Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

К ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Н. А. Алумяэ

(Таллин)

Наиболее существенные результаты по решению нелинейных задач осесимметричной деформации оболочек вращения получены в области гибких пологих оболочек. Сюда относятся главным образом результаты Д. Ю. Панова [1, 2] и В. И. Феодосьева [3, 4]. При этом В. И. Феодосьев с успехом применял для решения конкретных задач вариационный метод Папковича, состоящий в том, что уравнение совместности деформации основной системы дифференциальных уравнений интегрируется точно, а уравнение равновесия — методом Галеркина.

Применение же метода Папковича в случае непологих оболочек, вообще говоря, затруднительно, и поэтому приходится методом Галеркина приближенно интегрировать также уравнение совместности деформации.

Как известно, метод Галеркина предполагает, что функции, аппроксимирующие решение, удовлетворяют всем краевым условиям, в том числе и геометрическим. Однако поскольку при приближенном интегрировании уравнения совместности деформации не существует однозначно определенного поля перемещений, постольку не могут быть удовлетворены геометрические краевые условия.

В настоящей работе рассматривается приведение к вариационной задаче основной системы дифференциальных уравнений осесимметричной деформации оболочек вращения при конечных перемещениях. Далее этой вариационной формуле придается вид обобщенных вариационных уравнений метода Галеркина, откуда непосредственно следуют условия, выполнение которых позволяет свести интегрирование основной системы нелинейных дифференциальных уравнений к вариационным уравнениям метода Галеркина в своем обычном виде.

В первых двух разделах излагается общая теория, в третьем же разделе — приложение полученных результатов к исследованию геометрически нелинейных задач. За некоторые ценные указания автор обязан В. В. Новожилову.

1. Уравнения осесимметричной деформации оболочек вращения [1]. Обозначим через s лонгальную координату меридиана срединной поверхности недеформированной оболочки, через β — угол долготы меридиана. Пусть $\mathbf{t}_s$ и $\mathbf{t}_\beta$ будут единичные касательные векторы к меридиану и параллели, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали. Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, \beta)$ — радиус-вектор точки недеформированной срединной поверхности и ρ — расстояние точки от оси оболочки z, то

$$\mathbf{t}_s = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \qquad \mathbf{t}_\beta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\rho \partial \beta}, \qquad \mathbf{n} = \mathbf{t}_s \times \mathbf{t}_\beta \tag{1.1}$$

Соответствующие единичные векторы деформированной срединной поверхности обозначим через $\mathbf{t}_s^*$, $\mathbf{t}_\beta^*$, $\mathbf{n}^*$.

---

[1] Эти уравнения можно найти в ряде работ, например [3, 5]. Здесь они приводятся во избежание ссылок.

Предполагая, что меридиан задан в параметрической форме, $\rho = \rho(s)$, $z = z(s)$, введем в рассмотрение угол θ формулами

$$d\rho = ds\cos\theta, \qquad dz = ds\sin\theta \tag{1.2}$$

очевидно, что θ — угол между положительными направлениями оси ρ и касательной к меридиану, причем θ отсчитывается от оси ρ в сторону оси z.

Деривационные формулы из теории поверхностей в данном случае дают

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{t}_s}{\partial s} = \theta^{\cdot}\mathbf{n}, \qquad \frac{\partial \mathbf{t}_\beta}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -\theta^{\cdot}\mathbf{t}_s \\ \frac{\partial \mathbf{t}_s}{\partial \beta} = \cos\theta\mathbf{t}_\beta, \qquad \frac{\partial \mathbf{t}_\beta}{\partial \beta} = -\cos\theta\mathbf{t}_s + \sin\theta\mathbf{n}, \qquad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} = -\sin\theta\mathbf{t}_\beta\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем точкой обозначено дифференцирование по s.

При деформации оболочки касательный вектор к меридиану поворачивается на некоторый угол ϑ, оставаясь все же в плоскости $(\mathbf{t}_s, \mathbf{n})$. Положительное направление ϑ следует непосредственно из формул

$$\mathbf{t}_s^* = \cos\vartheta\mathbf{t}_s + \sin\vartheta\mathbf{n}, \qquad \mathbf{t}_\beta^* = \mathbf{t}_\beta, \qquad \mathbf{n}^* = -\sin\vartheta\mathbf{t}_s + \cos\vartheta\,\mathbf{n} \tag{1.4}$$

Установим деривационные формулы для векторов $\mathbf{t}_s^*$, $\mathbf{t}_\beta^*$. Пусть

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{t}_s^*}{\partial s} = (\theta^{\cdot} - \varkappa_s)\,\mathbf{n}^*, \qquad \frac{\partial \mathbf{t}_s^*}{\partial \beta} = (\cos\theta - \rho\zeta)\,\mathbf{t}_\beta^* \\ \frac{\partial \mathbf{t}_\beta^*}{\partial \beta} = (\sin\theta - \rho\varkappa_\beta)\,\mathbf{n}^* - (\cos\theta - \rho\zeta)\,\mathbf{t}_s^*\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $\varkappa_s$, $\varkappa_\beta$ — величины, характеризующие изменение главных кривизн срединной поверхности при деформации; это утверждение становится очевидным, если отметим, что главные кривизны недеформированной срединной поверхности выражаются формулами

$$\frac{1}{R_s} = \theta^{\cdot}, \qquad \frac{1}{R_\beta} = \frac{\sin\theta}{\rho} \tag{1.6}$$

