Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Э. Я. Риекстыньш

(Рига)

В работе показана формальная схема для решения обобщенной системы телеграфных уравнений при помощи применения метода преобразования Лапласа для матриц. Теория этого метода пока мало разработана и обратное преобразование Лапласа удается совершить только в случае расщепляемой системы.

Рассматривается также не исследованный до сих пор случай, когда провода в пучке имеют различные длины. В частности, отсюда получается решение для линии, состоящей из одного неоднородного провода

§ 1. Пучок проводов одинаковой длины. 1°. Рассмотрим обобщенную систему телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{i}, \qquad -\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{u} = \left\| \begin{matrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_n(x,t) \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{i} = \left\| \begin{matrix} i_1(x,t) \\ i_2(x,t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ i_n(x,t) \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{R} = \left\| \begin{matrix} R_1 & 0\ldots 0 \\ 0 & R_2\ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0\ldots R_n \end{matrix} \right\|$$

$$\mathbf{L} = \left\| \begin{matrix} L_1 & M_{12}\ldots M_{1n} \\ M_{12} & L_2\ldots M_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_{1n} & M_{2n}\ldots M_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{C} = \left\| \begin{matrix} C_1 & -C_{12}\ldots -C_{1n} \\ -C_{12} & C_2\ldots -C_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -C_{1n} & -C_{2n}\ldots C_n \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{G} = \left\| \begin{matrix} G_1 & -G_{12}\ldots -G_{1n} \\ -G_{12} & G_2\ldots -G_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -G_{1n} & -G_{2n}\ldots G_n \end{matrix} \right\| \tag{1.2}$$

для значений аргументов $t > 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. В частности, при $l = \infty$ получим случай пучка проводов полубесконечной длины. За исключением некоторых предельных случаев матрицы **R**, **L**, **G** и **C** оказываются симметричными и положительно определенными [1]. Будем еще предполагать, что эти матрицы постоянны.

Решение системы (1) ищется при условиях, которые вытекают из следующих физических фактов.

На конце проводов включены такие приемные устройства, которые не содержат источников тока. До начального момента в проводах и приемных устройствах никаких процессов не было. В момент $t = 0$ в начале проводов включаются передающие устройства и остаются приключенными при всех $t > 0$.

Из сказанного непосредственно вытекают нулевые начальные условия для системы (1.1):

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0, \qquad \mathbf{i}(x, 0) = 0 \qquad (0 < x \leqslant l) \tag{1.3}$$

Граничные условия для матричной системы (1.1) получаются в виде некоторых матричных дифференциальных соотношений, которые надо составить на основании граничных условий для отдельных проводов.

Если передающие устройства не действуют взаимно между собой и приемные устройства также взаимно не связаны, то по законам Кирхгофа граничные условия для каждого провода можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &P_{uk}(D)\,u_k(0, t) = P_{vk}(D)\,v_k(t) - P_{ik}(D)\,i_k(0, t) \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right) \\ &Q_{uk}(D)\,u_k(l, t) = Q_{ik}(D)\,i_k(l, t) \qquad (t > 0,\ k = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.4}$$

где P_{uk}, P_{vk}, P_{ik}, Q_{uk} и Q_{ik} — многочлены, характеризующие приемнопередающие устройства, а $v_k(t)$ — напряжения, включенные в передающие устройства.

Кроме того, предположим, что система (1.4) удовлетворяет условиям:

$$\frac{d^m}{dt^m} u_k(0, 0) = U_k^{(m)} \quad (m = 0, 1, \ldots, m_{1k}), \qquad \frac{d^m}{dt^m} i_k(0, 0) = I_k^{(m)} \quad (m = 0, 1, \ldots m_{2k})$$

$$\frac{d^m}{dt^m} u_k(l, 0) = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots, m_{3k}), \qquad \frac{d^m}{dl^m} i_k(l, 0) = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots m_{4k})$$

$$\frac{d^m}{dt^m} v_k(0) = V_k^{(m)} \quad (m = 0, 1, \ldots, m_{5k}) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

