

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРЯЧИХ И СКОРОСТНЫХ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

А. А. Ильюшин

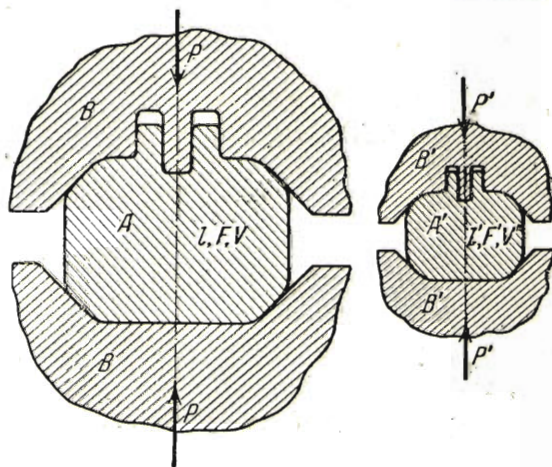
(Москва)

§ 1. Замечания о законах подобия в теории обработки металлов давлением. Механические свойства металла, подвергаемого обработке давлением при постоянной температуре в достаточно широком диапазоне скоростей, могут быть охарактеризованы некоторым количеством графиков зависимостей напряжений от деформаций. В простейшем случае это два графика, из которых первый дает универсальный закон сопротивления металла сдвигам, второй определяет свойство объемной сжимаемости металла.

Строго говоря, эти зависимости являются однозначными лишь при определенном скоростном режиме деформирования, поскольку скорость деформации влияет на величину сопротивления. Однако при скоростях, применяемых при обработке металлов давлением и значительно превосходящих скорости ползучести, влияние это оказывается весьма слабым. Чтобы на заметную долю увеличить сопротивление сдвигу, нужно на несколько порядков (в 10^2 — 10^4 раз) увеличить скорость деформирования.

Рассмотрим два геометрически подобных процесса деформации металлических заготовок А и А' при помощи геометрически подобных и совершающих геометрически подобные движения инструментов В и В' (фиг. 1).

Процесс обработки тела А при помощи инструмента В будем называть испытанием в натуру, процесс обработки А' инструментом В' — испытанием в модели.



Фиг. 1

Введем обозначения:

l, l' — характерные линейные размеры заготовок или изделий тел A и A' ; эти же размеры можно считать характерными и для инструментов B и B' ;

F, V, F', V' — характерные площади поверхностей или сечений и объемы тел A и A' ;

σ_s, σ_s' — характерные величины напряжений на диаграммах сопротивлений сдвигам материалов тел A и A' , например пределы текучести;

G, G' — характерные модули на этих диаграммах;

K, K' — характерные модули на диаграммах объемных деформаций материалов тел A и A' ;

μ, μ' — характерные коэффициенты трения в натуре и в модели;

τ_s, τ_s' — характерные сопротивления трения между телами и инструментами в модели и в натуре для областей, где не имеет места закон кулонова трения;

U, T, U', T' — характерные скорости движения инструментов B и B' и времени процессов в натуре и модели;

p, P, H, p', P', H' — удельные давления на инструмент в соответствующих точках, силы и погребные работы инструментов;

$(x, y, z), (x', y', z')$ — координаты любых соответствующих точек тел A и A' при одинаковых степенях деформации;

$\varepsilon_x, \gamma_{xy}, \dots$ и $\varepsilon_x', \gamma_{xy}', \dots$ — деформации (конечные или малые) в телах A и A' ;

$\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$ и $\sigma_x', \tau_{xy}', \dots$ — напряжения в телах A и A' в соответствующих точках при одинаковых степенях деформации.

Массовыми силами (силой тяжести, инерционными силами) при расчете рассматриваемых процессов можно пренебрегать, если веса тел значительно меньше потребных для деформации усилий инструментов и если скоростные напоры меньше удельных давлений. Эти условия обычно выполняются.

Для определения напряжений, деформаций, усилий, мощностей в процессах (AB) и $(A'B')$ мы должны воспользоваться уравнениями равновесия типа

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{xy}'}{\partial y'} + \frac{\partial \tau_{xz}'}{\partial z'} = 0 \quad (1.4')$$

графиками, устанавливающими связь между напряжениями и деформациями, типа

$$\sigma_x = \sigma_s F_x (G, K, \varepsilon_x, \gamma_{xy}, \dots), \quad \tau_{xy} = \sigma_s F_{xy}, \dots \quad (1.2)$$

$$\sigma_x' = \sigma_s' F_x' (G', K', \varepsilon_x', \gamma_{xy}', \dots), \quad \tau_{xy}' = \sigma_s' F_{xy}', \dots \quad (1.2')$$

и выражениями деформаций через перемещения u, v, w, u', v', w' — точек тел A и A' — типа

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots \right) \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_x' \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial u'}{\partial y'}, \frac{\partial u'}{\partial z'}, \frac{\partial v'}{\partial x'}, \dots \right) \quad (1.3')$$

где $F_x', F_x, \varepsilon_x, \varepsilon_x'$ и т. п. — некоторые функции, вид которых зависит от того, какая теория пластичности и теория деформаций положена в основу.