Величины $\varkappa_s$, $\varkappa_\beta$ и ζ легко определить путем дифференцирования формул (1.4). Учитывая при этом деривационные формулы (1.3), имеем

$$\varkappa_s = -\vartheta^{\cdot}, \ \rho\varkappa_\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\cos\left(\theta + \tfrac{1}{2}\vartheta\right), \ \rho\zeta = 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\sin\left(\theta + \tfrac{1}{2}\vartheta\right) \tag{1.7}$$

Далее, пусть $\mathbf{r}_s^*$, $\mathbf{r}_\beta^*$ будут векторы, в которые преобразуются векторы $\mathbf{t}_s$, $\mathbf{t}_\beta$ при деформации. Если ε_s, ε_β — относительные удлинения меридиана и параллели соответственно, то

$$\mathbf{r}_s^* = (1 + \varepsilon_s)\,\mathbf{t}_s^*, \qquad \mathbf{r}_\beta^* = (1 + \varepsilon_\beta)\,\mathbf{t}_\beta^* \tag{1.8}$$

Введем в рассмотрение вектор перемещения срединной поверхности

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(s) = u\mathbf{t}_s + w\mathbf{n} \tag{1.9}$$

Так как

$$\mathbf{r}_s^* = \mathbf{t}_s + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}, \qquad \mathbf{r}_\beta^* = \mathbf{t}_\beta + \frac{\partial \mathbf{v}}{\rho\partial\beta} \tag{1.10}$$

то

$$u^{\cdot} - \theta^{\cdot}w = \varepsilon_s\cos\vartheta - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta, \qquad \theta^{\cdot}u + w^{\cdot} = (1 + \varepsilon_s)\sin\vartheta \tag{1.11}$$

$$u\cos\theta - w\sin\theta = \rho\varepsilon_\beta \tag{1.12}$$

Из этой системы u, w могут быть определены однозначно, если удовлетворяется условие

$$(\rho\varepsilon_\beta)^{\cdot} - \varepsilon_s \cos\theta + (1 + \varepsilon_s)\rho\zeta = 0 \tag{1.13}$$

Поэтому уравнение (1.13) может быть названо условием совместности деформации. Для осевых и радиальных смещений ξ, η

$$\xi = u\sin\theta + w\cos\theta, \qquad \eta = u\cos\theta - w\sin\theta \tag{1.14}$$

получим из систем (1.11), (1.12) формулы

$$\xi = \xi_0 + \int\limits_{s_0}^{s} \left\{\varepsilon_s \sin(\theta + \vartheta) + 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\cos(\theta + \tfrac{1}{2}\vartheta)\right\} ds, \qquad \eta = \rho\varepsilon_\beta \tag{1.15}$$

Геометрический анализ деформации этим и исчерпывается. Переходим к рассмотрению статических соотношений.

Пусть $\mathbf{T}_s$, $\mathbf{T}_\beta$ будут векторы внутренних усилий, действующих на нормальные сечения оболочки $s = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, соответственно отнесенных на единицу длины линейного элемента недеформированной срединной поверхности. Далее, пусть будут $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{M}_\beta$ таким же образом определенные моменты внутренних усилий, а $\mathbf{X}$ — вектор внешней нагрузки, отнесенной к единице площади недеформированной срединной поверхности. Условия равновесия вырезанного из оболочки элемента ds, $\rho\, d\beta$ требуют

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{T}_s\rho) + \frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{T}_\beta + \rho\mathbf{X} = 0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{M}_s\rho) + \frac{\partial}{\partial\beta}\mathbf{M}_\beta + \mathbf{r}_s{}^* \times \mathbf{T}_s\rho + \mathbf{r}_\beta{}^*\rho \times \mathbf{T}_\beta = 0 \tag{1.17}$$

Учитывая осесимметричную деформацию, положим

$$\begin{gathered} \mathbf{T}_s = T_s\mathbf{t}_s{}^* + N\mathbf{n}^*, \qquad \mathbf{T}_\beta = T_\beta\mathbf{t}_\beta{}^*, \qquad \mathbf{X} = X_s\mathbf{t}_s{}^* + X_n\mathbf{n}^* \\ \mathbf{M}_s = M_s\mathbf{t}_\beta{}^*, \qquad \mathbf{M}_\beta = -M_\beta\mathbf{t}_s{}^* \end{gathered} \tag{1.18}$$

