$

представляют собой предельные значения функций $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$, голоморфных и однозначных в областях $S_0, S_1, \ldots, S_m$, включая бесконечно удаленную точку, где они равны нулю. S_0 — бесконечная, S_k — конечная области, ограниченные соответственно кривыми L_0 и L_k.

На кривой L_0 вещественные части функций $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ равны H_1 и H_2. В области S_0 функции $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ равны постоянным. Воспользовавшись условиями на бесконечности заключаем, что функции $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ равны нулю в замкнутой области $S_0 + L_0$; при этом $H_1 = 0$, $H_2 = 0$. Следовательно, в области S функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$ равны нулю. Кроме того, равны нулю на кривой L_0 функции $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$.

На контуре L_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ вещественные части функций $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ равны нулю. В области S_k функции $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ равны чисто мнимым постоянным $i\Delta_{1k}$ и $i\Delta_{2k}$. Отсюда следует

$$\delta_1(t) = i\Delta_{1k}, \qquad \delta_2(t) = i\Delta_{2k} \qquad \text{на } L_k$$

Умножим эти равенства на ds и проинтегрируем вдоль замкнутой кривой L_k. Функционалы C и E равны нулю. Отсюда заключаем, что $\Delta_{1k} = \Delta_{2k} = 0$.

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &ie^{i\alpha}\,[\overline{\theta(t)} - \bar{t}\theta'(t) - \omega(t)] + ie^{-i\alpha}\,[\theta(t) - t\overline{\theta'(t)} - \overline{\omega(t)}] = 0 \\ &2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,[\overline{\theta'(t)} - \theta'(t)] - e^{2i\alpha}\,[\bar{t}\theta''(t) + \omega'(t)] + e^{-2i\alpha}\,[\overline{t\theta''(t)} + \overline{\omega'(t)}] = 0 \end{aligned}\right\} \text{на } L \tag{3.2}$$

Запишем теперь первое из равенств (3.1) в виде

$$\frac{dw}{ds} + B_0 = 0 \quad \text{на } L_0, \qquad \frac{dw}{ds} + B_k = a_k\frac{dx}{ds} + b_k\frac{dy}{ds} \quad \text{на } L_k \ (k=1, \ldots m)$$

Умножив эти равенства на ds и проинтегрировав соответственно по замкнутым кривым $L_0, L_1, \ldots, L_m$, получим

$$B_0 = 0, \qquad B_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots m) \tag{3.3}$$

Таким образом, мы доказали, что если $\theta(t)$ и $\omega(t)$ являются решением системы интегральных уравнений (2.13), то функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют краевым условиям (1.6).

Кроме того, функции $\theta(t)$ и $\omega(t)$ на контуре L удовлетворяют условиям (3.2) и обращают в нуль функционал B. Отсюда следует, что функция w удовлетворяет краевым условиям (1.2). Вещественная постоянная функции $\chi(z)$ выбрана так, чтобы вдоль кривой L_0 функция w обращалась в нуль.

Докажем разрешимость системы интегральных уравнений (2.13). Для этого рассмотрим соответствующую систему однородных интегральных уравнений и допустим, что функции $\theta(t)$ и $\omega(t)$ являются ее решением.

Для рассматриваемого случая функции $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$ имеют вид:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z), \qquad \chi_1(z) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} Q_k \lg(z - z_k) + \chi(z) \tag{3.4}$$

и являются решением задачи об изгибе плиты усилиями, приложенными вдоль края, когда заданные по краю прогиб и изгибающий момент равны

$$w_1 = 0,\ M_{n1} = 0 \ \text{на}\ L_0, \qquad w_1 = a_k x + b_k y + c_k,\ M_{n1} = 0 \ \text{на}\ L_k \quad (k=1, \ldots, m) \tag{3.5}$$

Обратимся теперь к формуле

$$\int_L \left(w_1 N_{n1} - \frac{\partial w_1}{\partial s} H_{n1} - \frac{\partial w_1}{\partial n} M_{n1} \right) ds =$$

$$= 8D \iint_S \{2(1+\nu)[\operatorname{Re}\varphi_1'(z)]^2 + (1-\nu)\,|\,\bar{z}\varphi_1''(z) + \chi_1''(z)\,|^2\}\,dx\,dy \tag{3.6}$$

