Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ КАК ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

С. Г. Михлин

(Ленинград)

Если оболочка по форме близка к плоской пластине, то уравнения равновесия такой оболочки близки к соответствующим уравнениям теории пластин. Возникает вопрос: как велика будет погрешность в определении напряжений, если при расчете заменить уравнения равновесия оболочки уравнениями равновесия близкой к ней пластины? В статье дается оценка этой погрешности в зависимости от геометрических свойств оболочки и пластины, а также от условий закрепления края, причем получается указанная оценка на основании некоторых общих теорем, пригодных не только для оператора теории оболочек, но и вообще для любого положительного оператора.

Оценка сильно упрощается для того случая, когда оболочка находится в чисто моментном напряженном состоянии; из нашей оценки вытекает, что и в этом случае достаточно пологую оболочку можно приближенно рассчитывать как плоскую пластину. На примере геликоидальной оболочки показано, как можно численно оценить погрешность при заданных параметрах оболочки.

В общем случае на основе полученной в статье оценки погрешности удается построить теорию пологих оболочек, отличную от аналогичных, ранее построенных теорий и, повидимому, более надежную в своих основах.

§ 1. Потенциальная энергия деформации оболочки. Пусть S означает срединную поверхность оболочки. Введем ортогональные криволинейные координаты α_1, α_2, α_3, где линии $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$ суть линии кривизны срединной поверхности, а α_3 есть расстояние по нормали от данной точки до поверхности S. Пусть в координатах α_1, α_2 длина элементарной дуги на срединной поверхности определяется формулой

$$ds^2 = A_1^2(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1^2 + A_2^2(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_2^2$$

Тогда, как известно, для элемента длины в пространстве имеем

$$ds^2 = (1 - 2k_1\alpha_3)\, A_1^2\, d\alpha_1^2 + (1 - 2k_2\alpha_3)\, A_2^2\, d\alpha_2^2 + d\alpha_3^2$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны срединной поверхности.

Обозначим u_1, u_2, u_3 составляющие вектора смещений $\mathbf{u}$ в осях α_1, α_2, α_3 и через $e_{ik} = e_{ik}(\mathbf{u})$ — составляющие тензора деформаций, которые в местной системе координат[1] имеют вид:

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{1.1}$$

[1] Местной мы называем систему декартовых координат, оси которой совпадают с касательными к линиям α_1, α_2, α_3.

Примем обычные гипотезы теории оболочек, по которым при вычислении потенциальной энергии деформации можно положить

$$e_{13}=0, \qquad e_{23}=0, \qquad e_{33}=-\frac{\sigma}{1-\sigma}(e_{11}+e_{22}) \tag{1.2}$$

$$e_{ik}=\varepsilon_{ik}(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\varkappa_{ik}(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (i,\ k=1,\ 2) \tag{1.3}$$

Величины ε_{ik} будем называть далее деформациями срединной поверхности, а величины $\varkappa_{ik}$ — искривлениями той же поверхности. Эти величины можно рассматривать как составляющие двумерных тензоров E и K; в системе координат α_1, α_2 они выражаются формулами

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}w_2-k_1w_3, \qquad \varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left\{\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{w_1}{A_1}\right)+\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{w_2}{A_2}\right)\right\}$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}w_1+\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_2}{\partial\alpha_2}-k_2w_3 \tag{1.4}$$

$$\varkappa_{11}=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha_1}w_1-\frac{1}{A_2}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha_2}w_2-k_1{}^2w_3-\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_1}\right)-\frac{1}{A_1A_2{}^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_2}$$

$$\varkappa_{22}=-\frac{1}{A_1}\frac{\partial k_2}{\partial\alpha_1}w_1-\frac{1}{A_2}\frac{\partial k_2}{\partial\alpha_2}w_2-k_2{}^2w_3-\frac{1}{A_1{}^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_2}\right)$$

$$\varkappa_{12}=\frac{1}{2}\left\{(k_2-k_1)\left[\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{w_1}{A_1}\right)-\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{w_2}{A_2}\right)\right]-\right. \tag{1.5}$$

$$\left.-\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_1{}^2}\frac{\partial w^3}{\partial\alpha_1}\right)-\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_2{}^2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_2}\right)\right\}$$

где $\mathbf{w}=(w_1,\ w_2,\ w_3)$ — вектор смещения точек срединной поверхности.

Формулы (1.4) и (1.5) отличаются от аналогичных формул В. З. Власова [1] только знаками кривизн.

Потенциальная энергия деформации оболочки может быть приведена после отбрасывания малых членов к виду

$$\mathit{Э}=\frac{E}{2(1-\sigma^2)}\iint_S\left\{h\left[\varepsilon_{11}{}^2+2\sigma\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{22}{}^2+2(1-\sigma)\varepsilon_{12}{}^2\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{h^3}{12}\left[\varkappa_{11}{}^2+2\sigma\varkappa_{11}\varkappa_{22}+\varkappa_{22}{}^2+2(1-\sigma)\varkappa_{12}{}^2\right]\right\}dS \tag{1.6}$$

Внимательное рассмотрение подинтегральной функции в (1.6) приводит к выводу, что в выражениях искривлений (1.5) можно, вообще говоря, пренебречь членами, зависящими от кривизн и их производных. Чтобы убедиться в этом, выделим в (1.6), например, член

$$\frac{h^3}{12}\varkappa_{11}{}^2=\frac{h^3}{12}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha_1}w_1+\frac{1}{A_2}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha_2}w_2+k_1{}^2w_3\right)^2+ \tag{1.7}$$

$$+\frac{h^3}{6}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha_1}w_1+\frac{1}{A_2}\frac{\partial k_1}{\partial\alpha_2}w_2+k_1{}^2w_3\right)\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{1}{A_1A_2{}^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{1}{A_1A_2{}^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_2}\right)^2$$

и сравним его с

$$h\varepsilon_{11}{}^2=h\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}w_2\right)^2-2hk_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}w_2\right)w_3+hk_1{}^2w_3{}^2 \tag{1.8}$$

Допустим, как обычно, что величины $k_i h$ и $h \partial k_i / \partial \alpha_j$ — малые. Первая скобка в (1.7) содержит член порядка $h^3 (\partial k_1 / \partial \alpha_i)^2 w_i^2$, $h^3 k_1^4 w_3^2$, тогда как слагаемые в (1.7) суть величины порядка $h w_i^2$, $h k^2 w_3^2$. Но тогда можно пренебречь величиной $h^3 (\partial k_1 / \partial \alpha_i)^2 w_i^2$ по сравнению с величиной $h w_i^2$. Точно так же можно пренебречь величиной $h^3 k_1^4 w_3^2$ по сравнению с $h w_3^3$. Это означает, что в (1.7) можно отбросить первую скобку. Точно так же мы убедимся, что можно отбросить в (1.7) и слагаемое, содержащее множителем $\frac{1}{6} h^3$. В конечном счете мы и приходим к тому, что в $\varkappa_{ik}$ можно отбросить слагаемые, содержащие множителями k_1, k_2 и их производные. Заметим, что В. З. Власов [1] считает целесообразным отбрасывание упомянутых слагаемых [1], как не оказывающих заметного влияния на величины напряжений.

Вместо формул (1.5) мы получаем более простые:

$$
\begin{aligned}
\varkappa_{11} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2} \\
\varkappa_{22} &= -\frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2} \right) \\
\varkappa_{12} &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2} \right) \right\}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Предшествующие рассуждения предполагают, что деформации ε_{ik} не все равны нулю, поэтому формулы (1.9) во всяком случае верны с достаточной степенью точности, если напряженное состояние оболочки не чисто моментное. Впрочем, и в этом последнем случае формулы (1.9) все же практически верны, если оболочка достаточно пологая. Сформулируем точнее последнее требование. Пусть координатные параметры суть величины безразмерные; примем еще, что коэффициенты A_1 и A_2 нигде не обращаются в нуль. Наше требование сводится к тому, чтобы произведения $A_i k_j$, $A_i \partial k_j / \partial \alpha_m$ $(i, j, m = 1, 2)$ были достаточно малыми.