и развернем векторные уравнения (1.16), (1.17). Это с учетом формул (1.5), (1.7) даст

$$\begin{gathered} (T_s\rho)^{\cdot} - T_\beta\cos(\theta + \vartheta) - N\rho(\theta^{\cdot} + \vartheta^{\cdot}) + \rho X_s = 0 \\ T_s\rho(\theta^{\cdot} + \vartheta^{\cdot}) + T_\beta\sin(\theta + \vartheta) + (N\rho)^{\cdot} + \rho X_n = 0 \end{gathered} \tag{1.19}$$

$$(M_s\rho)^{\cdot} - M_\beta\cos(\theta + \vartheta) - (1 + \varepsilon_s)N\rho = 0 \tag{1.20}$$

Уравнения (1.19) можно представить в более удобной форме [5], вводя в рассмотрение вместо T_s, N и X_s, X_n осевые и радиальные компоненты V, H, X_V, X_H по формулам

$$\begin{gathered} V = T_s\sin(\theta + \vartheta) + N\cos(\theta + \vartheta), \qquad H = T_s\cos(\theta + \vartheta) - N\sin(\theta + \vartheta) \\ X_V = X_s\sin(\theta + \vartheta) + X_n\cos(\theta + \vartheta), \qquad X_H = X_s\cos(\theta + \vartheta) - X_n\sin(\theta + \vartheta) \end{gathered} \tag{1.21}$$

Теперь уравнения (1.19) получают вид

$$(V\rho)^{\cdot} + \rho X_V = 0, \qquad (H\rho)^{\cdot} - T_\beta + \rho X_H = 0 \tag{1.22}$$

позволяющий легко определить общее решение

$$V\rho = V_0\rho_0 - \int\limits_{s_0}^{s} X_V \rho\, ds, \qquad H\rho = \psi, \qquad T_\beta = \psi^{\cdot} + \rho X_H \tag{1.23}$$

где ψ — функция напряжения. По формулам (1.21) имеем

$$\begin{aligned} T_s\rho &= \quad \psi \cos(\theta + \vartheta) + \Big(V_0\rho_0 - \int\limits_{s_0}^{s} X_V\rho\, ds\Big)\sin(\theta + \vartheta) \\ N\rho &= -\psi \sin(\theta + \vartheta) + \Big(V_0\rho_0 - \int\limits_{s_0}^{s} X_V\rho\, ds\Big)\cos(\theta + \vartheta) \end{aligned} \tag{1.24}$$

Изложенный здесь анализ геометрических и статических соотношений показывает, что разрешающими уравнениями задачи об осесимметричной деформации оболочек вращения являются уравнения (1.13), (1.20), которые запишем в виде

$$(\rho\varepsilon_\beta)^{\cdot} - \varepsilon_s \cos\theta + 2(1 + \varepsilon_s)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta \sin\left(\theta + \tfrac{1}{2}\vartheta\right) = 0 \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned} (M_s\rho)^{\cdot} - M_\beta \cos(\theta + \vartheta) + (1 + \varepsilon_s)\psi \sin(\theta + \vartheta) - \\ - (1 + \varepsilon_s)\Big(V_0\rho_0 - \int\limits_{s_0}^{s} X_V\rho\, ds\Big)\cos(\theta + \vartheta) = 0 \end{aligned} \tag{1.26}$$

где ε_s, ε_β, M_β, M_s нужно выразить при помощи физических соотношений для оболочки через ϑ, ψ и функции нагрузки V, X_H. Отметим, что в общем случае X_V, X_H зависят от состояния перемещений.

Как и следовало ожидать, полученные здесь основные соотношения (1.7), (1.13), (1.15), (1.20), (1.22) по существу совпадают с соответствующими соотношениями в работе [5]. Единственная разница состоит в том, что в работе [5] внутренние усилия и моменты отнесены к деформированной срединной поверхности.

Обозначим начальную точку меридиана срединной поверхности через s_0, конечную — через s_*. В дальнейшем предположим, что при $s = s_*$ оболочка подперта ($\xi = 0$). В соответствии с этим вместо (1.15) имеем формулу

$$\xi = -\int\limits_{s}^{s_*} \left\{\varepsilon_s \sin(\theta + \vartheta) + 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta \cos\left(\theta + \tfrac{1}{2}\vartheta\right)\right\} ds \tag{1.27}$$

Если при $s = s_0$ осевое смещение не задано, то задано значение V_0; если задан $\xi = \xi^\circ$, то V_0 является статически неопределимой величиной.

Далее предположим, что на краях $s = s_0$ и $s = s_*$ заданы по одному из следующих условий:

$$\text{или} \quad \eta = \eta^\circ, \qquad \text{или же } H = H^\circ \tag{1.28}$$

$$\text{или } M_s = M_s^\circ, \qquad \text{или же } \vartheta = \vartheta^\circ \tag{1.29}$$

где η°, H°, M_s°, ϑ° — заданные числа.