где числа m_{1k}, m_{2k}, m_{3k}, m_{4k} и m_{5k} на единицу меньше степеней соответствующих многочленов $P_{uk}(D)$, $P_{ik}(D)$, $Q_{uk}(D)$, $Q_{ik}(D)$ и $P_{vk}(D)$. Условия для $u_k(l, 0)$ и $i_k(l, 0)$ вытекают из указанных выше физических фактов, а постоянные $U_k^{(m)}$, $I_k^{(m)}$ и $V_k^{(m)}$ получены из физического состояния включенных передающих устройств в момент $t = 0$. Надо отметить, что при помощи выбора этих постоянных граничные условия можно выразить в виде (1.4) также тогда, когда приемно-передающие устройства содержат емкости. В случае $l = \infty$ граничные условия в конце проводов надо заменить на следующие:

$$\lim_{x \to \infty} u_k(x, t) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} i_k(x, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

При обозначениях

$$\begin{aligned} &[P_{u1}(D), \ldots, P_{un}(D)] = \mathbf{P}^{(1)}(D), \\ &[P_{v1}(D), \ldots, P_{vn}(D)] = \mathbf{P}^{(3)}(D), \\ &[P_{i1}(D), \ldots, P_{in}(D)] = \mathbf{P}^{(2)}(D), \qquad \mathbf{v}(t) = \left\| \begin{matrix} v_1(t) \\ \cdots \\ v_n(t) \end{matrix} \right\| \\ &[Q_{u1}(D), \ldots, Q_{un}(D)] = \mathbf{Q}^{(1)}(D), \\ &[Q_{i1}(D), \ldots, Q_{in}(D)] = \mathbf{Q}^{(2)}(D), \end{aligned} \tag{1.7}$$

граничные условия (1.4) для отдельных проводов можно объединить в виде следующих матричных уравнений, которые вместе с (1.5) являются граничными условиями для системы (1.1):

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}^{(1)}(D)\,\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{P}^{(3)}(D)\,\mathbf{v}(t) - \mathbf{P}^{(2)}(D)\,\mathbf{i}(0, t) \\ &\mathbf{Q}^{(1)}(D)\,\mathbf{u}(l, t) = \mathbf{Q}^{(2)}(D)\,\mathbf{i}(l, t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Допустим, что при таких начальных и граничных условиях существует решение системы (1.1), и будем искать его при помощи преобразования Лапласа. Надо отметить, что таким путем полученное решение является в некотором смысле формальным, так как при преобразовании предполагается, что символ L_t, где

$$L_t\{\mathbf{u}(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathbf{u}(x, t)\,dt$$

можно поменять местами с символами

$$\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \lim_{x\to 0}, \qquad \lim_{t\to 0}$$

Справедливость этих допущений приходится оправдывать при помощи проверки в каждом отдельном случае полученного решения [2].

2°. Применяя к системе (1.1) преобразование Лапласа, прежде всего надо иметь в виду, что полученное решение будет состоять, вообще говоря, из кусочно-непрерывных функций. Но подобно тому, как это сделано для одного провода [3], можно и здесь показать, что обычные правила операционного исчисления остаются справедливыми. Поэтому при обозначениях

$$L_t\{\mathbf{u}(x,t)\} = \overline{\mathbf{u}}(x,p), \qquad L_t\{\mathbf{i}(x,t)\} = \overline{\mathbf{i}}(x,p) \tag{1,9}$$

в силу условий (1.3) получаем изображенную систему в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}\overline{\mathbf{u}} = (\mathbf{R}+p\mathbf{L})\,\overline{\mathbf{i}}, \qquad -\frac{\partial}{\partial x}\overline{\mathbf{i}} = (\mathbf{G}+p\mathbf{C})\,\overline{\mathbf{u}} \tag{1.10}$$

Помножив последние из уравнений (1.10) слева на $\mathbf{R}+p\mathbf{L}$, подставив $(\mathbf{R}+p\mathbf{L})\,\overline{\mathbf{i}} = -\partial\overline{\mathbf{u}}\,/\,\partial x$ и введя обозначение

$$p^2\mathbf{LC} + p(\mathbf{RC}+\mathbf{LG}) + \mathbf{RG} = \mathbf{\Gamma}^2 \tag{1.11}$$

получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{\Gamma}^2\overline{\mathbf{u}} \tag{1.12}$$

Известно [4], что

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{\mathbf{\Gamma}x} = \mathbf{\Gamma}e^{\mathbf{\Gamma}x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}e^{-\mathbf{\Gamma}x} = -\mathbf{\Gamma}e^{-\mathbf{\Gamma}x}$$

Поэтому легко убедиться, что общее решение уравнения (1.12) имеет вид:

$$\overline{\mathbf{u}}(x,p) = e^{-\mathbf{\Gamma}x}\mathbf{c} + e^{\mathbf{\Gamma}x}\mathbf{d} \tag{1.13}$$

где $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — произвольные постоянные колонные матрицы.