Кроме того, необходимо написать граничные условия, которые для свободных участков поверхностей тел А и А' будут типа

$$\sigma_x \cos(\nu x) + \tau_{xy} \cos(\nu y) + \tau_{xz} \cos(\nu z) = 0 \quad (1.4)$$

$$\sigma_x' \cos(\nu' x') + \tau_{xy}' \cos(\nu' y') + \tau_{xz}' \cos(\nu' z') = 0 \quad (1.4')$$

для участков с кулоновым трением

$$\tau_v = \mu \sigma_v, \quad \varphi_1(u, v, w, x, y, z) = 0 \quad (1.5)$$

$$\tau_v' = \mu' \sigma_v', \quad \varphi_1'(u', v', w', x', y', z') = 0 \quad (1.5')$$

и, наконец, для участков контакта с трением, отличным от кулонова:

$$\tau_v = \tau_s, \quad \varphi_2(u, v, w, x, y, z) = 0 \quad (1.6)$$

$$\tau_v' = \tau_s', \quad \varphi_2'(u', v', w', x', y', z') = 0 \quad (1.6')$$

Потребуем, чтобы в соответствующие моменты времени в соответствующих точках тел А и А' соответствующие деформации были одинаковы и напряженные состояния подобны. Такое требование можно выполнить, если при условии геометрического подобия начальных состояний процессов (АВ) и (А'В') и подобных перемещениях инструментов диаграммы механических свойств тела А' модели будут геометрически подобны соответствующим диаграммам материала тела А, т. е.

$$\frac{\sigma_s'}{\sigma_s} = \frac{G'}{G} = \frac{K'}{K}, \quad F_x' = F_x, \quad F_{xy}' = F_{xy}, \dots$$

Теория пластичности, полагаемая в основу расчетов модели и натуре, одна и та же, поэтому

$$\epsilon_x' = \epsilon_x, \dots$$

Коэффициенты трения пар (АВ) и (А'В') одинаковы:

$$\mu' = \mu$$

и сопротивления трения пропорциональны соответствующим пределам текучести:

$$\frac{\tau_s'}{\tau_s} = \frac{\sigma_s'}{\sigma_s}$$

Поскольку деформации в соответствующие моменты времени в соответствующих точках предполагаются одинаковыми, то и функции φ_1 и φ_1' , φ_2 и φ_2' , определяющие стесненные перемещения границ тела, будут одинаковыми:

$$\varphi_1' = \varphi_1, \quad \varphi_2' = \varphi_2$$

Как легко видеть, при этих условиях в безразмерных координатах

$$\frac{x}{l}, \quad \frac{y}{l}, \quad \frac{z}{l}, \quad \frac{x'}{l'}, \quad \frac{y'}{l'}, \quad \frac{z'}{l'}$$

для безразмерных величин перемещений

$$\frac{u}{l}, \quad \frac{v}{l}, \quad \frac{w}{l}; \quad \frac{u'}{l'}, \quad \frac{v'}{l'}, \quad \frac{w'}{l'}$$

и напряжений

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_s}, \dots, \frac{\tau_{xy}}{\sigma_s}, \dots, \frac{\sigma_{x'}}{\sigma_s'}, \dots, \frac{\tau_{xy'}}{\sigma_s'}$$

все соответствующие уравнения совпадут, т. е. станут тождественными уравнениям (1.1) и (1.1'), (1.2) и (1.2') и т. д. Значит, и решения их совпадут тождественно, т. е. будем иметь

$$\frac{u}{l} = \frac{u'}{l'}, \dots; \quad \frac{\sigma_x}{\sigma_s} = \frac{\sigma_{x'}}{\sigma_s'}, \dots$$

Отсюда вытекает, что удельные давления тел А и А' на инструменты В и В' в соответствующих точках при одинаковых относительных деформациях будут относиться между собой как пределы текучести материалов тел А и А':

$$\frac{p'}{\sigma_s} = \frac{p}{\sigma_s'} \quad (1.7)$$

а значит, для сил и мощностей получим

$$\frac{P}{\sigma_s F} = \frac{P'}{\sigma_s' F'}, \quad \frac{H}{\sigma_s V} = \frac{H'}{\sigma_s' V'} \quad (1.8)$$

Все указанные выше требования подобия будут выполнены, если модель А' сделана из того же материала, что и тело А, и температуры испытаний постоянны и одинаковы. Тогда $\sigma_s = \sigma_s'$ и потому удельные давления в натуре и модели будут одинаковы, усилия будут относиться между собой, как площади, а потребные работы, как объемы тел в модели и натуре:

$$p' = p, \quad \frac{P}{F} = \frac{P'}{F'}, \quad \frac{H}{V} = \frac{H'}{V'} \quad (1.9)$$

Формулы (1.9) известны в литературе по обработке металлов давлением под названием закона подобия при деформировании геометрически подобных тел. Этот закон в 1874 г. установлен В. Л. Жирпичевым [1].