2. Построение вариационной формулы, эквивалентной уравнениям (1.25), (1.26). Введем в рассмотрение функционалы $W_\varkappa$ и F_T, для которых имеем

$$\delta W_\varkappa = \int_{s_0}^{s_*} (M_s \delta\varkappa_s + M_\beta \delta\varkappa_\beta)\, \rho\, ds, \quad \delta F_T = \int_{s_0}^{s_*} (\varepsilon_s \delta T_s + \varepsilon_\beta \delta T_\beta)\, \rho\, ds \tag{2.1}$$

Если предполагать существование зависящей только от состояния деформации ε_s, ε_β, $\varkappa_s$, $\varkappa_\beta$ потенциальной энергии деформации W, то существуют [6] и функционалы $W_\varkappa$ и F_T. Очевидно, что $\delta W_\varkappa$ — вариация работы деформации при вариации кривизн $\varkappa_s$, $\varkappa_\beta$, а δF_T— вариация дополнительной работы деформации при вариации тангенциальных усилий T_s, T_β.

Обычные в теории упругих оболочек физические соотношения дают

$$\begin{aligned} W_\varkappa &= \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_*} D\,(\varkappa_s^2 + \varkappa_\beta^2 + 2\nu\varkappa_s\varkappa_\beta)\,\rho\, ds, &\qquad D &= \frac{Et^3}{12\,(1-\nu^2)} \\ F_T &= \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_*} B'\,(T_s^2 + T_\beta^2 - 2\nu T_s T_\beta)\,\rho\, ds, &\qquad B' &= \frac{1}{Et} \end{aligned} \tag{2.2}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, t — толщина оболочки; однако будем предполагать существование и более точных выражений, для исследования сильно деформируемых весьма тонкостенных оболочек.

Рассмотрим, как связаны $\delta W_\varkappa$ и δF_T, если M_s, M_β, ε_s, ε_β удовлетворяют уравнениям (1.25), (1.26) и краевым условиям. При этом $\delta\varkappa_s$, $\delta\varkappa_\beta$ определяем через $\delta\vartheta$ при помощи формул (1.7), а δT_s, δT_β — через $\delta\psi$, $\delta\vartheta$ и вариацию внешней нагрузки (в общем случае X_V, X_H зависят от состояния перемещений). Преобразование $\delta W_\varkappa$ с учетом уравнения (1.26) дает

$$\delta W_\varkappa = -\,|\, M_s{}^\circ \rho\,\delta\vartheta\,|_{s_0}^{s^*} - \int_{s_0}^{s^*} (1+\varepsilon_s)\,[\psi\sin(\theta+\vartheta) - V\rho\cos(\theta+\vartheta)]\,\delta\vartheta\, ds \tag{2.3}$$

поступая аналогично, имеем

$$\begin{aligned} \delta F_T = |\,\eta^\circ\delta\psi\,|_{s_0}^{s_*} + \int_{s_0}^{s_*} \Big\{ & 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\,\sin\left(\theta+\tfrac{1}{2}\vartheta\right)\delta\psi - \varepsilon_s[\psi\sin(\theta+\vartheta) - \\ & - V\rho\cos(\theta+\vartheta)]\,\delta\vartheta + \varepsilon_s\rho\sin(\theta+\vartheta)\,\delta V + \varepsilon_\beta\rho^2\delta X_H \Big\}\, ds \end{aligned} \tag{2.4}$$

Замечая, что

$$\delta\left\{2\psi\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\,\sin\left(\theta+\tfrac{1}{2}\vartheta\right)\right\} = \psi\sin(\theta+\vartheta)\,\delta\vartheta + 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\,\sin\left(\theta+\tfrac{1}{2}\vartheta\right)\delta\psi$$

из выражений (2.3), (2.4) получим вариационное уравнение

$$\begin{aligned} & \delta\left\{W_\varkappa - F_T + \int_{s_0}^{s_*} 2\psi\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\,\sin\left(\theta+\tfrac{1}{2}\vartheta\right) ds\right\} - \\ & - \int_{s_0}^{s_*} \{V\cos(\theta+\vartheta)\,\delta\vartheta - \varepsilon_s\sin(\theta+\vartheta)\,\delta V - \varepsilon_\beta\rho\,\delta X_H\}\,\rho\, ds = -\,|\, M_s{}^\circ\rho\,\delta\vartheta + \eta^\circ\delta\psi\,|_{s_0}^{s_*} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для дальнейшего целесообразно в функции нагрузки V, определяемой (1.23), выделить постоянную V_0, в результате чего получим формулу

$$\delta\Big\{W_\varkappa - F_T + \int\limits_{s_0}^{s_*} 2\psi\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\sin\Big(\theta+\tfrac{1}{2}\vartheta\Big)ds - V_0\rho_0\int\limits_{s_0}^{s_*} 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\cos\Big(\theta+\tfrac{1}{2}\vartheta\Big)ds\Big\} =$$

$$= \xi_0\rho_0\,\delta V_0 - |\,M_s{}^\circ\rho\delta\vartheta + \eta^\circ\delta\psi\,|_{s_0}^{s_*} - \int\limits_{s_0}^{s_*}\Big(\int\limits_{s_0}^{s} X_V\rho\,ds\Big)\cos(\theta+\vartheta)\,\delta\vartheta\,ds +$$

$$+\int\limits_{s_0}^{s_*}\Big\{\Big(\int\limits_{s_0}^{s}\delta X_V\rho\,ds\Big)\varepsilon_s\sin(\theta+\vartheta) - \varepsilon_\beta\rho^2\,\delta X_H\Big\}ds \tag{2.6}$$