Матрицу $\overline{\mathbf{i}}(x,p)$ получим из первого уравнения (1.10), которое помножим слева на $(\mathbf{R}+p\mathbf{L})^{-1}$. Но для справедливости этого действия надо доказать, что матрица $(\mathbf{R}+p\mathbf{L})^{-1}$ существует, т. е. определитель $|\mathbf{R}+p\mathbf{L}|$ отличен от нуля. Мы имеем

$$|\mathbf{R}+p\mathbf{L}| = |\mathbf{R}|\,|\mathbf{E}_n + p\mathbf{R}^{-1}\mathbf{L}| = |\mathbf{R}|\,p^n\,|\mathbf{R}^{-1}\mathbf{L} + \tfrac{1}{p}\mathbf{E}_n|$$

где

$$\mathbf{E}_n = [1, 1, \ldots, 1]$$

Матрица $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{L}$ является произведением двух положительно определенных матриц, поэтому согласно известной теореме [5] характеристическое уравнение

$$|\mathbf{R}^{-1}\mathbf{L} - \mu\mathbf{E}_n| = 0$$

имеет лишь положительные корни. Поэтому определитель $\left|\mathbf{R}^{-1}\mathbf{L} + \frac{1}{p}\mathbf{E}_n\right|$ обращается в нуль только при некоторых отрицательных значениях p.

Но при преобразовании Лапласа можно рассматривать значения p при $\operatorname{Re} p > 0$ и, следовательно, матрица $(\mathbf{R}+p\mathbf{L})^{-1}$ существует. По той же самой причине существует $(\mathbf{\Gamma}^2)^{-1} = [(\mathbf{R}+p\mathbf{L})(\mathbf{G}+p\mathbf{C})]^{-1}$ и также $\mathbf{\Gamma}^{-1}$.

Таким образом, в силу (1.13) получаем

$$\overline{\mathbf{i}}(x,p) = (\mathbf{G}+p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1}(e^{-\mathbf{\Gamma}x}\mathbf{c} - e^{\mathbf{\Gamma}x}\mathbf{d}) \tag{1.14}$$

3°. Ввиду условий (1.5) при обозначении $\overline{\mathbf{v}}(p) = L_t\{\mathbf{v}(t)\}$ имеем следующие преобразования Лапласа равенств (1.8):

$$\mathbf{P}^{(1)}(p)\overline{\mathbf{u}}(0, p) - \mathbf{a}^{(1)}(p) = \mathbf{P}^{(3)}(p)\overline{\mathbf{v}}(p) - \mathbf{a}^{(3)}(p) - \mathbf{P}^{(2)}(p)\overline{\mathbf{i}}(0, p) + \mathbf{a}^{(2)}(p)$$
$$\mathbf{Q}^{(1)}(p)\overline{\mathbf{u}}(l, p) = \mathbf{Q}^{(2)}(p)\overline{\mathbf{i}}(l, p) \tag{1.15}$$

где элементы колонных матриц $\mathbf{a}^{(1)}(p)$, $\mathbf{a}^{(2)}(p)$ и $\mathbf{a}^{(3)}(p)$ являются многочленами от p. Они составлены преобразованием (1.4) и объединением тех членов, которые содержат начальные значения (1.5). Введем обозначение

$$\mathbf{P}^{(3)}(p)\overline{\mathbf{v}}(p) + \mathbf{a}^{(1)}(p) + \mathbf{a}^{(2)}(p) - \mathbf{a}^{(3)}(p) = \mathbf{q}(p) \tag{1.16}$$

При помощи уравнений (1.15) надо найти неизвестные колонные матрицы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ в решении (1.13) и (1.14) преобразованной системы (1.10). При $x = 0$ и $x = l$ из решений (1.13) и (1.14) следует

$$\overline{\mathbf{u}}(0, p) = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \qquad \overline{\mathbf{i}}(0, p) = (\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{d})$$
$$\overline{\mathbf{u}}(l, p) = e^{-\mathbf{\Gamma} l}\,\mathbf{c} + e^{\mathbf{\Gamma} l}\,\mathbf{d}, \qquad \overline{\mathbf{i}}(l, p) = (\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1}(e^{-\mathbf{\Gamma} l}\,\mathbf{c} - e^{\mathbf{\Gamma} l}\,\mathbf{d})$$