На контуре L прогиб и изгибающий момент равны (3.5). Функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_1'(z)$ и $\chi_1'(z)$ — однозначны в замкнутой области $S+L$. Следовательно, интеграл по контуру L равен нулю. В области S функции $\varphi_1(z)$ и $\chi_1(z)$ равны

$$\varphi_1(z) = i\varepsilon z + \beta, \qquad \chi_1(z) = -\bar{\beta} z + i\gamma \tag{3.7}$$

где ε и γ — вещественные, β — комплексная постоянные. Отсюда следует

$$\varepsilon = 0, \qquad a_k + i b_k = 0, \qquad Q_k = 0 \qquad (k=1, \ldots, m) \tag{3.8}$$

Сравнивая далее (3.4), (3.7) и (2.1), заключаем, что функции

$$\varphi_0(t) = i[\theta(t) - \beta], \qquad \psi_0(t) = i[\omega(t) + \bar{\beta}]$$

являются предельными значениями функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, голоморфных и однозначных в областях $S_0, S_1, \ldots, S_m$, включая бесконечно удаленную точку, где они равны нулю.

Рассмотрим значения функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ в области S_0. На кривой L_0 функции $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$ удовлетворяют условиям

$$ie^{i\alpha}\,[\overline{\varphi_0(t)} + \bar{t}\varphi_0'(t) + \psi_0(t)] - ie^{-i\alpha}\,[\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)}] = 2i\bar{\beta}ie^{i\alpha} + 2i\beta ie^{-i\alpha}$$

$$2\frac{1+\nu}{1-\nu}[\varphi_0'(t) + \overline{\varphi_0'(t)}] + e^{2i\alpha}[\bar{t}\varphi_0''(t) + \psi_0'(t)] + e^{-2i\alpha}[\overline{t\varphi_0''(t)} + \overline{\psi_0'(t)}] = 0$$

Следовательно, функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ являются решением задачи об изгибе бесконечной плиты усилиями, приложенными вдоль края, когда заданные на краю прогиб и изгибающий момент равны

$$w_0 = 2i\bar{\beta}t - 2i\beta\bar{t} + \gamma', \qquad M_{n0} = 0 \quad \text{на } L_0$$

Изгибающие и скручивающий моменты и перерезывающие силы на бесконечности равны нулю.

Применим формулу (3.6) к области S_0, ограниченной контуром L_0. Используя значения прогиба и изгибающего момента на L_0, однозначность функций $\varphi_0(z)$, $\varphi_0'(z)$ и $\psi_0(z)$ и условия на бесконечности, найдем, что в области S_0 функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ равны нулю. Следовательно,

$$\theta(t) = 0, \qquad \omega(t) = 0 \qquad \text{на } L_0$$

Рассмотрим далее значения функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ в области S_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Краевые условия для функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ имеют вид:

$$ie^{i\alpha}\,\overline{[\varphi_0(t) + \bar{t}\varphi_0'(t) + \psi_0(t)]} - ie^{-i\alpha}[\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)}] = 0 \qquad \text{на } L_k$$

$$2\frac{1+\nu}{1-\nu}[\varphi_0'(t) + \overline{\varphi_0'(t)}] + e^{2i\alpha}[\bar{t}\varphi_0''(t) + \psi_0'(t)] + e^{-2i\alpha}[t\overline{\varphi_0''(t)} + \overline{\psi_0'(t)}] = 0$$

В области S_k функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ равны

$$\varphi_0(z) = i\varepsilon_k z + \beta_k, \qquad \psi_0(z) = -\bar{\beta}_k$$

где ε_k — вещественная, β_k — комплексная постоянные. Вещественная постоянная ε_k равна нулю, так как значение мнимой части функции $\varphi_0'(z)$ в точке z_k равно нулю. Отсюда следует

$$\theta(t) = -i\beta_k, \qquad \omega(t) = i\bar{\beta}_k \qquad \text{на } L_k$$

Приняв во внимание (3.8), получим

$$\theta(t) = 0, \qquad \omega(t) = 0 \qquad \text{на } L_k \ (k=1, \ldots, m)$$

Таким образом, мы доказали, что соответствующая однородная система интегральных уравнений не имеет решений, отличных от нуля, и, следовательно, система интегральных уравнений (2.13) всегда разрешима.

Поступила 20 XII 1951

Саратовский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 2.

2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР. 1949. § 128.

3. Халилов З. И. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 4.

4. Шерман Д. И. Об одной смешанной задаче теории упругости. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 6.