Для дальнейшего существенно, что формулы (1.9) остаются верными в любой системе координат, ортогональных на срединной поверхности оболочки. Что касается формул (1.4), то при переходе к произвольным ортогональным координатам они заменяются следующими:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} w_2 - \frac{L}{A_1^2} w_3 \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} w_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_2} - \frac{N}{A_2^2} w_3 \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{w_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{w_2}{A_2} \right) \right\} - \frac{M}{A_1 A_2} w_3
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

где L, M, N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S.

Заметим, наконец, что в любой ортогональной на S системе координат остается справедливой формула (1.6).

---

[1] Кроме членов $-k_1^2 w_3$ и $-k_2^2 w_3$, которые В. З. Власов сохраняет.

Формулы (1.9) и (1.10) упрощаются, если ввести на S изометрические координаты, для которых $A_1 = A_2 = A$. В этом случае

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{A}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha_2} w_2 - \frac{L}{A^2} w_3 \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha_1} w_1 + \frac{1}{A} w_2 - \frac{N}{A^2} w_3 \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{w_1}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{w_2}{A}\right)\right\} - \frac{M}{A^2} w_3
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\varkappa_{11} &= -\frac{1}{A}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}\right\} \\
\varkappa_{22} &= -\frac{1}{A}\left\{\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}\right)\right\} \\
\varkappa_{12} &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие оболочки, у которых хотя бы часть контура срединной поверхности жестко закреплена. Допустим, что деформации и искривления этой поверхности равны нулю, и докажем, что смещения ее точек также равны нулю. Воспользуемся изометрической координатной сеткой.

Приравнивая нулю тензор K, из уравнений (1.12) получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}\right) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} = 0
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}\right) = 0 \tag{1.14}
$$

Уравнение (1.14) дает

$$
\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} = A^2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}, \qquad \frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2} = -A^2 \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} \tag{1.15}
$$

где ψ — некоторая функция от α_1 и α_2. Подставим это уравнение в (1.13). Выполнив дифференцирование, получим

$$
A\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad A\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = 0
$$

Сложив последние равенства, найдем, что ψ удовлетворяет уравнению

$$
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_2^2} = 0
$$

Итак, ψ — гармоническая функция переменных α_1 и α_2 в области их изменения. В силу условий закрепления на некоторой части границы этой области будет

$$
w_3 = \frac{\partial w_3}{\partial \nu} = 0 \tag{1.16}
$$

Отсюда легко следует, что на указанной части границы

$$\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2} = 0$$

и в силу (1.15)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = 0$$

Но тогда во всей области $\psi = \text{const}$. Те же уравнения (1.15) дают $w_3 = \text{const}$, и так как на некоторой части границы $w_3 = 0$, то $w \equiv 0$.

Итак, при граничных условиях (1.16) обращение в нуль тензора K влечет за собой обращение в нуль составляющей смещения w_3. Выясним, что получится, если потребовать еще, чтобы E = 0. Так как уже доказано, что $w_3 = 0$, то это требование дает

$$\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha_2} w_2 = 0, \qquad \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha_1} w_1 + \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_2} = 0 \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{w_1}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{w_2}{A}\right) = 0 \tag{1.18}$$

Из (1.18) вытекает существование такой функции φ, что

$$w_1 = A\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \qquad w_2 = -A\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}$$

Подставим это в уравнение (1.18):

$$A\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = 0, \qquad A\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = 0$$

Складывая это, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} = 0$$

Таким образом, φ — гармоническая функция переменных α_1 и α_2 в области изменения этих переменных. Граничные условия $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ показывают, что на части контура указанной области обе производные от φ исчезают; поэтому $\varphi = \text{const}$ и, следовательно, $w_1 \equiv 0$, $w_2 \equiv 0$.

§ 2. Оператор теории оболочек. Будем рассматривать оболочку, край которой закреплен либо целиком, либо частично. В последнем случае допустим, что незакрепленная часть края свободна от действия внешних сил.

Обычными средствами [2] можно убедиться, что дифференциальные уравнения равновесия оболочки и «динамические» краевые усилия можно получить из принципа минимума потенциальной энергии. Уравнения равновесия оболочки мы запишем символически в виде

$$P\mathbf{w} = \mathbf{q} \tag{2.1}$$

Дифференциальный оператор P назовем *оператором теории оболочек.*

Заметим сразу же, что при $L = M = N = 0$ уравнение (2.1) переходит в совокупность уравнений равновесия плоской пластины в криволинейных координатах α_1, α_2.

Введем в рассмотрение вещественное гильбертово пространство[1], элементы которого суть векторы, определяемые в точках поверхности S. Скалярное произведение и норму в этом пространстве зададим формулами.

$$(\mathbf{w}', \mathbf{w}'') = \iint_S (w_1' w_1'' + w_2' w_2'' + w_3' w_3'')\, dS$$

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \iint_S (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)\, dS \tag{2.2}$$

Из общих основ вариационного метода вытекает (это легко проверить и непосредственно) следующее: на множестве векторов смещений, удовлетворяющих перечисленным в начале этого параграфа краевым условиям, оператор теории оболочек удовлетворяет тождеству

$$(P\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 2\,Э(\mathbf{w}) \tag{2.3}$$

при этом он симметричен, т. е.

$$(P\mathbf{w}_1', \mathbf{w}'') = (\mathbf{w}', P\mathbf{w}'')$$

и положителен, т. е. $(P\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geqslant 0$ и $(P\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{w} = 0$.

Рассмотрим, в частности, тот случай, когда оболочка вырождается в плоскую пластину, и докажем, что соответствующий этому случаю оператор, который мы обозначим через P_0, положительно-определенный, т. е. что

$$(P_0\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geqslant \gamma^2 \iint_{S_0} (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)\, dS_0, \qquad \gamma^2 = \text{const} > 0$$

где S_0 — срединная плоскость пластины. Проще всего это сделать, введя декартовы координаты x_1 и x_2. Тогда

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\varkappa_{11} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2}, \qquad \varkappa_{22} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2}, \qquad \varkappa_{12} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1 \partial x_2}$$

и

$$(P_0\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\iint_{S_0}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right)^2 + 2\sigma\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)^2 + \right. \tag{2.4}$$

$$\left. + \frac{1}{2}(1-\sigma)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right)^2\right\} dS_0 + \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\iint_{S_0}\left\{\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\sigma\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right\} dS_0$$

Оценим сперва второй интеграл в (2.4), который для краткости обозначим через J_2.

---

[1] Необходимые сведения из теории операторов в гильбертовом пространстве можно найти в книге В. И. Смирнова [3] и отчасти в книге автора [2].