Подчеркиваем, что доказательство закона подобия дается для произвольных материалов при любых соотношениях между напряжениями и деформациями; однако при этом влияние скорости деформирования и явлений ползучести-релаксации не учитывается. Учет этих факторов отразился бы на функциях F_x, F_{xy}, \dots уравнений (1.2), причем возникло бы дополнительное условие подобия — равенство скоростей деформации и времен в модели и натуре, т. е.

$$\frac{U'}{V'} = \frac{U}{V}, \quad T = T' \quad (1.10)$$

Как уже говорилось выше, влияние этих факторов в реальных процессах обработки металлов давлением незначительно и с ним можно не считаться.

Замечание. Моделирование (если оно возможно) позволяет отрабатывать технологический процесс в малых масштабах в лабораториях. Однако в литературе встречаются высказывания о невозможности моделирования процессов обработки металлов давлением и неприменности закона подобия (С. И. Губкин [2] и др.). Основанием для таких выводов являются следующие два типа ошибок по пластическим деформациям металлов.

1. Опыты деформирования горячего металла показывают обычно, что при одинаковых начальных температурах тел натуры и модели и их геометрическом подобии — удельные давления, а значит, усилия и мощности в модели, получаются значительно больше, чем в натуре.

2. Испытания с большими скоростями на копрах при нормальной и высокой температурах, как правило, обнаруживают тот же эффект.

Эти опыты являются некоторым основанием для критики закона подобия (1.9) и будут рассмотрены ниже.

Кроме того, существуют высказывания, что якобы холодные медленные испытания геометрически подобных тел из совершенно одинакового материала на статических испытательных машинах при одинаковых скоростях деформации обнаруживают большой масштабный эффект того же типа, что и при горячих и скоростных испытаниях. Такие заключения связаны с какими-то ошибками при испытании или обработке результатов. Так известно, что если на статической испытательной машине при одинаковой температуре сжимать, растягивать или изгибать геометрически подобные тела из одинакового металла при одинаковой скорости деформации и при одинаковых условиях установки на машине, то напряжения в соответствующих точках будут одинаковы. Поэтому, например, графики для «удельных давлений течения», а попросту — напряжений сжатия алюминиевых образцов диаметром 10 и 100 мм (опыты на машине Амслера), приводимые С. И. Губкиным в его работе 1947 г., основаны на недоразумении: оказывается, что при малых пластических деформациях порядка 2—3% напряжение сжатия 10-мм образца почти в два раза превышает сопротивление 100-мм образца.

Насколько основания для дальнейшего анализа закона подобия являются достаточными, настолько отрицание справедливости закона подобия является преждевременным. Дело в том, что закон подобия установлен для процессов, протекающих при одинаковых температурах. Фактически в опытах обеспечивается одинаковость лишь начальных температур, а вместо того чтобы выяснить условия, при которых изменение температур в течение времени деформирования было бы одинаково в модели и натуре, дополнительным условием большинство авторов брали условие равенства скоростей деформаций, т. е. равенство времен процессов в модели и натуре. Поскольку тела малых размеров в одинаковых условиях за одинаковые времена остывают сильнее, чем тела больших размеров, то, естественно, они в модели обнаруживают большие сопротивления.

Значит, применяемые иногда экспериментаторами условия (1.10) приводят к тому, что отклонения от закона подобия, которые без соблюдения специальных условий были бы более случайными, становятся систематическими.

Таким образом, необходимо выяснить, существуют ли какие-нибудь дополнительные условия моделирования, при которых закон подобия оказался бы справедливым для горячих и скоростных испытаний. Если нет, значит и моделирование невозможно. Между тем некоторые авторы, отрицая закон подобия, пытаются заменить его каким-то другим законом моделирования. Например, С. И. Губкин говорит о необходимости, кроме геометрического подобия, сохранения постоянства в модели и натуре отношения величины контактной поверхности к объему

$$\frac{F_k}{V} = \frac{F'_k}{V'}$$

и правильно признает, что такое условие отвергает возможность моделирования ($l - l'$!). Ошибочными и противоречащими законам физики являются и другие формулы типа формулы С. И. Губкина

$$\frac{H}{H'} = \frac{l^3}{l'^3} \left[1 - \left(1 - \frac{l'}{l} \right) \sqrt{\beta \frac{t_0 - t_u}{t_0} + \frac{\mu}{2} \frac{F - F'}{F}} \right]$$

поскольку они не дополняют, а отрицают закон подобия (1.9).

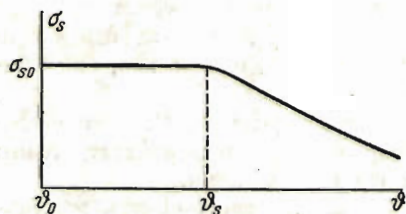
§ 2. Закон подобия для горячих и скоростных процессов обработки металлов давлением. Как следует из изложенного выше, закон подобия выведен в предположении, что температуры тел А и А' остаются постоянными во все время испытания и, значит, не учитывается теплообмен между заготовками и инструментами и теплообразование за счет сил трения на поверхностях и внутреннего трения. Оба эти явления имеют первостепенное значение для расчета напряжений, сил и мощностей, поскольку сопротивление металлов сдвигу зависит от температуры.