где в сравнение допускаются функции ψ, удовлетворяющие статическим краевым условиям:

$$\psi = H^\circ\rho, \qquad \delta\psi = 0 \tag{2.7}$$

и функции ϑ, удовлетворяющие геометрическим краевым условиям

$$\vartheta = \vartheta^\circ, \qquad \delta\vartheta = 0 \tag{2.8}$$

Далее, если V_0 есть величина, заданная на краю $s = s_0$, то следует положить $\delta V_0 = 0$; в обратном случае V_0 является пока статически неопределимой постоянной, величина которой подлежит определению по (2.6).

Интегрированием по частям можно придать вариационной формуле (2.6) вид обобщенных вариационных уравнений метода Галеркина:

$$\int\limits_{s_0}^{s_*}\Big\{(\varepsilon_\beta\rho)^\cdot - \varepsilon_s\cos\theta + 2(1+\varepsilon_s)\sin\frac{\vartheta}{2}\sin\Big(\theta+\frac{\vartheta}{2}\Big)\Big\}\;\delta\psi\,ds + |\,(\eta^\circ - \varepsilon_\beta\rho)\,\delta\psi\,|_{s_0}^{s_*} = 0 \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{s_0}^{s_*}\Big\{(M_s\rho)^\cdot - M_\beta\cos(\theta+\vartheta) + (1+\varepsilon_s)\,\psi\sin(\theta+\vartheta) -$$

$$-(1+\varepsilon_s)\Big(V_0\rho_0 - \int\limits_{s_0}^{s} X_V\rho ds\Big)\cos(\theta+\vartheta)\Big\}\delta\vartheta\,ds + |(M_s{}^\circ - M_s)\rho\,\delta\vartheta\,|_{s_0}^{s_*} = 0 \tag{2.10}$$

$$\Big\{\xi_0 + \int\limits_{s_0}^{s_*}\Big[\varepsilon_s\sin(\theta+\vartheta) + 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\cos\Big(\theta+\tfrac{1}{2}\vartheta\Big)\Big]ds\Big\}\delta V_0 = 0 \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что вариационные уравнения (2.9)—(2.11) сводятся к вариационным уравнениям метода Галеркина в своем обычном виде для интегрирования нелинейных уравнений (1.25), (1.26):

$$\int\limits_{s_0}^{s_*}\Big\{(\varepsilon_\beta\rho)^\cdot - \varepsilon_s\cos\theta + 2(1+\varepsilon_s)\sin\tfrac{1}{2}\vartheta\sin\Big(\theta+\tfrac{1}{2}\vartheta\Big)\Big\}\delta\psi\,ds = 0 \tag{2.12}$$

$$\int\limits_{s_0}^{s_*}\Big\{(M_s\rho)^\cdot - M_\beta\cos(\theta+\vartheta) + (1+\varepsilon_s)\,\psi\sin(\theta+\vartheta) -$$

$$-(1+\varepsilon_s)\Big(V_0\rho_0 - \int\limits_{s_0}^{s} X_V\rho\,ds\Big)\cos(\theta+\vartheta)\Big\}\delta\vartheta\,ds = 0 \tag{2.13}$$

при следующих условиях:

1) на краю задано усилие H; если же смещение η задано, то функции ϑ, ψ, V_0, аппроксимирующие решение, должны удовлетворять условию $\varepsilon_\beta\rho = \eta^\circ$;

2) на краю задан угол поворота меридиана ϑ; если же нет, то ϑ, ψ, V_0 должны удовлетворять условию $M_s = M_s{}^\circ$;

3) на краю $s = s_0$ задано осевое усилие V_0; в обратном случае функции, аппроксимирующие решение, должны удовлетворять условию

$$\xi_0 + \int_{s_0}^{s_*} \left[\varepsilon_s \sin(\theta + \vartheta) + 2 \sin \tfrac{1}{2} \vartheta \cos \left(\theta + \tfrac{1}{2} \vartheta\right)\right] ds = 0 \qquad (2.14)$$

Таким образом, на основании приведенной выше вариационной формулы (2.6) можно применять метод Галеркина для интегрирования уравнений (1.25), (1.26) также и в случае, когда среди краевых условий встречаются и условия относительно перемещений.

Нам кажется, что этот результат не является тривиальным, потому что без него имеется некоторая неуверенность говорить об удовлетворении геометрических краевых условий относительно ξ, η, пока условие совместности деформации (1.25) точно не удовлетворяется.

