О НЕКОТОРЫХ ПОЧТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ

Н. Я. Виленкин (Москва)

Для решения некоторых задач теории упругости М. М. Филоненко-Бородич ввел систему функций, рассматриваемых на отрезке $[0, \pi]$:

$$P_m(x) = \cos mx - \cos(m+2)x \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

которые он назвал косинус-биномами, и показал ее замкнутость [1].

В работе [2] М. М. Филоненко-Бородич рассматривает разложения функций двух переменных, заданных в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$; $0 \leqslant y \leqslant \pi$ по системам функций

$$P_{mn}(x, y) = P_m(x)\, P_n(y) \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

$$Q_{mn}(x, y) = \triangle P_{mn}(x, y), \qquad Q_{00}^*(x, y) = 1 \tag{3}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа. Возникает вопрос о замкнутости этих систем функций. Ниже показано, что система функций $P_{mn}(x, y)$ замкнута, а система функций $Q_{mn}(x, y)$ свойством замкнутости не обладает; при этом указывается, какими функциями надо пополнить эту систему.

Первое утверждение вытекает из того, что в пространстве L^2 функций с интегрируемым квадратом понятия полноты и замкнутости эквивалентны, а потому нам достаточно показать, что функция, ортогональная ко всем $P_{mn}(x, y)$, равна нулю. Это доказывается аналогично соответствующему утверждению для полных ортогональных систем [3] (стр. 18).

Утверждение относительно системы $Q_{mn}(x, y)$ доказывается следующим образом. Пользуясь выражениями для этих функций, можно непосредственным вычислением интегралов убедиться, что каждая из них, равно как и функция $Q_{00}^*(x, y)$, ортогональна в квадрате $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ функциям $(l = 1, 2)$

$$\begin{aligned} Q_{l0}^*(x, y) &= \frac{\pi \operatorname{ch} l\,(^1/_2\pi - y)}{4l \operatorname{sh} {^1/_2}\pi l}\cos lx, & Q_{0l}^*(x, y) &= \frac{\pi \operatorname{ch} l\,(^1/_2\pi - x)}{4l \operatorname{sh} {^1/_2}\pi l}\cos ly \\ Q_{l1}^*(x, y) &= \frac{\pi \operatorname{sh} l\,(^1/_2\pi - y)}{4l \operatorname{ch} {^1/_2}\pi l}\cos lx, & Q_{1l}^{**}(x, y) &= \frac{\pi \operatorname{sh} l\,(^1/_2\pi - x)}{4l \operatorname{ch} {^1/_2}\pi l}\cos ly \end{aligned} \tag{4}$$

Покажем теперь, что система функций, получающаяся при объединении систем функций (3) и (4), замкнута. Не теряя общности, можно ограничиться классом функций, разложения которых в двойной ряд Фурье содержат лишь члены вида $a_{2k,\,2l}\cos 2kx \cos 2ly$. В самом деле, любая функция разлагается на четыре функции, одна из которых имеет такой вид, а три другие получаются при различных комбинациях четности и нечетности коэффициентов при x и y. Функции рассматриваемого вида назовем функциями с четным разложением.

Пусть функция с четным разложением ортогональна ко всем $Q_{mn}(x, y)$ и к функции $Q_{00}^*(x, y)$. Тогда $a_{00} = 0$, а кроме того, наша функция $f(x, y)$ ортогональна ко всем функциям

$$T_{2k,\,2l}(x, y) \equiv \sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l} Q_{2m,\,2n}(x, y) = \qquad (k, l = 1, 2\ldots)$$

$$= -[(2k+2)^2 + (2l+2)^2]\cos(2k+2)x\cos(2l+2)y + (2k+2)^2\cos(2k+ \\ +2)x + (2l+2)^2\cos(2l+2)y \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что коэффициенты Фурье такой функции имеют вид:

$$a_{2k,\,2l} = 2\,\frac{l^2 a_{0,\,2l} + k^2 a_{2k,\,0}}{l^2 + k^2} \tag{6}$$

Но непосредственный подсчет показывает, что такие же коэффициенты Фурье имеет функция

$$F(x, y) = 8\left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_{2k,0} Q_{2k,0}^{*}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_{0,2k} Q_{0,2k}^{**}(x, y)\right] \tag{7}$$