Для вывода закона подобия в общем виде необходимо заново проследить все рассуждения § 1 и прежде всего установить зависимости между напряжениями и деформациями при переменных температурах. Они будут иметь вид (1.2), но функции F_x, F_{xy}, \dots будут уже зависеть от температуры.

Пусть $\vartheta_{0A}, \vartheta_{0A}'$ — характерные постоянные температуры тел А, А', например, начальные температуры в каких-нибудь соответствующих точках; $\vartheta_{0B}, \vartheta_{0B}'$ — то же для инструментов В, В'. Обозначим через $\vartheta(x, y, z; t)$, $\vartheta'(x', y', z'; t')$ температуры тел (А, В) и (А'В') в соответствующих точках в соответствующие моменты времени. Тогда в качестве дополнительных аргументов функций F будем иметь безразмерные величины

$$\theta = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_s - \vartheta_0}, \quad \theta' = \frac{\vartheta' - \vartheta_0'}{\vartheta_s' - \vartheta_0'}$$

где $\vartheta_0, \vartheta_0'$ — постоянные характерные температуры испытаний в натуре и в модели (например, $\vartheta_0 = \vartheta_{0A}, \vartheta_0' = \vartheta_{0A}'$) и $\vartheta_s, \vartheta_s'$ — температуры металлов тел А, А' натуре и модели, при которых начинается существенное падение сопротивления сдвигу.



Фиг. 2

Характер изменения сопротивления сдвигу при изменении температуры металла дан на фиг. 2. На участке $\vartheta_0 < \vartheta < \vartheta_s$ оно не зависит от температуры и затем падает до нуля. Область $\vartheta > \vartheta_s$ и принимается для обработки горячего металла давлением.

Таким образом, график типа фиг. 2 дает закон изменения характерной величины сопротивления сдвигу от температуры:

$$\sigma_s = \sigma_{s0} f(\theta)$$

и, следовательно, обобщенные зависимости типа (1.2) будут иметь вид:

$$\sigma_x = \sigma_{s0} f(\theta) F_x \left(\frac{G}{K}, \theta, \varepsilon_x, \gamma_{xy}, \dots \right) = \sigma_{s0} \Phi_x \left(\frac{G}{K}, \theta, \varepsilon_x, \gamma_{xy}, \dots \right) \quad (2.1)$$

$$\sigma_x' = \sigma_{s0}' f'(\theta) F_x' \left(\frac{G'}{K'}, \theta', \varepsilon_x', \gamma_{xy}', \dots \right) = \sigma_{s0}' \Phi_x' \left(\frac{G'}{K'}, \theta', \varepsilon_x', \gamma_{xy}', \dots \right) \quad (2.1')$$

Выражения типа (1.3) для деформаций несколько изменяются за счет теплового расширения:

$$\varepsilon_0 = \alpha [\vartheta - \vartheta(0)], \quad \varepsilon_0' = \alpha' [\vartheta' - \vartheta'(0)]$$

где α, α' — коэффициенты линейного расширения и $\vartheta(0), \vartheta'(0)$ — начальные температуры соответствующих точек. Они примут вид:

$$\epsilon_x = \epsilon_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \epsilon_0 \right) \quad (2.2)$$

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_{x'} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}, \dots, \epsilon_0' \right) \quad (2.2')$$

На поверхностях тел А, А' динамические условия (1.4), (1.5), (1.6) при переменных температурах не изменятся. Но они должны быть дополнены термодинамическими условиями, поскольку система дифференциальных уравнений равновесия типа (1.4) должна быть дополнена теперь еще одним уравнением, определяющим закон теплопередачи.

Количество тепла, образующегося на поверхностях трения тел (АВ) и (А'В') за единицу времени на единицу площади, можно считать пропорциональным работе силы трения за единицу времени, т. е. мощности

$$q_{AB} = \frac{k_1}{J} |\tau_v \Delta U_s| \quad (2.3)$$

$$q_{A'B'} = \frac{k_1'}{J} |\tau_v' \Delta U_s'| \quad (2.3')$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности, J — механический эквивалент теплоты, τ_v — касательное напряжение, ΔU_s — относительная скорость скольжения точки поверхности тела А по контактной поверхности тела В.