Поскольку вариационная формула (2.6) позволяет определить перемещения ξ, η на краях формулами (1.15), постольку можно полагать, что и при значениях $s_0 < s < s_*$ осевое и радиальное перемещения ξ, η определяются формулами (1.15). Функции ξ, η нужны для определения компонент вектора внешней нагрузки X_V, X_H, если последние зависят от состояния перемещений. Отметим, что формула (2.6) приводится к форме

$$\delta \left\{F_T - W_\varkappa + \int_{s_0}^{s_*} \left(T_s 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \vartheta + N \sin \vartheta\right) \rho \, ds\right\} = \int_{s_0}^{s_*} (\xi \, \delta X_V + \eta \, \delta X_H) \rho \, ds +$$

$$+ \left| M_s^\circ \rho \, \delta\vartheta + \eta^\circ \rho \, \delta H \right|_{s_0}^{s_*} - \xi_0 \rho_0 \, \delta V_0 \qquad (2.15)$$

где все члены имеют очевидный определенный физический смысл; укажем только, что в левой части уравнения (2.15)

$$-\left(T_s 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \vartheta + N \sin \vartheta\right) \rho \, ds$$

представляет собой работу усилий T_s, N элемента оболочки при переходе от деформированного состояния в недеформированное при нерастяжимости меридиана срединной поверхности оболочки.

3. Геометрически нелинейные задачи. Изложенные выше результаты относятся к общей теории осесимметричной деформации оболочек вращения потому, что они имеют место при: 1) произвольной величине смещений, 2) довольно общих физических соотношениях, так как предполагается только существование потенциальной энергии деформации.

В нелинейной теории оболочек все же наибольший практический интерес представляют так называемые геометрически нелинейные задачи, так как под нагрузкой оболочки могут значительно изменять свою начальную конфигурацию без заметных относительных удлинений и сдвигов.

Исходя из этого, предметом дальнейших рассмотрений будут такие деформированные состояния оболочки, где относительные удлинения ε_s, ε_β, $t\varkappa_s$, $t\varkappa_\beta$ пренебрежимо малы по сравнению с единицей. В пределах упругой работы стали такая точность допустима, тем более что при построении законов упругости для оболочки все равно приходится опираться на гипотезу Кирхгофа — Лява, точность которой будет[7] порядка t / R.

При этом предположении законны следующие физические соотношения:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_s &= B'(T_s - \nu T_\beta), & \varepsilon_\beta &= B'(T_\beta - \nu T_s) \\
M_s &= D(\varkappa_s + \nu\varkappa_\beta), & M_\beta &= D(\varkappa_\beta + \nu\varkappa_s)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

которые совместимы с формулами (2.1), (2.2).

По определению [8] задача о равновесии оболочки будет геометрически нелинейная, если малые относительные удлинения осуществляются при немалых по сравнению с ε_s, ε_β, $t\varkappa_s$, $t\varkappa_\beta$ поворотах элементов оболочки ϑ, которые и являются источником нелинейных явлений деформации.

Из уравнения (1.25) сразу же вытекает, что ϑ может быть величиной, большей чем ε_β, ε_s, если $|\sin\theta| \ll 1$ или же $|(\varepsilon_\beta\rho)^{\cdot}| \gg |\varepsilon_\beta|$, $|(\varepsilon_\beta\rho)^{\cdot}| \gg |\varepsilon_s|$. В первом случае источником нелинейного характера деформации является конфигурация срединной поверхности оболочки, во втором — быстро изменяющееся напряженное состояние, например напряженное состояние вблизи краев оболочки. А. Л. Гольденвейзер [9] показал, что в последнем случае описывающие деформацию величины возрастают при дифференцировании не больше чем в $(R_\beta/t)^{0.5}$ раз. К этому же результату пришли и И. Я. Штаерман и А. А. Пиковский [10], рассматривая потерю устойчивости безмоментного напряженного состояния.

Таким образом, при быстро изменяющихся напряженных состояниях получим для ϑ оценку $\vartheta \leqslant \varepsilon_\beta (R_\beta/t)^{0.5}$, откуда ясно, что ϑ не может быть большой величиной даже при применении стали. В упругой области стали $\max\varepsilon_\beta \sim 10^{-3}$, далее в существующих конструкциях $(R_\beta/t) \leqslant 10^4$, следовательно, $\max\vartheta \leqslant 10^{-1}$. Поэтому можно принимать