Вместе с уравнениями (1.15) мы имеем здесь шесть уравнений с шестью неизвестными матрицами $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\overline{\mathbf{u}}(0, p)$, $\overline{\mathbf{i}}(0, p)$, $\overline{\mathbf{u}}(l, p)$ и $\overline{\mathbf{i}}(l, p)$. Предполагая существование некоторых обратных матриц, из этих уравнений легко получаются матрицы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$; подставляя полученные выражения в (1.13) и (1.14) и вводя обозначения

$$\mathbf{Z}_1 = [\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{P}^{(1)}]^{-1}\,[\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{P}^{(1)}]$$
$$\mathbf{Z}_2 = [\mathbf{Q}^{(2)}(\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{Q}^{(1)}]^{-1}\,[\mathbf{Q}^{(2)}(\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{Q}^{(1)}] \tag{1.17}$$
$$\mathbf{Z}_3 = [\mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1} + \mathbf{P}^{(1)}]^{-1}$$

получим

$$\overline{\mathbf{u}}(x, p) = (e^{-\mathbf{\Gamma} x} + e^{-\mathbf{\Gamma}(l-x)}\mathbf{Z}_2 e^{-\mathbf{\Gamma} l})\,(\mathbf{E}_n - \mathbf{Z}_1 e^{-\mathbf{\Gamma} l}\,\mathbf{Z}_2 e^{-\mathbf{\Gamma} l})^{-1}\,\mathbf{Z}_3\mathbf{q}$$
$$\overline{\mathbf{i}}(x, p) = (\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\mathbf{\Gamma}^{-1}(e^{-\mathbf{\Gamma} x} - e^{-\mathbf{\Gamma}(l-x)}\,\mathbf{Z}_2 e^{-\mathbf{\Gamma} l})\,(\mathbf{E}_n - \mathbf{Z}_1 e^{-\mathbf{\Gamma} l}\,\mathbf{Z}_2 e^{-\mathbf{\Gamma}\ })^{-1}\mathbf{Z}_3\mathbf{q} \tag{1.18}$$

При этом предполагаем, что обратные матрицы в выражениях для $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_3$, а также в (1.18) существуют.

Очевидно, что решение (1.18) справедливо также в случае одного провода, если вместо матриц брать числа.

4°. Для нахождения решения системы (1.1) надо совершить обратное преобразование Лапласа выражений (1.18). Если между первичными параметрами проводов не существует никаких соотношений, то даже при простейших граничных условиях эта задача пока не разрешима и поэтому метод преобразования Лапласа в общем случае пока неприменим. Метод применим только в случае, когда система (1.1) расщепляема, т. е. имеют место условия В. И. Коваленкова [5]

$$\mathbf{LCR} = \mathbf{RCL}, \qquad \mathbf{CRG} = \mathbf{GRC}, \qquad \mathbf{RGL} = \mathbf{LGR}$$

В частности, эти условия выполняются для симметричного пучка проводов.

При указанных условиях матрицы $\mathbf{LC}$, $\mathbf{RC}$, $\mathbf{LG}$ и $\mathbf{RG}$, а также и матрица $\mathbf{\Gamma}$ одновременно приводятся к диагональному виду при помощи одной и той же матрицы, которую обозначим через $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{LC} = \mathbf{S}^{-1}[\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}]\,\mathbf{S}, \qquad \mathbf{RC} = \mathbf{S}^{-1}[\lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2n}]\,\mathbf{S}$$
$$\mathbf{LG} = \mathbf{S}^{-1}[\lambda_{31}, \ldots, \lambda_{3n}]\,\mathbf{S}, \qquad \mathbf{RG} = \mathbf{S}^{-1}[\lambda_{41}, \ldots, \lambda_{4n}]\,\mathbf{S}$$
$$e^{\pm\mathbf{\Gamma} x} = \mathbf{S}^{-1}[e^{\pm\gamma_1 x}, e^{\pm\gamma_2 x}, \ldots, e^{\pm\gamma_n x}]\,\mathbf{S}$$