Два термодинамических условия на поверхности контакта тел АВ таковы: температура соприкасающихся точек тел А и В должна быть одинакова; разность тепловых потоков через поверхность соприкосновения должна равняться количеству тепла, возникающему за счет силы трения:

$$(\vartheta)_A = (\vartheta)_B \quad (2.4)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)_A - \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)_B = \frac{k_1}{J} |\tau_v \Delta U_s| \quad (2.5)$$

Здесь v — нормаль к поверхности контакта, внешняя к телу А, λ_A, λ_B — коэффициенты теплопроводности тел А и В. Для модели имеем

$$(\vartheta)_{A'} = (\vartheta)_{B'} \quad (2.4')$$

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)'_A - \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)'_B = \frac{k_1'}{J} |\tau_v' \Delta U_s'| \quad (2.5')$$

Если некоторые участки поверхностей контакта имеют термоизолирующие покрытия, то на этих участках будем иметь соответственно

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)_A = \frac{k_1}{J} |\tau_v \Delta U_s| \quad (2.6)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)'_A = \frac{k_1'}{J} |\tau_v' \Delta U_s'| \quad (2.6')$$

Теплообмен тел А и А' с внешними телами, как это известно из практики обработки металлов давлением, определяется именно теплообменом

заготовки и инструмента. Теплоотдача в воздух происходит очень медленно, и она пренебрежимо мала сравнительно с теплообменом тел (AB) и (A'B').

Таким образом, на свободных участках поверхностей всех четырех тел A, A', B, B' термодинамическое условие может быть записано в виде

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}\right) = 0 \quad (2.7)$$

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}\right)' = 0 \quad (2.7')$$

В тех случаях, когда некоторые участки поверхностей инструмента B специально подогреваются, так что через единицу площади в единицу времени сообщается количество тепла q_0 , условие на этих участках имеет вид:

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}\right)_A = q_0 \quad (2.8)$$

и соответственно для модели

$$\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu}\right)'_A = q_0' \quad (2.8')$$

Для лишней неизвестной функции — температуры ϑ в теле A должно быть составлено уравнение теплообмена. В общем случае оно имеет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\lambda_A}{(c\gamma)_A} \nabla^2 \vartheta + \frac{k_2}{(c\gamma)_A} W \quad (2.9)$$

где t — время, v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости частицы тела в точке с координатами (x, y, z) , c_A — теплоемкость, γ_A — удельный вес тела A. Величина $k_2 W$ представляет собой механическую работу внутренних сил за единицу времени в единицу объема тела A, переходящую в тепло. Если под k_2 будем понимать коэффициент пропорциональности, аналогичный k_1 , то W будет представлять собой мощность, т. е. работу внутренних напряжений в единицу времени:

$$W = \sigma_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \dots + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \dots \quad (2.10)$$

Для инструмента B, который предполагаем состоящим из твердых тел, испытывающих лишь упругую деформацию, при надлежащем выборе координатных осей (связанных с телами) уравнение теплообмена будет иметь вид обычного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda_B}{(c\gamma)_B} \nabla^2 \vartheta \quad (2.11)$$

Для модели (A'B') будем иметь соответственно уравнения

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)' = \frac{\lambda_A}{(c\gamma)_A'} \nabla^2 \vartheta' + \frac{k_2}{(c\gamma)_A'} W' \quad (2.9')$$

$$W' = \sigma_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \dots + \tau_{xy}' \left(\frac{\partial v_x'}{\partial y'} + \frac{\partial v_y'}{\partial x'} \right) + \dots \quad (2.10')$$

$$\frac{\partial \vartheta'}{\partial t'} = \frac{\lambda_B'}{(c\gamma)_B'} \nabla'^2 \vartheta' \quad (2.11')$$

Для решения уравнений типа (2.9) и (2.11) нужно, кроме граничных условий, уже рассмотренных выше, задать еще начальные распределения температур в телах, т. е.

$$t = 0, \quad \vartheta_A = \vartheta_A(0, x, y, z), \quad \vartheta_B = \vartheta_B(0, x, y, z) \quad (2.12)$$

$$t' = 0, \quad \vartheta_{A'} = \vartheta_{A'}(0, x', y', z'), \quad \vartheta_{B'} = \vartheta_{B'}(0, x', y', z') \quad (2.12')$$

Заметим, что система дифференциальных уравнений равновесия типа (1.1) остается такой же, как и в § 1, поскольку тепловые процессы, рассматриваемые нами, влияют на равновесие лишь косвенно и это влияние учитывается соотношениями (2.1), ..., (2.11) этого параграфа.

Покажем, что система уравнений, определяющих процесс деформирования и теплообмена для тел модели, т. е. уравнения (1.1'), (2.1'), ..., (2.11') путем подбора материалов тел модели, силового, температурного и скоростного режимов может быть приведена к виду, тождественно совпадающему с видом уравнений (1.1), (1.1), ..., (2.11), определяющих процесс деформирования и теплообмен тел природы. Для этого выберем материалы тел A', B' так, чтобы зависимость напряжений от деформаций и температур на изучаемом интервале были подобны, т. е. чтобы

$$\frac{\sigma_{s0}'}{G'} = \frac{\sigma_{s0}}{G} = R_1, \quad \frac{G'}{K'} = \frac{G}{K} \quad (2.13)$$