При любых вещественных a и b имеет место неравенство

$$2ab \geqslant -(a^2 + b^2)$$

Отсюда

$$2\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2} \geqslant -\left[\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2}\right)^2\right]$$

и, следовательно,

$$J_2 \geqslant (1-\sigma) D \iint_{S_0} \left[\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dS_0 \qquad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\right) \tag{2.5}$$

Обозначим через L_0 контур области S_0 и через L_0' — закрепленную часть контура L_0. Пусть теперь $w(x_1, x_2)$ — некоторая функция, непрерывно дифференцируемая в замкнутой области $S_0 + L_0$ и равная нулю на L_0'. Докажем, что для такой функции имеет место неравенство

$$\iint_{S_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2\right] dS_0 \geqslant \gamma^2 \iint_{S_0} w^2 dS_0 \tag{2.6}$$

где γ — постоянная, не зависящая от w. Для доказательства воспользуемся одной из так называемых «теорем вложения» С. Л. Соболева [4]. Примененная к нашему случаю, эта теорема утверждает существование такой постоянной $\gamma > 0$, что для любой функции u выполняется неравенство

$$\iint_{S_0} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] dS_0 \geqslant \gamma^2 \left[\iint_{S_0} u^2 dS_0 + \left(\int_{L_0'} u\, ds\right)^2\right]$$

Полагая здесь $u = w$, где $w = 0$ на L_0', мы придем к неравенству (2.6). Граничные условия позволяют применить неравенство (2.6) к функциям $\partial w_3 / \partial x_1$ и $\partial w_3 / \partial x_2$. Это дает нам

$$\iint_{S_0} \left\{\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right\} dS_0 \geqslant \gamma^2 \iint_{S_0} \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)^2 dS_0$$

$$\iint_{S_0} \left\{\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x_2^2}\right)^2\right\} dS_0 \geqslant \gamma^2 \iint_{S_0} \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right)^2 dS_0$$

Складывая и умножая на $(1-\sigma) D$, получим

$$J_2 \geqslant (1-\sigma) D\gamma^2 \iint_{S_0} \left\{\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right)^2\right\} dS_0$$

Но к функции w_3 также можно применить неравенство (2.6). Имеем

$$\iint_{S_0} \left\{\left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2}\right)^2\right\} dS_0 \geqslant \gamma^2 \iint_{S_0} w_3^2 dS_0$$

Следовательно,

$$J_2 \geqslant (1-\sigma) D\gamma^4 \iint_{S_0} w_3^2\, dS_0 \tag{2.7}$$

Обратимся в (2.4) к первому интегралу, который обозначим через J_1. Из теоремы, доказанной Д. М. Эйдусом [5], вытекает существование такой постоянной γ', что

$$J_1 \geqslant \gamma'^2 \iint\limits_{S_0} (w_1^2 + w_2^2)\, dS_0 \tag{2.8}$$

Пусть γ^* обозначает меньшую из величин $(1-\sigma) D\gamma^4$ и γ'^2. Тогда, складывая (2.7) и (2.8), мы легко придем к неравенству

$$(P_0 \mathbf{w}, \mathbf{w}) \geqslant \gamma^* \|\mathbf{w}\|^2 \tag{2.9}$$

которое и обозначает, что оператор P_0 — положительно-определенный.

Практически величину γ^* можно определить как меньшее из чисел λ_1 и λ_2, где λ_1 — наименьшее собственное число задачи об изгибных колебаниях пластины, а λ_2 — наименьшее собственное число задачи о колебаниях пластины в ее плоскости. Числа λ_1 и λ_2 могут быть определены с достаточной точностью хотя бы по методу Ритца.

§ 3. Общие теоремы об оценке погрешности. Пусть H — гильбертово пространство и A — оператор в H положительный и самосопряженный. Обозначим через $\sqrt{A}$ положительный оператор [1], квадрат которого равен A. Построим далее гильбертово пространство H_0 как замыкание области[2] $D(A)$ в метрике со скалярным произведением [3] и нормой

$$[u, v] = (Au, v), \qquad |u|^2 = (Au, u) \tag{3.1}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если оператор A — положительно-определенный, то область $D(\sqrt{A})$ совпадает с множеством элементов пространства H_0.

Пусть A и B — самосопряженные в H операторы, из которых A — положительно-определенный, а B — положительный, причем:

1) область задания оператора $\sqrt{A}$ есть часть области $D(\sqrt{B})$;

2) существуют такие вещественные постоянные δ' и δ'', что

$$-\delta'(Au, u) \leqslant (Bu, u) - (Au, u) \leqslant \delta''(Au, u) \tag{3.2}$$

Составим оператор $Z = \sqrt{B}\sqrt{A^{-1}}$.

Лемма. Симметричный оператор

$$Y = Z^*Z - I = (\sqrt{A^{-1}}\sqrt{B})(\sqrt{B}\sqrt{A^{-1}}) - I \tag{3.3}$$

ограничен снизу и сверху числами $-\delta'$ и δ''.

---

[1] Построение $\sqrt{A}$ в общем случае неэлементарно и обычно опирается на спектральную теорию операторов. Можно, однако, указать случай, когда $\sqrt{A}$ строится просто: пусть λ_n и φ_n — собственные числа и функции оператора A; последние предполагаем ортогональными и нормированными. Если последовательность φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — замкнутая, то, как можно доказать,

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u, \varphi_n)\varphi_n, \qquad \sqrt{A}\cdot u = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}(u, \varphi_n)\varphi_n$$

[2] Символом $D(K)$ обозначаем область задания произвольного оператора K.

[3] О построении и свойствах пространства H_0 см., например, нашу книгу [2].

В равенстве (3.3) через I обозначен тождественный оператор.

Положим (3.2) $v = \sqrt{A}u$. Тогда

$$(Au, u) = (\sqrt{A}v, \sqrt{A^{-1}}v) = (v, \sqrt{A}\sqrt{A^{-1}}v) = (v, v) = \| v \|^2,$$

$$(Bu, u) = (B\sqrt{A^{-1}}v, \sqrt{A^{-1}}v) = (\sqrt{A^{-1}}\sqrt{B})(\sqrt{B}\sqrt{A^{-1}}v, v) = (Z^*Zv, v)$$

Подставив это в (3.2), получим

$$-\delta' \| v \|^2 \leqslant (Yv, v) \leqslant \delta'' \| v \|^2$$

что доказывает лемму.

Пусть $\delta' < 1$. Из неравенства (3.2) вытекает, что

$$(Bu, u) > (1 - \delta')(Au, u)$$

и так как A — положительно-определенный оператор, то таким же будет и оператор B. Рассмотрим уравнение

$$Bu = f \tag{3.4}$$

где f — произвольный элемент пространства H. Уравнение (3.4) разрешимо, так же как и уравнение

$$Au_0 = f \tag{3.5}$$

в силу положительной определенности операторов A и B. Оценим погрешность в решении, проистекающую от замены уравнения (3.4) уравнением (3.5), точнее говоря, оценим величину $|u - u_0|$. Положим в (3.4) $u = \sqrt{A^{-1}}v$ и умножим полученное уравнение слева на $\sqrt{A^{-1}}$. Мы придем тогда к уравнению

$$(I + Y)v = v_0, \qquad v_0 = \sqrt{A^{-1}}f \tag{3.6}$$

Так как $\delta' < 1$, то существует оператор $(I + Y)^{-1}$; по известной теореме о функциях от оператора спектр оператора $(I + Y)^{-1} - I$ заключен в отрезке

$$\left(-\frac{\delta'}{1 - \delta'}, \frac{\delta''}{1 + \delta''}\right)$$

Но тогда

$$\| (I + Y)^{-1} - I \| = \max\left\{\frac{|\delta'|}{1 + \delta''}, \frac{|\delta''|}{1 - \delta''}\right\} = \eta \tag{3.7}$$