где

$$\gamma_k = \sqrt{p^2\lambda_{1k} + p(\lambda_{2k} + \lambda_{3k}) + \lambda_{4k}} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

Значения корней γ_k можно выбрать так, чтобы при $\operatorname{Re} p > 0$ было $\operatorname{Re}\gamma_k > 0$. Из канонического вида матрицы $e^{-\Gamma x}$ следует

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\Gamma x} = 0$$

поэтому в случае полубесконечно длинных проводов получаем

$$\overline{\mathbf{u}}(x, p) = e^{-\Gamma x} Z_3 \mathbf{q}, \qquad \overline{\mathbf{i}}(x, p) = (\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\Gamma^{-1} e^{-\Gamma x} \mathbf{Z}_3 \mathbf{q} \tag{1.19}$$

Матрицу $(\mathbf{E}_n - \mathbf{Z}_1 e^{-\Gamma l}\, \mathbf{Z}_2 e^{-\Gamma l})^{-1}$ обычно можно разложить в бесконечный ряд матриц в виде геометрической прогрессии, откуда после перемножения получаются также разложения матриц $\overline{\mathbf{u}}(x, p)$ и $\overline{\mathbf{i}}(x, p)$ в бесконечные матричные ряды. Обратное преобразование Лапласа надо совершить над отдельными элементами каждого члена ряда. Теоретически при помощи кратных свертываний в случае расщепляемости это возможно, но практически даже при несложных приемно-передающих устройствах задача представит громадные затруднения, ввиду чего полученный результат не имеет практической ценности.

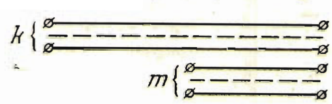
Однако имеется также ряд основных задач, в которых сравнительно легко выполняется обращение преобразования Лапласа.

Задача обращения значительно упрощается, если матрицы $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_3$ приводятся к диагональному виду при помощи той же самой матрицы S. В таком случае можно воспользоваться известными формулами, выражающими решение обычной системы телеграфных уравнений. Возможности указанной приводимости матриц $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ и $\mathbf{Z}_3$ можно достичь, согласуя приемно-передающие устройства с параметрами проводов. Если, например,

$$\mathbf{Q}^{(1)}(p) = (\alpha_0 p^m + \alpha_1 p^{m-1} + \cdots + \alpha_m)\,\mathbf{E}_n$$
$$\mathbf{Q}^{(2)}(p) = (\beta_0 p^k + \beta_1 p^{k-1} + \cdots + \beta_k)\,\mathbf{R}$$

то матрица $\mathbf{Z}_2$ приводится к диагональному виду при помощи матрицы S.

§ 2. Пучок, состоящий из проводов различной длины. **1°.** Рассмотрим пучок параллельных телеграфных проводов, схематично представленный на фиг. 1, где первые k проводов имеют длину l, а остальные m проводов — длину $l_1 < l$, причем все провода доходят до одной и той же приемной станции (фиг. 1).



Фиг. 1

Для исследования переходных явлений в проводах введем две обобщенные системы телеграфных уравнений. Первую систему составим для первых k проводов при $0 \leqslant x \leqslant l - l_1$, а вторую для всех $k + m$ проводов при $l - l_1 \leqslant x \leqslant l$. Таким образом, при прежних матричных обозначениях имеем системы

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{R}^{(1)}\mathbf{i}^{(1)} + \mathbf{L}^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{i}^{(1)} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}^{(1)} &= \mathbf{G}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{C}^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}^{(1)} \end{aligned} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l - l_1) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u} &= \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{i} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} &= \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} \end{aligned} \qquad (l - l_1 \leqslant x \leqslant l) \tag{2.2}$$

Обе системы решим при тех же нулевых начальных условиях, как в § 1.