и чтобы при одинаковых аргументах тождественно совпадали функции

$$\Phi_{x'} = \Phi_x, \dots \quad (2.14)$$

Выбирая для модели и природы одну и ту же теорию деформаций, мы получим одинаковый вид функций (2.2) и (2.2'), т. е. $\epsilon_{x'} = \epsilon_x$ при одинаковых аргументах. Новым в отношении § 1 аргументом здесь является тепловое расширение ϵ_θ , которое можно записать в виде

$$\epsilon_\theta = \alpha(\vartheta_s - \vartheta_0)\theta, \quad \epsilon_\theta' = \alpha'(\vartheta_s' - \vartheta_0')\theta'$$

Выберем параметр α' так, чтобы имело место равенство

$$\alpha'(\vartheta_s' - \vartheta_0') = \alpha(\vartheta_s - \vartheta_0) = R_2 \quad (2.15)$$

Поскольку температура ϑ_0 выбирается одинаковой для тел A и B, то, вводя обозначения

$$\theta_B = \frac{\vartheta_B - \vartheta_0}{\vartheta_s - \vartheta_0}$$

условия (2.4) и (2.4') можно привести к одинаковому виду для θ и θ'

$$(\theta)_A = (\theta)_B, \quad (\theta)_{A'} = (\theta)_{B'}$$

Равенства (2.5) и (2.5'), которые могут быть легко переписаны и для функций θ и θ' , тождественно совпадут, если будут выполнены условия

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{\lambda_{B'}}{\lambda_{A'}} = R_3 \quad (2.16)$$

$$\frac{\sigma_{s0} U l}{J \lambda_A (\vartheta_s - \vartheta_0)} = \frac{\sigma_{s0}' U' l'}{J \lambda_{A'} (\vartheta_s' - \vartheta_0')} = R_4 \quad (2.17)$$

причем совершенно одинаковый для природы и для модели вид теперь примут и равенства (2.6), (2.6'). Соотношения (2.7) и (2.7') без всяких дополнительных условий преобразуются к одинаковому виду:

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial \theta'}{\partial v'} = 0$$

В случае, когда инструмент природы подогревается в соответствие с равенством (2.8), где q_0 — задаваемый поток тепла, т. е. заданная функция безразмерных координат и времени

$$q_0 = q_0 \left(\frac{t}{T}, \frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l} \right)$$

необходимо и в модели производить подогрев, причем так, чтобы равенства (2.8) и (2.8') совпали. Для этого необходимо

$$\frac{q_0' l'}{\lambda_A' (\vartheta_s' - \vartheta_0')} = \frac{q_0 l}{\lambda_A (\vartheta_s - \vartheta_0)} = R_5 \quad (2.18)$$

Напишем теперь уравнение теплообмена (2.9) в безразмерных величинах. Для этого обозначим

$$\begin{aligned} v_x^\circ &= \frac{v_x}{U}, & v_y^\circ &= \frac{v_y}{U}, & v_z^\circ &= \frac{v_z}{U} \\ t^\circ &= \frac{t}{T}, & \xi &= \frac{x}{l}, & \eta &= \frac{y}{l}, & \zeta &= \frac{z}{l} \\ \sigma_x^\circ &= \frac{\sigma_x}{\sigma_{s0}}, \dots, & \tau_{xy}^\circ &= \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{s0}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Величина W (2.10), определяющая мощность, примет вид:

$$W = \frac{\sigma_{s0} U}{l} W^\circ$$

где

$$W^\circ = \sigma_x^\circ \frac{\partial v_x^\circ}{\partial \xi} + \dots + \tau_{xy}^\circ \left(\frac{\partial v_x^\circ}{\partial \eta} + \frac{\partial v_y^\circ}{\partial \xi} \right) + \dots \quad (2.20)$$

Теперь уравнение (2.9) примет вид:

$$\frac{1}{UT} \frac{\partial \theta}{\partial t^\circ} + v_x^\circ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v_y^\circ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + v_z^\circ \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{\lambda_A}{(c\gamma)_A U l} \nabla^2 \theta + \frac{k_2 \sigma_{s0}}{(c\gamma)_A (\vartheta_s - \vartheta_0) J} W^\circ \quad (2.21)$$

Преобразованное подобным образом уравнение (2.9) точно совпадает с (2.21), если будут выполнены дополнительные условия:

$$\frac{UT}{l} = \frac{U'T'}{l'} = R_6 \quad (2.22)$$

$$\left(\frac{c\gamma}{\lambda} \right)_A U l = \left(\frac{c\gamma}{\lambda} \right)'_A U' l' = R_7 \quad (2.23)$$

$$\frac{k_2 \sigma_{s0}}{(c\gamma)_A (\vartheta_s - \vartheta_0) J} = \frac{k_2' \sigma_{s0}'}{(c\gamma)'_A (\vartheta_s' - \vartheta_0') J} = R_8 \quad (2.24)$$

Уравнения (2.11), (2.11') после преобразования к безразмерным переменным тождественно совпадут, если будет выполнено следующее условие:

$$\left(\frac{c\gamma}{\lambda}\right)_{\text{В}} \frac{l^2}{T} = \left(\frac{c\gamma}{\lambda}\right)' \frac{l'^2}{T'} = R_9 \quad (2.25)$$