Из уравнения (3.6) следует

$$v - v_0 = [(I + Y)^{-1} - I]v_0$$

Отсюда

$$\| v - v_0 \|^2 \leqslant \eta^2 \| v_0 \|^2$$

Положим в этом неравенстве $v = \sqrt{A}u$, $v_0 = \sqrt{A}u_0$. Тогда получим

$$\| v_0 \|^2 = (\sqrt{A}u_0, \sqrt{A}u_0) = (Au_0, u_0) = |u_0|^2$$

Аналогично, имеем $\| v - v_0 \|^2 = |u - u_0|^2$; таким образом, получим искомую оценку:

$$|u - u_0| \leqslant \eta |u_0| \tag{3.8}$$

§ 4. Оболочки, близкие к пластинам. Пусть даны оболочка со срединной поверхностью S и плоская пластина, вырезающая в своей срединной плоскости область S_0; контуры поверхностей S и S_0 обозначим через L и L_0 соответственно. Введем на поверхности S и в плоской области S_0 одни и те же координаты α_1, α_2; допустим при этом, что эти координаты — ортогональные[1] как на S, так и на S_0 и что область изменения переменных α_1 и α_2 — одна и та же в обоих случаях. Это позволяет трактовать любую функцию, определенную на S (или L) как функцию точки области S_0 (или контура L_0). Допустим далее, что как к пластине, так и к оболочке приложена одна и та же нагрузка $\mathbf{q}(\alpha_1, \alpha_2)$ и что краевые условия, которые мы предполагаем однородными, тождественны в точках контуров L и L_0 с одинаковыми координатами. Пусть при этих условиях нагрузка $\mathbf{q}$ порождает векторы смещений: $\mathbf{w}$ в оболочке и $\mathbf{w}_0$ в пластине. Результаты предшествующего параграфа позволяют оценить величину

$$\frac{\mathcal{E}_0(\mathbf{w}-\mathbf{w}_0)}{\mathcal{E}_0(\mathbf{w}_0)}$$

где $\mathcal{E}_0$ — потенциальная энергия деформации пластины S_0, или, что то же, оценить погрешность в среднем при определении напряжений, если для их расчета оболочка S заменяется пластиной S_0.

Оператор P теории оболочек определен на множестве векторов, которые удовлетворяют краевым условиям вдоль контура L; аналогично оператор P_0 теории пластин имеет своей областью задания множество векторов, удовлетворяющих краевым условиям вдоль контура L_0. Указанные множества векторов совпадают лишь в том случае, когда контур L (а следовательно, и L_0) жестко закреплен: в этом случае краевые условия как на контуре L, так и на контуре L_0 сводятся к следующим:

$$w_1 = w_2 = w_3 = 0, \qquad \frac{\partial w_3}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на } L_0 \tag{4.1}$$

где ν — нормаль к L_0. Если же закреплена только часть контура, скажем, L' (соответственно L_0'), то на L' и L_0' краевые условия совпадают и имеют вид (4.1); на дополнительных частях контуров краевые условия различны. Отсюда следует, что в этом случае области задания операторов P и P_0 различны.

Исследуем области задания операторов $\sqrt{P}$ и $\sqrt{P_0}$. Построим пространство H_0 как замыкание области задания оператора P_0 в метрике со скалярным произведением и нормой:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (P_0\mathbf{u}, \mathbf{v}), \qquad |\mathbf{u}|^2 = (P_0\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 2\mathcal{E}_0(\mathbf{u}) \tag{4.2}$$

Так как условие на свободной части контура — естественное, то пространство H_0 состоит из векторов, сообщающих потенциальной энергии деформации конечное значение и удовлетворяющих условиям (4.1) на закрепленной части контура[2]. По теореме 1 § 3 эти же векторы образуют область задания оператора $\sqrt{P_0}$.

[1] От этого ограничения можно освободиться.

[2] Доказательство этого утверждения дано в работе [6].

Аналогичные рассуждения показывают, что та же совокупность векторов образует область задания оператора $\sqrt{P}$.

Как это следует из результатов § 3, мы оценим интересующую нас погрешность, если найдем такие числа δ' и δ'', что

$$-\delta'(P_0\mathbf{w}, \mathbf{w}) \leqslant (P\mathbf{w}, \mathbf{w}) - (P_0\mathbf{w}, \mathbf{w}) \leqslant \delta''(P_0\mathbf{w}, \mathbf{w})$$

или, что то же:

$$-\delta' Э_0(\mathbf{w}) \leqslant Э(\mathbf{w}) - Э_0(\mathbf{w}) \leqslant \delta'' Э_0(\mathbf{w}) \tag{4.3}$$

Для этого поступаем следующим образом. Будем отличать кружочком, поставленным сверху, величины, относящиеся к срединной поверхности пластины. По формуле (1.11) имеем, например.

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} w_2 - \frac{L}{A_1{}^2} w_3$$

$$\varepsilon_{11}{}^\circ = \frac{1}{A_1{}^\circ}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1{}^\circ A_2{}^\circ}\frac{\partial A_1{}^\circ}{\partial \alpha_2} w_2$$

Отсюда

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}{}^\circ + \left(\frac{A_1{}^\circ}{A_1} - 1\right)\varepsilon_{11}{}^\circ + \frac{1}{A_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2{}^\circ}\frac{\partial A_1{}^\circ}{\partial \alpha_2}\right) w_2 - \frac{L}{A_1{}^2} w_3 \tag{4.4}$$

Аналогичное выражение можно получить для ε_{22}; выражение для ε_{12} будет несколько сложнее:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}{}^\circ + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_2{}^\circ}\right)\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_1{}^\circ}\right)\frac{\partial w_2}{\partial \alpha_1} - \right. \tag{4.5}$$

$$\left. - \left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1{}^\circ A_2{}^\circ}\frac{\partial A_1{}^\circ}{\partial \alpha_2}\right) w_1 - \left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1{}^\circ A_2{}^\circ}\frac{\partial A_2{}^\circ}{\partial \alpha_1}\right) w_2 - \frac{M}{A_1A_2} w_3\right\}$$

Будем считать, что оболочка S близка по форме к плоской пластине S_0; именно, мы примем, что величины

$$|A_i - A_i{}^\circ|, \quad \left|\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial A_i{}^\circ}{\partial \alpha_k}\right|, \quad |L|, \quad |M|, \quad |N|$$

не превосходят некоторой достаточно малой постоянной γ.

Введем обозначения

$$U^{(\varepsilon)} = \varepsilon_{11}{}^2 + 2\sigma\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}{}^2 + 2(1-\sigma)\varepsilon_{12}{}^2$$

$$U^{(\varkappa)} = \varkappa_{11}{}^2 + 2\sigma\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{22}{}^2 + 2(1-\sigma)\varkappa_{12}{}^2$$

Через $U_0{}^{(\varepsilon)}$ и $U_0{}^{(\varkappa)}$ обозначаем результат замены ε_{ik} на $\varepsilon_{ik}{}^\circ$ и $\varkappa_{ik}$ на $\varkappa_{ik}{}^\circ$ в выражениях $U^{(\varepsilon)}$ и $U^{(\varkappa)}$.

Далее положим

$$2Э^{(\varepsilon)} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\iint\limits_S U^{(\varepsilon)} dS, \qquad 2Э^{(\varkappa)} = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\iint\limits_S U^{(\varkappa)} dS$$

$$2Э_0{}^{(\varepsilon)} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}\iint\limits_{S_0} U_0{}^{(\varepsilon)} dS_0, \qquad 2Э_0^{(\varkappa)} = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma)^2}\iint\limits_{S_0} U_0{}^{(\varkappa)} dS_0$$

Очевидно,

$$Э = Э^{(\varepsilon)} + Э^{(\varkappa)}, \qquad Э_0 = Э_0{}^{(\varepsilon)} + Э_0{}^{(\varkappa)}$$

Подставив (4.4) и (4.5) в $U^{(\varepsilon)}$ и учитывая, что $U_0^{(\varepsilon)}$ — положительная форма, легко получим оценку вида

$$\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left|U^{(\varepsilon)}-U_0^{(\varepsilon)}\right| \leqslant C_1\gamma h\left\{U_0^{(\varepsilon)}+w_1^2+w_2^2+w_3^2+\left(\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_2}\right)^2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial \alpha_1}\right)^2\right\}$$