Граничное условие для первой системы в начале проводов имеет вид:

$$\mathbf{P}^{(4)}(D)\,\mathbf{u}^{(1)}(0,\,t) = \mathbf{P}^{(6)}(D)\,\mathbf{v}^{(1)}(t) - \mathbf{P}^{(5)}(D)\,\mathbf{i}^{(1)}(0,\,t) \tag{2.3}$$

а для второй системы в конце проводов

$$\mathbf{Q}^{(1)}(D)\,\mathbf{u}\,(l,\,t) = \mathbf{Q}^{(2)}(D)\,\mathbf{i}\,(l,\,t) \tag{2.4}$$

где матрицы $\mathbf{P}^{(i)}$ и $\mathbf{Q}^{(i)}$ характеризуют приемно-передающие устройства, а $\mathbf{v}^{(1)}(t)$ — включенные напряжения в начале проводов первой группы. Для этих соотношений имеют место начальные условия типа (1.5). Кроме того, при обозначениях

$$\mathbf{u}^{(2)} = \left\|\begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{matrix}\right\|, \qquad \mathbf{u}^{(3)} = \left\|\begin{matrix} u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+m} \end{matrix}\right\|, \qquad \mathbf{u} = \left\|\begin{matrix} \mathbf{u}^{(2)} \\ \\ \mathbf{u}^{(3)} \end{matrix}\right\|$$

$$\mathbf{i}^{(2)} = \left\|\begin{matrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \end{matrix}\right\|, \qquad \mathbf{i}^{(3)} = \left\|\begin{matrix} i_{k+1} \\ \vdots \\ i_{k+m} \end{matrix}\right\|, \qquad \mathbf{i} = \left\|\begin{matrix} \mathbf{i}^{(2)} \\ \\ \mathbf{i}^{(3)} \end{matrix}\right\| \qquad (l - l_1 \leqslant x \leqslant l)$$

имеем следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \mathbf{u}^{(1)}(l_2,\,t) = \mathbf{u}^{(2)}(l_2,\,t), \qquad \mathbf{i}^{(1)}(l_2,\,t) = \mathbf{i}^{(2)}(l_2,\,t) \qquad (l - l_1 = l_2) \\ \mathbf{P}^{(7)}(D)\,\mathbf{u}^{(3)}(l_2,\,t) = \mathbf{P}^{(9)}(D)\,\mathbf{v}^{(2)}(t) - \mathbf{P}^{(8)}(D)\,\mathbf{i}^{(3)}(l_2,\,t) \end{gathered} \tag{2.5}$$

где матрицы $\mathbf{P}^{(7)}(D)$, $\mathbf{P}^{(8)}(D)$ и $\mathbf{P}^{(9)}(D)$ характеризуют передающие устройства, а $\mathbf{v}^{(2)}(t)$ — включенные напряжения в начале проводов второй группы.

2°. После преобразования Лапласа изображение системы (2.2) имеет вид (1.10). Эту систему следует решить при граничном условии

$$\mathbf{Q}^{(1)}(p)\,\overline{\mathbf{u}}\,(l,\,p) = \mathbf{Q}^{(2)}(p)\,\overline{\mathbf{i}}\,(l,\,p)$$

и втором условии, которое возьмем в таком виде:

$$\mathbf{P}^{(1)}(p)\,\overline{\mathbf{u}}\,(l_2,\,p) = \mathbf{q}\,(p) - \mathbf{P}^{(2)}(p)\,\overline{\mathbf{i}}\,(l_2,\,p) \tag{2.6}$$

где матрицы $\mathbf{q}\,(p)$, $\mathbf{P}^{(1)}(p)$ и $\mathbf{P}^{(2)}\,(p)$ пока не известны.

Тогда решение изображенной системы при обозначениях (1.17) получается из формул (1.18), в которых в правой части надо заменить x на $x - l_2$ и l на l_1:

$$\begin{gathered} \overline{\mathbf{u}}\,(x,\,p) = [e^{-\Gamma(x-l_2)} + e^{-\Gamma(l-x)}\mathbf{Z}_2 e^{-\Gamma l_1}]\,[\mathbf{E}_n - \mathbf{Z}_1 e^{-\Gamma l_1}\mathbf{Z}_2 e^{-\Gamma l_1}]^{-1}\,\mathbf{Z}_3\mathbf{q} \\ \overline{\mathbf{i}}\,(x,\,p) = (\mathbf{G} + p\mathbf{C})\,\Gamma^{-1}\,[e^{-\Gamma(x-l_2)} - e^{-\Gamma(l-x)}\mathbf{Z}_2 e^{-\Gamma l_1}]\,[\mathbf{E}_n - \mathbf{Z}_1 e^{-\Gamma l_1}\mathbf{Z}_2 e^{-\Gamma l_1}]^{-1}\,\mathbf{Z}_3\mathbf{q} \end{gathered} \tag{2.7}$$