$$
\sin\vartheta = \vartheta, \qquad \cos\vartheta = 1 \tag{3.2}
$$

У пологих оболочек, где на всем протяжении меридиана срединной поверхности $|\sin\theta| \ll 1$, а также в пологих участках непологих в целом оболочек угол поворота меридиана может быть и больше, чем в случае быстро изменяющегося напряженного состояния в непологой части. Это может иметь место даже в краевых зонах плоских пластинок, где по исследованиям В. И. Феодосьева [1] при конечных значениях нагрузки также появляется краевой эффект и притом тем ярче, бем больше нагрузка. Поэтому при расчете пологих оболочек нужно проверить, достаточно ли точны для данного деформированного состояния соотношения (3.2), которыми будем здесь в дальнейшем пользоваться. Учитывая сказанное, можно представить основные уравнения (1.25), (1.26) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
& B'\Big\{\rho\psi^{\cdot\cdot} + \psi^{\cdot}(\cos\theta + \nu\vartheta\sin\theta) - \frac{1}{\rho}\psi(\cos^2\theta - \nu\rho\theta^{\cdot}\sin\theta - \nu\rho\vartheta^{\cdot}\sin\theta - \\
& - \tfrac{1}{2}\vartheta\sin 2\theta - \nu\rho\theta^{\cdot}\vartheta\cos\theta - \nu\rho\vartheta\vartheta^{\cdot}\cos\theta) - V\left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta + \nu\rho\theta^{\cdot}\cos\theta + \nu\rho\vartheta^{\cdot}\cos\theta + \right. \\
& \left. + \vartheta\cos^2\theta - \nu\rho\theta^{\cdot}\vartheta\sin\theta - \nu\rho\vartheta\vartheta^{\cdot}\sin\theta\right) + \nu X_V\rho\sin\theta + \nu X_V\rho\vartheta\cos\theta + (\rho^2 X_H)^{\cdot} + \\
& + \nu\rho X_H\cos\theta\Big\} + (B')^{\cdot}\Big\{\rho\psi^{\cdot} - \nu\psi(\cos\theta - \vartheta\sin\theta) - \nu V\rho(\sin\theta + \vartheta\cos\theta) + \rho^2 X_H\Big\} + \\
& \qquad + \vartheta(\sin\theta + \tfrac{1}{2}\vartheta\cos\theta) = 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$D\left\{\rho\vartheta^{\cdot\cdot} + \vartheta^{\cdot}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\vartheta\,(\cos^2\theta + \nu\rho\theta^{\cdot}\sin\theta + \frac{1}{2}\nu\theta^{\cdot}\vartheta\cos\theta - \frac{3}{4}\vartheta\sin 2\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\vartheta^2\sin^2\theta)\right\} + D^{\cdot}\left(\rho\vartheta^{\cdot} + \nu\vartheta\cos\theta - \frac{1}{2}\nu\vartheta^2\sin\theta\right) -$$

$$-\psi\,(\sin\theta + \vartheta\cos\theta) + V\rho\,(\cos\theta - \vartheta\sin\theta) = 0 \qquad (3.4)$$

Поскольку за основу расчета приняты линейные физические соотношения (3.1), постольку непоследовательно удерживать в уравнениях нелинейные члены, которые по сравнению с главными линейными членами будут малыми порядка относительных удлинений ε_s, ε_β или же меньше.

Например, если напряженное состояние будет типа обычного краевого эффекта, то в выражении $\psi^{\cdot\cdot} + \psi^{\cdot}\vartheta$ нужно отбрасывать второй член. Действительно, $\rho\psi^{\cdot\cdot} \sim \psi R_\beta / t$, $\psi^{\cdot} \sim \psi\,(R_\beta / t)^{0.5}$, $\vartheta \sim \varepsilon_\beta\,(R_\beta / t)^{0.5}$; поэтому член $\psi^{\cdot}\vartheta \sim \psi\varepsilon_\beta\,(R_\beta / t)$ можно отбросить с точностью ε_β по сравнению с единицей.

Отсюда следует, что нелинейные уравнения (3.3), (3.4) могут быть в случае быстро изменяющегося напряженного состояния значительно упрощены путем отбрасывания несущественных нелинейных членов. Указанный выше анализ позволяет представить систему вариационных уравнений метода Галеркина (2.9) — (2.11) для решения геометрических нелинейных задач в форме

$$\int\limits_{s_0}^{s_*}\left\{B'\left[\rho\psi^{\cdot\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta + \frac{1}{\rho}\psi\,(\cos^2\theta - \nu\rho\theta^{\cdot}\sin\theta) - V\rho\left(\frac{1}{2\rho}\sin 2\theta + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \nu\theta^{\cdot}\cos\theta + \nu\vartheta^{\cdot}\cos\theta\right) + \nu X_V\rho\sin\theta + (\rho^2 X_H)^{\cdot} + \nu\rho X_H\cos\theta\right] +$$

$$\left. + (B')^{\cdot}\,(\rho\psi^{\cdot} - \nu\psi\cos\theta - \nu V\rho\sin\theta + \rho^2 X_H) + \vartheta\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\vartheta\cos\theta\right)\right\}\delta\psi\,ds +$$

$$+ \left|\,\{\eta^{\circ} - B'\,(\rho\psi^{\cdot} - \nu\psi\cos\theta - \nu V\rho\sin\theta + \rho^2 X_H)\}\,\delta\psi\,\right|_{s_0}^{s_*} = 0 \qquad (3.5)$$