где C_1 — некоторая постоянная [1]. Проинтегрировав последнее неравенство по S_0, получим

$$\left|\frac{Eh}{1-\sigma^2}\iint\limits_{S_0} U^{(\varepsilon)}dS_0-2Э_0^{(\varepsilon)}\right| \leqslant C_1\gamma\left\{2Э_0^{(\varepsilon)}+\right.$$
$$\left.+h\iint\limits_{S_0}\left[w_1^2+w_2^2+w_3^2+\left(\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_2}\right)^2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial \alpha_1}\right)^2\right]dS_0\right\} \tag{4.6}$$

Для упругого тела, закрепленного по части границы, верно так называемое неравенство Корна [2], из которого для случая плоской пластины следует, в частности, неравенство

$$h\iint\limits_{S_0}\left\{\left(\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_2}\right)^2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial \alpha_1}\right)^2\right\}dS_0 \leqslant C_2 2Э_0^{(\varepsilon)} \tag{4.7}$$

Далее, как это следует из «теорем вложения» С. Л. Соболева [4], для всякой функции $u(\alpha_1, \alpha_2)$, равной нулю на части контура области S_0, имеет место неравенство

$$\iint\limits_{S_0} u^2 dS_0 \leqslant C_3\iint\limits_{S_0}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_2}\right)^2\right\}dS_0 \tag{4.8}$$

В сочетании с неравенством Корна неравенство (4.8) дает

$$h\iint\limits_{S_0}(w_1^2+w_2^2)\,dS_0 \leqslant C_3 h\iint\limits_{S_0}\sum_{i,k=1}^{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_k}\right)^2 dS_0 < C_4 2Э_0^{(\varepsilon)} \tag{4.9}$$

Неравенства (4.7) и (4.9) позволяют преобразовать формулу (4.6) к виду

$$\left|\frac{Eh}{1-\sigma^2}\iint\limits_{S_0} U^{(\varepsilon)}dS_0-2Э_0^{(\varepsilon)}\right| \leqslant C_5\gamma 2Э_0^{(\varepsilon)}+C_1\gamma h\iint\limits_{S_0} w_3^2 dS_0 \tag{4.10}$$

В силу граничного условия (4.1) неравенство (4.8) верно для функции w_3, а также и для ее производных $\partial w_3/\partial\alpha_1$ и $\partial w_3/\partial\alpha_2$.

Отсюда легко получить неравенство

$$C_1\iint\limits_{S_0} w_3^2 dS_0 \leqslant C_6\iint\limits_{S_0} U_0^{(\varkappa)}dS_0=\frac{C_7}{h^2}2Э_0^{(\varkappa)}$$

Подставив это в (4.10), получим окончательно

$$\left|\frac{Eh}{1-\sigma^2}\iint\limits_{S_0} U^{(\varepsilon)}dS_0-2Э_0^{(\varepsilon)}\right| \leqslant C_5\gamma 2Э_0^{(\varepsilon)}+\frac{C_7\gamma}{h^2}2Э_0^{(\varkappa)} \tag{4.11}$$

---

[1] Здесь и ниже буквой C с тем или иным индексом будем обозначать постоянную, зависящую только от вида области S и условий ее закрепления.

[2] Доказательство неравенства Корна для этого случая см. [5].

Из формул (1.10) нетрудно извлечь, что

$$\varkappa_{ik} = \varkappa_{ik}{}^{\circ} + a_{ik}\varkappa_{ik}{}^{\circ} + b_{ik}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} + c_{ik}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}$$

где a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} сколь угодно малы при достаточно малой γ. Подставив это в $U^{(\varkappa)}$ и интегрируя, получим

$$\left|\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\iint\limits_{S_0} U^{(\varkappa)}\,dS_0 - 2\mathcal{Э}_0{}^{(\varkappa)}\right| < C_8\gamma\left\{2\mathcal{Э}_0{}^{(\varkappa)} + h^3\iint\limits_{S_0}\left[\left(\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}\right)^2 dS_0\right\}$$

Последний интеграл легко оценивается через $\mathcal{Э}_0{}^{(\varkappa)}$; получаем

$$\left|\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\iint\limits_{S_0} U^{(\varkappa)}\,dS - 2\mathcal{Э}_0{}^{(\varkappa)}\right| < C_9\gamma 2\mathcal{Э}_0{}^{(\varkappa)} \tag{4.12}$$

Сложив неравенства (4.11) и (4.12), имеем

$$\left|\iint\limits_{S_0}\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(U^{(\varepsilon)} + \frac{h^2}{12}U^{(\varkappa)}\right)dS_0 - 2\mathcal{Э}_0\right| \leqslant \left(C_{10} + \frac{C_7}{h^2}\right)\gamma\, 2\mathcal{Э}_0 = \Gamma\gamma\, 2\mathcal{Э} \tag{4.13}$$

$$\left(\Gamma = C_{10} + \frac{C_7}{h^2}\right)$$

Рассмотрим теперь величину

$$2\mathcal{Э} = \iint\limits_{S}\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(U^{(\varepsilon)} + \frac{h^2}{12}U^{(\varkappa)}\right)dS \tag{4.14}$$

Имеем

$$dS = A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2, \qquad dS_0 = A_1{}^{\circ}A_2{}^{\circ}\,d\alpha_1\,d\alpha_2$$

Отсюда

$$dS = \frac{A_1A_2}{A_1{}^{\circ}A_2{}^{\circ}}\,dS_0 = (1+B)\,dS_0 \tag{4.15}$$

где величина B сколь угодно мала при достаточно малой γ. Пусть $C_{11}\gamma \leqslant B \leqslant C_{12}\gamma$. По формуле (4.14)

$$2\mathcal{Э} = \iint\limits_{S_0}\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(U^{(\varepsilon)} + \frac{h^2}{12}U^{(\varkappa)}\right)(1+B)\,dS_0 \tag{4.16}$$

Отсюда

$$C_{11}\gamma\iint\limits_{S_0}\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(U^{(\varepsilon)} + \frac{h^2}{12}U^{(\varkappa)}\right)dS_0 \leqslant \tag{4.17}$$

$$\leqslant 2\mathcal{Э} - \iint\limits_{S_0}\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(U^{(\varepsilon)} + \frac{h^2}{12}U^{(\varkappa)}\right)dS \leqslant C_{12}\gamma\iint\limits_{S_0}\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(U^{(\varepsilon)} + \frac{h^2}{12}U^{(\varkappa)}\right)dS_0$$

Из (4.13) получаем

$$2\mathcal{Э}_0(1-\Gamma\gamma) \leqslant \iint\limits_{S_0}\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(U^{(\varepsilon)} + \frac{h^2}{12}U^{(\varkappa)}\right)dS_0 \leqslant 2\mathcal{Э}_0(1+\Gamma\gamma)$$

Подставим это в (4.17): (4.18)

$$2\mathcal{Э}_0C_{11}\gamma(1-\Gamma\gamma) \leqslant 2\mathcal{Э} - \iint\limits_{S_0}\frac{Eh}{1-\sigma^2}\left(U^{(\varepsilon)} + \frac{h^2}{12}U^{(\varkappa)}\right)dS_0 \leqslant 2\mathcal{Э}_0C_{12}\gamma(1+\Gamma\gamma)$$

Сложив это с (4.13), получим окончательно

$$-\delta'\mathcal{Э}_0 \leqslant \mathcal{Э} - \mathcal{Э}_0 \leqslant \delta''\mathcal{Э}_0 \tag{4.19}$$

где

$$\delta' = \gamma[\Gamma - C_{11}(1-\Gamma\gamma)], \qquad \delta'' = \gamma[\Gamma + C_{12}(1+\Gamma\gamma)]$$

Если $\delta' < 1$, то относительная средняя квадратичная погрешность при определении напряжений, возникающая от замены оболочки S пластиной S_0, не превосходит величины

$$\eta = \max\left(\frac{|\delta'|}{1-\delta'}, \quad \frac{|\delta''|}{1+\delta''}\right)$$

что следует из формулы (3.8).