Начальные условия (2.12), (2.12') станут тождественными в безразмерных переменных при условии, что начальное распределение температур в заготовке и инструменте подобно для модели и природы, т. е. если начальные температуры заготовки и инструмента модели удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\vartheta_{\text{А}}'(0, \xi', \eta', \zeta') - \vartheta_0'}{\vartheta_s' - \vartheta_0'} = \frac{\vartheta_{\text{А}}(0, \xi, \eta, \zeta) - \vartheta_0}{\vartheta_s - \vartheta_0} = R_{10} \quad (2.26)$$

$$\frac{\vartheta_{\text{В}}'(0, \xi', \eta', \zeta') - \vartheta_0'}{\vartheta_s' - \vartheta_0'} = \frac{\vartheta_{\text{В}}(0, \xi, \eta, \zeta) - \vartheta_0}{\vartheta_s - \vartheta_0} = R_{11} \quad (2.27)$$

Приводя к безразмерным переменным уравнения равновесия (1.4) и динамические граничные условия, легко убедиться в том, что соответствующие уравнения для природы и модели будут одинаковы, если, кроме рассмотренных уже параметров, будут одинаковы коэффициенты трения:

$$\mu' = \mu = R_{12} \quad (2.28)$$

Таким образом, при выполнении условий подобия (2.12), ..., (2.28) все дифференциальные уравнения, определяющие безразмерные напряжения, деформации, безразмерные скорости, безразмерные перемещения, приведенную температуру θ , температурные расширения, как функции безразмерных координат и безразмерного времени для природы и модели тождественно совпадут и, значит, будут иметь одинаковые решения:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{l'} = \frac{u}{l}, \dots, \quad \frac{v_x}{U} = \frac{v_x'}{U'}, \dots, \quad \theta = \theta', \quad \varepsilon_{\varphi}' = \varepsilon_{\varphi} \\ \varepsilon_x' = \varepsilon_x, \quad \gamma_{xy}' = \gamma_{xy}, \dots, \quad \frac{\sigma_x'}{\sigma_{s0}'} = \frac{\sigma_x}{\sigma_{s0}}, \quad \frac{\tau_{xy}'}{\sigma_{s0}'} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{s0}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Поскольку сила, потребная для деформирования заготовок, представляет собой интеграл от напряжений на поверхности, спроектированных на определенное направление, а удельное давление — нормальное напряжение на поверхность контакта, то из (2.29) вытекает закон подобия В. Л. Кирпичева

$$\frac{P}{\sigma_{s0}} = \frac{P'}{\sigma_{s0}'}, \quad \frac{P}{\sigma_{s0} F} = \frac{P'}{\sigma_{s0}' F'}, \quad \frac{H}{\sigma_{s0} V} = \frac{H'}{\sigma_{s0}' V'} \quad (2.30)$$

Проведенное исследование показывает, что для соблюдения закона подобия (2.30), т. е. для получения возможности моделирования процессов скоростной и горячей обработки металлов давлением, необходимо соблюдение большого количества дополнительных условий и, в частности, постоянства значений ряда параметров R_n в модели и природе. Заметим, что один из выписанных нами в ходе анализа уравнений параметров является

излишним. Легко видеть тождество

$$R_4 = R_7 R_8$$

и потому, например, параметр R_8 можно отбросить.

Возникает вопрос, можно ли практически подобрать материал заготовки и инструмента и термомеханический режим процесса в модели так, чтобы все эти условия подобия были выполнены. Ответ является определенно положительным, поскольку можно привести пример моделирования, в котором все условия подобия будут выполнены.

Простейший метод моделирования рассматриваемых нами процессов обработки металлов давлением состоит в следующем: при соблюдении геометрического подобия модели и натуры создадим заготовку и инструмент модели из тех же соответственно материалов, что и в натуре. Начальные температуры и их распределение в модели осуществим тождественными с натурой.

Тогда очевидно, что условия подобия (2.13), (2.14), (2.15) и (2.16) превратятся в тождества, поскольку

$$\begin{aligned} \sigma_{s0}' &= \sigma_{s0}, & G' &= G, & K' &= K, & \Phi_x' &= \Phi_x, & \alpha' &= \alpha \\ \vartheta_0' &= \vartheta_0, & \vartheta_s' &= \vartheta_s, & \lambda_A' &= \lambda_A, & \lambda_B' &= \lambda_B \end{aligned}$$

Из (2.17) получим условие, которое должно быть выполнено:

$$Ul = U'l' = R \quad (2.31)$$

Условие (2.18) определит режим подогрева инструмента модели, если таковой применяется в процессе деформации заготовки в натуре, и именно поток тепла в модели в каждый соответствующий момент времени в соответствующих точках должен быть увеличен обратно пропорционально масштабу моделирования:

$$q_0' = q_0 \frac{l}{l'}$$

Условие (2.22) очевидно вполне определяет масштаб времени процесса деформирования: в натуре и модели времена должны составлять одинаковую часть отношения характерного размера заготовки к характерной скорости движения инструмента

$$T = R_6 \frac{l}{U}, \quad T' = R_6 \frac{l'}{U'} \quad (2.32)$$

Поскольку коэффициенты трения поверхностей в модели и натуре при одинаковых температурах будут одинаковыми, то все остальные условия подобия (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) обратятся в тождества.