при условии, что стоящие справа ряды сходятся в среднем. Таким образом, при условии сходимости в среднем этих рядов каждая функция с четным разложением, ортогональная всем функциям $Q_{mn}(x, y)$ и функции $Q_{00}^{*}(x, y)$, может быть аппроксимирована в среднем с любой степенью точности линейными комбинациями функций $Q_{2k,0}^{*}(x, y)$ и $Q_{0,2k}^{**}(x, y)$. Поэтому для доказательства замкнутости системы, получаемой объединением системы (3) и (4), достаточно показать сходимость в среднем рядов из (7). Нетрудно видеть, что функции $Q_{k,0}^{*}(x, y)$ попарно ортогональны. Поэтому сходимость в среднем, например, первого ряда эквивалентна сходимости числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 a_{2k,0}^2 \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} Q_{2k,0}^{*2}(x, y)\, dx\, dy \tag{8}$$

Но

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} Q_{2k,0}^{*2}(x, y)\, dx\, dy = \frac{\pi^2}{128k^4} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{64(k^2 + l^2)^2} \tag{9}$$

и поэтому ряд (8) равен двойному ряду

$$\frac{1}{64}\sum_{k=1}^{\infty} k^4 a_{2k,0}^2 \left[\frac{\pi^2}{2k^4} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{(k^2 + l^2)^2}\right] \tag{10}$$

который в силу сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k,0}^2 \leqslant \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x, y)\, dx\, dy$$

сходится одновременно с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{k^4 a_{2k,0}}{[k^2 + l^2]^2} \tag{11}$$

(в доказательстве сходимости этого ряда существенную помощь оказал автору И. И. Шапиро-Пятецкий).

Из неравенства Бесселя вытекает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}^2$$

сходится, а потому в силу формулы (6) сходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(k^2 a_{2k,0} + l^2 a_{0,2l})^2}{(k^2 + l^2)^2}$$

Но тогда высказанное утверждение сводится к следующей лемме.

Лемма. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(k^2\alpha_k + l^2\beta_l)^2}{(k^2 + l^2)^2}$$

сходится, то сходятся и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{k^4\alpha_k^2}{(k^2+l^2)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l^4\beta_l^2}{(k^2+l^2)^2}. \tag{12}$$

Доказательство. Заметим, что, не теряя общности, можно ограничиться рассмотрением случая, когда первые N из чисел α_k и β_l равны нулю. Обозначим $\alpha_k\sqrt{k}$ через α_k' и $\beta_l\sqrt{l}$ через β_l'. При достаточно больших m имеем асимптотически

$$c_m \equiv \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(m^2+j^2)^2}=\frac{1}{m^3}\,\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{[1+j^2/m^2]^2}\sim\frac{1}{m^3}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{4m^3} \tag{13}$$

Поэтому найдется такое N, что $c_m > {}^3/_4 m^3$ при $m > N$.

Положим $\alpha_m=\beta_m=0$ при $m\leqslant N$ и положим

$$K(k,l)=\frac{kl\sqrt{kl}}{(k^2+l^2)^2}$$

Тогда

$$\int_0^{\infty}\frac{K(x,1)\,dx}{\sqrt{x}}=\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2} \tag{14}$$

и в силу неравенства Гильберта (см. [4], стр. 237) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{|2k^2l^2\alpha_k\beta_l|}{(k^2+l^2)^2}=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}K(k,l)\,|\alpha_k'\beta_l'|\leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k'^2\right)^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l'^2\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k'^2+\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l'^2\right)$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{k^4\alpha_k^2+l^4\beta_l^2}{(k^2+l^2)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}c_kk^4\alpha_k^2+\sum_{l=1}^{\infty}c_ll^4\beta_l^2> \tag{16}$$

$$>\frac{3}{4}\left[\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k^2+\sum_{l=1}^{\infty}l\beta_l^2\right]=\frac{3}{4}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k'^2+\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l'^2\right]$$

Неравенства (15) и (16) показывают, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(k^2\alpha_k+l^2\beta_l)^2}{(k^2+l^2)^2}>\frac{1}{4}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{k^4\alpha_k^2+l^4\beta_l^2}{(k^2+l^2)^2}\right] \tag{17}$$

откуда и вытекает указанная лемма. Таким образом, доказаны все сформулированные в начале статьи утверждения.

Поступила 22 III 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М. Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 2.

2. Филоненко-Бородич М. М. О равновесии упругого параллелепипеда. ПММ. 1951. Т. X. Вып. 2.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. ГОНТИ. 1939.

4. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е. и Полиа Г. Неравенства. Изд. иностр. литературы. 1948.

38