Заметим, что величина η будет тем меньше, чем больше толщина оболочки h; таким образом, если в указанном выше смысле оболочка по форме близка к пластине, то напряжения в оболочке будут, вообще говоря, тем ближе к напряжениям в соответствующей пластине, чем оболочка толще. В конкретных случаях наши оценки можно уточнить.

§ 5. Чисто-моментное состояние оболочки. Пример геликоидальной оболочки. Оценка погрешности значительно упрощается, если оболочка находится в чисто-моментном состоянии, так что $\varepsilon_{ik} = 0$. Предполагая попрежнему толщину h оболочки постоянной, найдем, что в этом случае наша оценка погрешности не зависит от h. Для примера рассмотрим оболочку, срединная поверхность S которой есть часть прямого геликоида

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = \zeta\theta \tag{5.1}$$

определяемая неравенствами

$$\rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1, \qquad -\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \tag{5.2}$$

где ρ_0, ρ_1, θ_0 — положительные постоянные. Линии $\rho = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ на геликоиде ортогональны, мы их примем за координатные, а ρ и θ — за криволинейные координаты и положим $\alpha_1 = \rho$, $\alpha_2 = \theta$. В координатах ρ и θ элемент длины линии, лежащей на геликоиде (5.1), определяется формулой

$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + \zeta^2)\,d\theta^2$$

так что

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \tag{5.3}$$

По формулам (1.10) имеем

$$\varkappa_{11} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial\rho^2}, \qquad \varkappa_{22} = -\frac{1}{\rho^2+\zeta^2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial\theta^2} - \frac{\rho}{\rho^2+\zeta^2}\frac{\partial w_3}{\partial\rho} \tag{5.4}$$

$$\varkappa_{12} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}\frac{\partial^2 w_3}{\partial\rho\,\partial\theta} + \sqrt{\rho^2+\zeta^2}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho^2+\zeta^2}\frac{\partial w_3}{\partial\theta}\right)\right\}$$

В последующем будем писать w вместо w_3.

Оценим погрешность, возникающую от замены оболочки S плоской пластиной S_0, которая имеет форму части кругового кольца, определяемой неравенствами (5.2) и имеющей ту же толщину, что и данная оболочка. Для определенности допустим, что край $\rho = \rho_0$ жестко закреплен, а остальная часть края свободна. Имеем

$$2\mathcal{E} = \iint_S D\left(\varkappa_{11}^2 + 2\sigma\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{22}^2 + 2(1-\sigma)\varkappa_{12}^2\right)dS \qquad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\right) \tag{5.5}$$

Аналогично

$$2\mathcal{E}_0 = \iint\limits_{S_0} D\left(\varkappa_{11}^{\circ 2} + 2\sigma\varkappa_{11}^{\circ}\varkappa_{22}^{\circ} + \varkappa_{22}^{\circ} + 2(1-\sigma)\varkappa_{12}^{\circ 2}\right) dS_0. \tag{5.6}$$

величины $\varkappa_{ik}^{\circ}$ определяются формулами

$$\varkappa_{11}^{\circ} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial \rho^2}, \qquad \varkappa_{22}^{\circ} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial w_3}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w_3}{\partial \theta^2}$$

$$\varkappa_{12}^{\circ} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w_3}{\partial \rho\,\partial \theta} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial w_3}{\partial \theta}\right)\right\}$$

которые получаются из формул (5.4) при $\zeta = 0$. Легко видеть, что

$$\varkappa_{11} = \varkappa_{11}^{\circ}, \quad \varkappa_{22} = (1-r)\varkappa_{22}^{\circ}, \quad \varkappa_{12} = (1-s)\varkappa_{12}^{\circ} - t\frac{1}{\rho\rho_0}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{5.7}$$

где

$$r = \frac{\zeta^2}{\rho^2+\zeta^2}, \quad s = \frac{\zeta^2}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}\,(\sqrt{\rho^2+\zeta^2}+\rho)}, \quad t = \frac{\rho_0\zeta^4}{\rho(\rho^2+\zeta^2)(\sqrt{\rho^2+\zeta^2}+\rho)^2} = \frac{\rho_0}{\rho}s^2 \tag{5.8}$$

Обозначим через V и V_0 подинтегральные функции в (5.5) и (5.6) соответственно. По формулам (5.7) находим

$$V = V_0 - D\left[(2r - r^2)\varkappa_{22}^{\circ 2} + 2\sigma r\varkappa_{11}^{\circ}\varkappa_{22}^{\circ}\right] - 2(1-\sigma)D\Big[(2s - s^2)\varkappa_{12}^{\circ 2} +$$
$$+ 2(1-s)t\varkappa_{12}^{\circ}\left(\frac{1}{\rho\rho_0}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - t^2\left(\frac{1}{\rho\rho_0}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\Big] = V_0 - DF_1 - 2(1-\sigma)DF_2 \tag{5.9}$$

Выражения F_1 и F_2 оценим сверху и снизу, сравнивая их в конечном счете с V_0. Положим

$$A = \varkappa_{11}^{\circ 2} + 2\sigma\varkappa_{11}^{\circ}\varkappa_{22}^{\circ} + \varkappa_{22}^{\circ 2}$$

Тогда, как известно из теории квадратичных форм: $\lambda' A \leqslant F_1 \leqslant \lambda'' A$, где λ' и λ'' — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \sigma(r-\lambda) \\ \sigma(r-\lambda) & 2r - r^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Будем считать величину ζ/ρ_0 достаточно малой. Тогда и величина r будет малой. Нетрудно видеть, что при этом условии λ' убывает, а λ'' возрастает при возрастании r. Пусть $r_0 = r^2/(\rho_0^2 + r^2)$, а λ_0' и λ_0'' — значения λ' и λ'' при $\rho = \rho_0$. Тогда, очевидно,

$$\lambda_0' A \leqslant F_1 \leqslant \lambda_0'' A$$

Чтобы сделать наши дальнейшие оценки более отчетливыми, зададимся какими-либо численными значениями. Пусть, например, $\sigma = 0.30$, $\zeta/\rho_0 = 0.25$, $\rho_0/\rho_1 = 0.5$. Тогда $\lambda_0' = 0.0023$ и $\lambda_0'' = 0.1161$, так что

$$-0.0023A \leqslant F_1 \leqslant 0.1161A \tag{5.10}$$

Оценим величину F_2. Коэффициент t^2 очень мал и третий член в F_2 можно отбросить без заметного ущерба для точности. Остальные коэффициенты достигают максимума при $\rho = \rho_0$. Соответствующие коэффициенты обозначим через s_0 и $t_0 = s_0^2$. При $\zeta / \rho = 0.25$ имеем $s_0 = 0.0299$ и

$$|F_2| \leqslant 0.0589 \varkappa_{12}^{\circ 2} + 0.0017 |\varkappa_{12}^{\circ}| \left| \frac{1}{\rho\rho_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right| <$$
$$< (0.0589 + 0.0009\varepsilon) \varkappa_{12}^{\circ 2} + \frac{0.0009}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho\rho_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2$$

Выберем ε так, чтобы $0.0589 + 0.0009\varepsilon = 0.1161$. Отсюда $\varepsilon = 63.55$ и

$$|F_2| < 0.1161 \varkappa_{12}^{\circ 2} + 0.00002 \left(\frac{1}{\rho\rho_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \tag{5.11}$$