$$\int\limits_{s_0}^{s_*}\left\{D\left[\rho\vartheta^{\cdot\cdot} + \vartheta^{\cdot}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\vartheta\,(\cos^2\theta + \nu\rho\theta^{\cdot}\sin\theta)\right] + D^{\cdot}\,(\rho\vartheta^{\cdot} + \nu\vartheta\cos\theta) - \right.$$

$$\left. - \psi\sin\theta + V\rho\cos\theta - \vartheta\,(\psi\cos\theta + V\rho\sin\theta)\right\}\delta\vartheta\,ds -$$

$$- \left|\,\{M_s{}^{\circ}\rho + D\,(\rho\vartheta^{\cdot} + \nu\vartheta\cos\theta)\}\,\delta\vartheta\,\right|_{s_0}^{s_*} = 0 \qquad (3.6)$$

$$\left\{\xi_0 + \int\limits_{s_0}^{s_*}\left[B'\,(\psi\cos\theta + V\rho\sin\theta - \nu\rho\psi^{\cdot} - \nu\rho^2 X_H) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \vartheta\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\vartheta\sin\theta\right)\right]ds\right\}\delta V_0 = 0 \qquad (3.7)$$

В. И. Феодосьев в работе [3] вывел упрощенные нелинейные уравнения осесимметричной деформации оболочек, исходя из положения $\vartheta\sin\theta \ll 1$, в то время как при выводе вариационных уравнений (3.5) — (3.7) принято $\vartheta^2 \ll 1$, $\varepsilon_s, \varepsilon_\beta \ll 1$. Нам представляется, что уравнения В. И. Феодосьева в случае непологих оболочек не обладают нужной точностью.

Можно ожидать, что в задачах равновесия непологих оболочек, требующих для решения нелинейной теории, линейные члены в уравнении (3.6)

$\psi \sin \theta - V\rho \cos \theta$ образуют малую разность и главным нелинейным членом в уравнениях (3.5) — (3.7) будет $\vartheta (\psi \cos \theta + V\rho \sin \theta)$ в уравнении (3.6), все остальные нелинейные члены являются несущественными. Иначе нельзя объяснить эффекта, найденного Х. М. Муштари[11] при изучении равновесия пограничной зоны при помощи нелинейной теории. Отсюда также вытекает, что в (3.6) не следует отбрасывать член $V\rho\vartheta \sin \theta$.

У пологих оболочек $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$; следовательно, в области применимости соотношений (3.2) $\theta\vartheta \ll 1$. Эти, можно сказать, геометрические соображения приводят (3.3), (3.4) к следующим упрощенным уравнениям:

$$B' \left\{\rho\psi^{\cdot\cdot} + \psi^{\cdot} - \frac{1}{\rho}\psi - V(\theta + \vartheta + \nu\rho\theta^{\cdot} + \nu\rho\vartheta^{\cdot}) + \nu X_V \rho(\theta + \vartheta) + (\rho^2 X_H)^{\cdot} + \nu\rho X_H\right\} + (B')^{\cdot}\{\rho\psi^{\cdot} - \nu\psi - \nu V\rho(\theta+\vartheta) + \rho^2 X_H\} + \vartheta\theta + \frac{1}{2}\vartheta^2 = 0 \qquad (3.8)$$

$$D\left(\rho\vartheta^{\cdot\cdot} + \vartheta^{\cdot} - \frac{1}{\rho}\vartheta\right) + D^{\cdot}(\rho\vartheta^{\cdot} + \nu\vartheta) - \psi\theta - \psi\vartheta + V\rho = 0 \qquad (3.9)$$

Здесь, однако, возможно и дальнейшее упрощение. Именно, имеющиеся решения по пологим оболочкам[4], а также качественное исследование решения системы (3.8), (3.9) показывают, что в (3.8) члены с множителями V и X_V являются несущественными и могут быть отброшены.

Если в подинтегральных выражениях вариационных уравнений (3.5), (3.6) положить $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$, то они с точностью до отмеченных выше несущественных членов совпадают с левыми частями уравнений (3.8), (3.9). Отсюда следует, что вариационные уравнения (3.5) — (3.7) применимы и для расчета оболочек, содержащих пологие участки.

Поступила 7 IV 1952

Институт строительства и архитектуры
Академии Наук Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Панов Д. Ю. О больших прогибах круглых мембран со слабым гофром. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 2.
2. Панов Д. Ю. Об устойчивости биметаллической оболочки при нагреве. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 6
3. Феодосьев В. И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 5.
4. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. 1949.
5. Reissner E. On axisymmetrical deformations of shells of revolution. Proc. Symp. App. Math. 1950. Vol. III.
6. Галимов К. З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 6.
7. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 5.
8. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат. 1948.
9. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонких оболочек. ПММ. 1945. Т. XI. Вып. 6.
10. Штаерман И. Я., Пиковский А. А. Основы теории устойчивости строительных конструкций. Госстройиздат. 1939.
11. Муштари Х. М. Нелинейная теория равновесия пограничной зоны упругой оболочки. ДАН СССР. 1949. Т. LXIX. № 4.