Значит, при условиях (2.31), (2.32) в соответствующих точках тел модели и натуры, определяемых координатами

$$\frac{x}{l} = \frac{x'}{l'} = \xi, \dots$$

в соответствующие моменты времени

$$\frac{t}{T} = \frac{t'}{T'}$$

температуры металла, напряжения и деформации будут совершенно одинаковыми и закон подобия примет обычный вид: удельные давления будут одинаковыми, силы инструментов будут относиться между собой, как площади сечений, а затрачиваемые работы, как объемы заготовок, и потому по величинам p' , P' , H' , определяемым в опыте на модели, можно определять для натуры

$$p = p', \quad P = \frac{F}{F'} P', \quad H = \frac{V}{V'} H' \quad (2.33)$$

§ 3. Замечания о режиме моделирования. Условия термомеханического подобия горячих и скоростных процессов обработки металлов давлением нами выражены в общем случае в виде ряда соотношений, которым должен удовлетворять процесс в модели. Существует ли пример удовлетворения этих соотношений при условии, когда материалы тел и натуры и модели различны, мы не исследовали, и возможно, что практически его трудно осуществить. Но рассмотренный выше пример является основой вполне пригодного метода моделирования и может быть рекомендован в практике. Основное условие моделирования в противоположность условию (1.10) формулируется так: произведение характерной скорости инструмента на характерный размер заготовки должно сохраняться постоянным в натуре и в модели. На основании соотношений (2.32) оно может быть выражено и так: отношение характерного времени процесса деформации к квадрату линейного размера должно быть одинаково в модели и в натуре. Если линейный размер тела натуры в n раз больше линейного размера модели, то скорость движения инструмента модели должна быть в n раз больше, а время движения в n^2 раз меньше, чем в натуре:

$$n = \frac{l}{l'}, \quad T' = \frac{T}{n^2}, \quad U' = nU \quad (3.1)$$

Эти соотношения показывают, насколько важно в скоростных и горячих процессах обработки металлов давлением соблюдение строгого температурно-скоростного режима. Как только заготовка вынута из нагревательной печи, ее движения к инструменту, расположение в машине, время до начала операции, время и режим самой операции должны быть строго регламентированы. Тем большее значение имеет этот режим для моделирования процессов. Все движения должны быть значительно быстрее, чем в натуре, иначе будет происходить излишнее переохлаждение заготовки и сопротивление металла будет завышенным против натуры. Захваты и другие касающиеся горячей заготовки части транспортеров в модели должны быть геометрически подобны натуре, расположение заготовки в машине должно быть одинаковым, все времена и скорости должны подчиняться условиям (3.1), в противном случае не будет уверенности в том, что подобие не нарушено.

Моделирование работы при помощи ударных инструментов, например молотов или копров, должно подчиняться тем же закономерностям. Поскольку удельная энергия удара должна быть одинаковой в натуре и модели:

$$\frac{m'U'^2}{V'} = \frac{mU^2}{V}$$

то отсюда и из условий (3.1) вытекает, что массы ударников в модели и натуре должны относиться как пятые степени линейных размеров

$$\frac{m'}{l'^5} = \frac{m}{l^5}, \quad m' = \frac{m}{n^5} \quad (3.2)$$

и для копров со свободно падающими бабами высоты падения должны быть обратно пропорциональны квадратам линейных размеров

$$h'l'^2 = hl^2, \quad h' = n^2h \quad (3.3)$$

Как видим, все новые условия подобия весьма сильно отличаются от выдвигавшихся ранее, и несоблюдением этих условий следует объяснить рассмотренные в § 1 противоречия.

В заключение поясним отражаемые формулами § 2 причины, по которым соблюдение новых условий подобия важно и для скоростных процессов «холодной» обработки металлов давлением. Дело в том, что уравнения теплообмена типа (2.9), (2.11) при условиях на поверхностях типа (2.4), (2.5), (2.6) для очень быстрых процессов имеют решения, очень сильно затухающие в глубь тела. Выделяемое за счет поверхностного трения тепло концентрируется, следовательно, в очень тонком пограничном слое металла, толщина которого порядка

$$\Delta \approx \sqrt{\frac{\lambda T}{c\gamma}}$$

а возникающая температура порядка

$$\Delta\theta \approx 2q \frac{T}{\Delta c\gamma}$$

Можно убедиться, что такое повышение температуры слоя может существенно изменить касательные напряжения на поверхности, а значит, и потребную для деформации работу инструмента.

Поступила 22 III 1952

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. К и р п и ч е в В. Л. О подобии при упругих явлениях. Журнал Русского хим. и физ. общества. 1874. Т. 6. № 9. Стр. 152—155.
2. Г у б к и н С. И. Подобные условия деформации при обработке металлов давлением. Известия АН СССР, ОТН. 1947. № 1.