Из (5.10) и (5.11) теперь легко усмотреть, что

$$-0.1161 \cdot 2\mathcal{E}_0 - \frac{0.00004\,(1-\sigma)\,D}{\rho_0^2} \iint\limits_{S_0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 dS_0 \leqslant \iint\limits_{S_0} V dS - 2\mathcal{E}_0 \leqslant$$
$$\leqslant 0.1161 \cdot 2\mathcal{E}_0 + \frac{0.00004\,(1-\sigma)\,D}{\rho_0^2} \iint\limits_{S_0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 dS_0 \tag{5.12}$$

Оценим интеграл, стоящий справа в (5.12). Пусть $u(\rho, \theta)$ — произвольная функция, непрерывно дифференцируемая в S_0 и равная нулю при $\rho = \rho_0$. Тогда

$$u(\rho, \theta) = \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial u(\rho', \theta)}{\partial \rho'} dS' = \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{\rho'} \frac{\partial u(\rho', \theta)}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho'}{\sqrt{\rho'}}$$

по неравенству Буняковского

$$u^2(\rho, \theta) \leqslant \ln \frac{\rho}{\rho_0} \int\limits_{\rho_0}^{\rho_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 \rho\, d\rho$$

Интегрируя это по области S_0, получим

$$\iint\limits_{S_0} u^2 dS_0 \leqslant K\rho_0^2 \iint\limits_{S_0} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)^2 dS_0 \leqslant K\rho_0^2 \iint\limits_{S_0} (\operatorname{grad} u)^2 dS_0 \tag{5.13}$$

где

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^2 + 1 \tag{5.14}$$

В (5.13) положим последовательно $u = \partial w / \partial x$ и $u = \partial w / \partial y$, где x, y — декартовы координаты. Умножим на D и сложим полученные неравенства:

$$D \iint\limits_{S_0} (\operatorname{grad} w)^2 dS_0 \leqslant K\rho_0^2 \iint\limits_{S_0} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dS_0$$

Нетрудно убедиться, что интеграл справа не превосходит величины $2\mathcal{E}_0 / (1 - \sigma)$. Теперь

$$\frac{D(1-\sigma)}{\rho_0^2} \iint\limits_{S_0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 dS_0 \leqslant \frac{D(1-\sigma)}{\rho_0^2} \iint\limits_{S_0} (\operatorname{grad} w)^2 dS_0 \leqslant 2K\mathcal{E}_0 \tag{5.15}$$

Подставим это в (5.12), имея в виду, что $K = 0.6363$ при $\rho_1 / \rho_0 = 2$; тогда вторые слагаемые в (5.12) слева и справа оказываются пренебрежимо малыми и мы получаем

$$-0.1161 \cdot 2\mathcal{E}_0 \leqslant \iint\limits_{S_0} V dS_0 - 2\mathcal{E}_0 \leqslant 0.1161 \cdot 2\mathcal{E}_0 \tag{5.16}$$

Следуя общей схеме § 4, найдем, что

$$0.078\cdot Э_0 \leqslant 2Э - \iint\limits_{S} V\,dS_0 \leqslant 0.0308\cdot 2Э_0$$

Наконец, складывая с (5.16), придем к окончательной оценке:

$$-0.1073\,Э_0 \leqslant Э - Э_0 \leqslant 0.1419\,Э_0 \tag{5.17}$$

Отсюда $\delta' = 0.1073$, $\delta'' = 0.1419$ и оценка погрешности

$$\eta = \max\left(\frac{0.1073}{1-0.1073};\quad \frac{0.1419}{1-0.1419}\right) = 18.3\%$$

Не лишено интереса, что эта оценка не зависит от угла θ_0, который может быть сколь угодно большим.

§ 6. О пологих оболочках. В неравенстве (4.19) величины δ' и δ'' имеют при γ достаточно малой оценку вида $(C' + C''/h^2)\gamma$, где C' и C'' — некоторые постоянные, зависящие только от вида пластины S и от условий закрепления края. Наличие делителя h^2 указывает на то, что напряжения в оболочке и в близкой к ней пластине могут существенно различаться, если толщина оболочки достаточно мала. Появление делителя h^2 в оценке погрешности связано, как это легко видеть из рассуждений § 4, с тем, что при переходе от оболочки S к пластине S_0 мы отбрасываем в формулах (1.11) члены, пропорциональные w_3. Но тогда можно из оценки погрешности устранить большое слагаемое C''/h^2, если указанные члены в выражениях деформаций сохранить. Как мы покажем в настоящем параграфе, таким путем можно получить уравнения равновесия пологих оболочек более простые, чем уравнения общей теории.

Как и в предыдущих параграфах, будем считать, что некоторые криволинейные координаты α_1, α_2 ортогональны как на срединной поверхности S оболочки, так и в срединной области S_0 пластины, и что область изменения переменных α_1 и α_2 — одна и та же как в S, так и в S_0. Для простоты допустим, что внутри и на границе S_0 координатные линии одного семейства не пересекаются, а координатные линии разных семейств пересекаются не более чем в одной точке. Пусть элемент длины на поверхности S и в плоскости S_0 определяются соответственно формулами

$$ds^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2, \qquad ds_0^2 = A_1^{\circ 2} d\alpha_1^2 + A_2^{\circ 2} d\alpha_2^2$$

Оболочку S назовем пологой, если величины

$$|A_i - A_i^\circ|, \qquad \left|\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial A_i^\circ}{\partial \alpha_k}\right| \qquad (i,\ k = 1,\ 2)$$

достаточно малы по сравнению с наименьшими значениями A_1° и A_2°.

Уравнения равновесия пологой оболочки будем строить следующим образом. В выражениях (1.11), определяющих деформации ε_{ik}, мы оставим без изменения члены, пропорциональные w_3; в остальных членах заменим A_i через A_i°. Обозначим для краткости

$$l_{11} = \frac{L}{A_1^2}, \qquad l_{12} = \frac{M}{A_1 A_2}, \qquad l_{22} = \frac{N}{A_2^2} \tag{6.1}$$

Величины l_{ik} суть составляющие в осях α_1 и α_2 двумерного симметричного тензора, главные оси которого суть касательные к линиям кривизны поверхности S, а главные значения совпадают с главными кривизнами этой поверхности. Для ε_{ik} получим упрощенные выражения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1^\circ}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1^\circ A_2^\circ}\frac{\partial A_1^\circ}{\partial \alpha_2} w_2 - l_{11} w_3 \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{A_1^\circ}{A_2^\circ}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{w_1}{A_1^\circ}\right) + \frac{A_2^\circ}{A_1^\circ}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{w_2}{A_2^\circ}\right)\right\} - l_{12} w_3 \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_1^\circ A_2^\circ}\frac{\partial A_2^\circ}{\partial A_1} w_1 + \frac{1}{A_2^\circ}\frac{\partial w_2}{\partial \alpha_2} - l_{22} w_3
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Точно так же, заменяя A_i через A_i° в выражениях (1.10), получим

$$\begin{aligned}
\varkappa_{11} &= -\frac{1}{A_1^\circ}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1^\circ}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1}\right) - \frac{1}{A_1^\circ A_2^{\circ 2}}\frac{\partial A_1^\circ}{\partial \alpha_2}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2} \\
\varkappa_{12} &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{A_1^\circ}{A_2^\circ}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_1^{\circ 2}}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{A_2^\circ}{A_1^\circ}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_2^{\circ 2}}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}\right)\right\} \\
\varkappa_{22} &= -\frac{1}{A_1^{\circ 2} A_2^\circ}\frac{\partial A_2^\circ}{\partial \alpha_1}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2^\circ}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2^\circ}\frac{\partial w_3}{\partial \alpha_2}\right)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

В формулах (6.2) и (6.3) мы вправе рассматривать α_1 и α_2 как координаты точек плоской области S_0. Для дальнейшего целесообразно перейти к декартовым координатам. Обозначив через l, m, n составляющие тензора (6.1) в этих координатах, имеем, очевидно,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x} - l w_3, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) - m w_3, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial w_2}{\partial y} - n w_3 \tag{6.4}$$

$$\varkappa_{11} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}, \qquad \varkappa_{12} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial x\,\partial y}, \qquad \varkappa_{22} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} \tag{6.5}$$

Здесь w_3 — смещение в направлении нормали к S_0, а w_1 и w_2 — смещения в направлениях осей x и y.

Упрощенные выражения (6.4) и (6.5) подставим в выражение потенциальной энергии оболочки, заменив в нем интегрирование по поверхности S интегрированием по области S_0 пластины. Уравнение равновесия, а также естественно краевые условия для пологой оболочки мы получаем, приравняв нулю вариацию ее потенциальной энергии.

Введем в рассмотрение величины T_{ik} и M_{ik}, определенные формулами

$$T_{11} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_{11} + \sigma\varepsilon_{22}), \qquad T_{12} = \frac{Eh}{1+\sigma}\varepsilon_{12}, \qquad T_{22} = \frac{Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_{22} + \sigma\varepsilon_{11}) \tag{6.6}$$

$$M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}(\varkappa_{11} + \sigma\varkappa_{22}), \qquad M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\sigma)}\varkappa_{12},$$

$$M_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}(\varkappa_{22} + \sigma\varkappa_{11}) \tag{6.7}$$

Величины T_{ik} назовем усилиями, а величины M_{ik} — моментами. Вариацию потенциальной энергии оболочки можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{S_0}\left[\sum_{i,k=1}^{2}(T_{ik}\delta\varepsilon_{ik} + M_{ik}\delta\varkappa_{ik}) - \mathbf{q}\delta\mathbf{w}\right] dS_0 - \\
&\quad - \int\limits_{L_0}\{T_1^{(\nu)}\delta w_1 + T_2^{(\nu)}\delta w_2 + T_3^{(\nu)}\delta w_3 + \mathbf{M}^{(\nu)}\,\mathrm{grad}\,\delta w\}\, dL_0
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Здесь L_0 — контур области S_0, $T_1^{(\nu)}$ и $T_2^{(\nu)}$ — составляющие по осям x и y вектора усилий, действующих в плоскости (x, y) и приложенных к контуру L_0, $T_3^{(\nu)}$ — приложенное к тому же контуру перерезывающее усилие и, наконец, $\mathbf{M}^{(\nu)}$ — приложенный к контуру момент. В интеграле (6.8) заменим δe_{ik} и $\delta \varkappa_{ik}$ по формулам (6.5) и (6.6) и затем приравняем его нулю. Обычным способом отсюда найдем естественные краевые условия, которые имеют здесь тот же вид, что и в общей теории пластин и оболочек, и дифференциальные уравнения равновесия.

Эти последние имеют вид:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} + q_1 = 0, \qquad \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + q_2 = 0 \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + lT_{11} + 2mT_{12} + nT_{13} + q_3 = 0 \tag{6.10}$$

Уравнения (6.9) и (6.10) можно упростить. Исключая моменты из уравнения (6.10) по формулам (6.7), получим

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \triangle^2 w - lT_{11} - 2mT_{12} - nT_{13} = q \tag{6.11}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа; мы пишем также w и q вместо w_3 и q_3.

Положим

$$Q = \int q_1(x, y)\, dx, \qquad Q_2 = \int q_2(x, y)\, dy \tag{6.12}$$

Из уравнений (6.9) вытекает существование функций напряжений $\varphi(x, y)$, связанной с усилиями следующими соотношениями:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Q, \qquad T_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}, \qquad T_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Q_2 \tag{6.13}$$

Подставив это в (6.11), получим уравнение, которому удовлетворяют функции w и φ:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \triangle^2 w - l\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2m\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} - n\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = q - lQ_1 - nQ_2 \tag{6.14}$$

Чтобы получить второе уравнение, связывающее те же величины, обратимся к формулам (6.6), из которых прежде всего находим

$$T_{11} + T_{22} = \frac{Eh}{1-\sigma}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

или по формулам (6.13)

$$\frac{Eh}{1-\sigma}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \triangle\varphi - (Q_1 + Q_2)$$

Теперь при помощи соотношений (6.4) и (6.13) можно формулы (6.6) привести к виду

$$\begin{gathered} Eh\frac{\partial w_1}{\partial x} = (1+\sigma)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \sigma\triangle\varphi + \sigma(Q_1 + Q_2) - (1+\sigma)Q_1 + Ehlw \\ -Eh\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right) = 2(1+\sigma)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} - 2Ehmw \\ Eh\frac{\partial w_2}{\partial y} = (1+\sigma)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sigma\triangle\varphi + \sigma(Q_1 + Q_2) - (1+\sigma)Q_2 + Ehnw \end{gathered} \tag{6.15}$$

Чтобы исключить отсюда w_1 и w_2, продифференцируем первое уравнение (6.15) дважды по y, второе — по x и по y, третье — дважды по x и сложим. Мы получим тогда еще одно уравнение для w и φ:

$$\Delta^2\varphi + Eh\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(lw) - 2m\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(mw) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(nw)\right] =$$
$$= (1+\sigma)\left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2}\right) - \sigma\Delta(Q_1+Q_2) \qquad (6.16)$$

Тензорный характер уравнений (6.14) и (6.16) очевиден, и их нетрудно преобразовать к любым криволинейным координатам.

В частном случае сферической оболочки $m=0$, $l=n=R^{-1}$, где R — радиус оболочки, и уравнения (6.14) и (6.16) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 w - a\Delta\varphi = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}\left[q - \frac{Q_1+Q_2}{R}\right] && \left(a = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3R}\right)\\
&\Delta^2\varphi + b\Delta w = (1+\sigma)\left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2}\right) - \sigma\Delta(Q_1+Q_2) && \left(b = \frac{Eh}{R}\right)
\end{aligned} \qquad (6.17)$$

Отличные от наших уравнения равновесия пологих оболочек были построены В. З. Власовым [1]. Ближе к нашим уравнения А. А. Назарова [7]. Этот автор рассматривал оболочку, уравнение срединной поверхности которой имеет вид: $z=\lambda f(x, y)$, где λ — малый параметр. Полагая, как и В. З. Власов, что на оболочку действует только нормальная нагрузка, упомянутый автор приходит к двум уравнениям. Одно из них отличается от нашего уравнения (6.14) (если отвлечься от различия, вызванного допущением А. А. Назарова, о нормальности нагрузки) только тем, что l, m, n заменены вторыми производными от z по x и y. Так как

$$l = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad m = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad n = \frac{1}{H}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad H = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

то указанная замена допустима, если толщина оболочки не мала. Второе уравнение А. А. Назарова отличается от нашего уравнения (6.16) еще и тем, что l, m, n вынесены за знак производной. Последнее обстоятельство является, повидимому, результатом ошибки.

Заметим, что уравнения (6.14) и (6.16) верны независимо от допущения о пологости оболочки, если ее срединная поверхность — развертывающаяся и оболочка находится не в чисто моментном состоянии. Под x и y следует в этом случае понимать криволинейные координаты.

Поступила 9 IV 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. 1949.
2. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. Гостехиздат. 1950.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. V. Гостехиздат. 1947.
4. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа к математической физике. Изд. Ленинградского госуниверситета. 1950.
5. Эйдус Д. М. О смешанной задаче теории упругости. ДАН СССР. 1951. Т. LXXVI. № 2.
6. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат. 1952.
7. Назаров А. А. К теории пологих оболочек. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 5.