Остается определить неизвестные матрицы в выражении (2.6), и это удается, если воспользоваться изображениями соотношений (2.5). Ввиду соответствующих начальных условий мы непосредственно получаем соотношение требуемого вида между матрицами $\overline{\mathbf{u}}^{(3)}\,(l_2,\,p)$ и $\overline{\mathbf{i}}^{(3)}\,(l_2,\,p)$:

$$\mathbf{P}^{(7)}(p)\,\overline{\mathbf{u}}^{(3)}(l_2,\,p) = \mathbf{q}^{(2)}(p) - \mathbf{P}^{(8)}(p)\,\overline{\mathbf{i}}^{(3)}(l_2,\,p) \tag{2.8}$$

Подобное соотношение между матрицами $\overline{\mathbf{u}}^{(2)}\,(l_2,\,p)$ и $\overline{\mathbf{u}}^{(1)}\,(l_2,\,p)$ получим впоследствии из остальных равенств:

$$\overline{\mathbf{u}}^{(1)}(l_2,\,p) = \overline{\mathbf{u}}^{(2)}(l_2,\,p), \qquad \overline{\mathbf{i}}^{(1)}(l_2,\,p) = \overline{\mathbf{i}}^{(2)}(l_2,\,p) \tag{2.9}$$

3°. Решение системы, полученной в результате изображения системы (2.1) имеет вид:

$$\begin{gathered} \overline{\mathbf{u}}^{(1)}(x,\,p) = e^{-\Gamma^{(1)}x}\,\mathbf{c} + e^{\Gamma^{(1)}x}\,\mathbf{d} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l_2) \\ \overline{\mathbf{i}}^{(1)}(x,\,p) = (\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})\,(\Gamma^{(1)})^{-1}\,(e^{-\Gamma^{(1)}x}\,\mathbf{c} - e^{\Gamma^{(1)}x}\,\mathbf{d}) \end{gathered} \tag{2.10}$$

Неизвестные постоянные матрицы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ можно выразить через значения $\bar{\mathbf{u}}^{(1)}(x, p)$ и $\bar{\mathbf{i}}^{(1)}(x, p)$ при некотором фиксированном $x = x_0 \leqslant l_2$. Подставляя матрицы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ в решение, имеем

$$\bar{\mathbf{u}}^{(1)}(x, p) = \tfrac{1}{2}\,[e^{-\Gamma^{(1)}(x-x_0)} + e^{\Gamma^{(1)}(x-x_0)}]\,\bar{\mathbf{u}}^{(1)}(x_0, p) + \tfrac{1}{2}\,[e^{-\Gamma^{(1)}(x-x_0)} - e^{\Gamma^{(1)}(x-x_0)}]\,\Gamma^{(1)}(\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})^{-1}\,\bar{\mathbf{i}}^{(1)}(x_0, p) \tag{2.11}$$

$$\bar{\mathbf{i}}^{(1)}(x, p) = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})\,(\Gamma^{(1)})^{-1}\,[e^{-\Gamma^{(1)}(x-x_0)} - e^{\Gamma^{(1)}(x-x_0)}]\,\bar{\mathbf{u}}^{(1)}(x_0, p) + \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})\,[e^{-\Gamma^{(1)}(x-x_0)} + e^{\Gamma^{(1)}(x-x_0)}]\,(\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})^{-1}\,\bar{\mathbf{i}}^{(1)}(x_0, p)$$

При $x_0 = l_2$ мы заменим в формулах (2.11) $\bar{\mathbf{u}}^{(1)}(l_2, p)$ на $\bar{\mathbf{u}}^{(2)}(l_2, p)$ и $\bar{\mathbf{i}}^{(1)}(l_2, p)$ на $\bar{\mathbf{i}}^{(2)}(l_2, p)$. Затем положим $x = 0$ и подставим полученные значения $\bar{\mathbf{u}}^{(1)}(0, p)$ и $\bar{\mathbf{i}}^{(1)}(0, p)$ в соотношение

$$\mathbf{P}^{(4)}(p)\,\bar{\mathbf{u}}^{(1)}(0, p) = \mathbf{q}^{(1)}(p) - \mathbf{P}^{(5)}(p)\,\bar{\mathbf{i}}^{(1)}(0, p)$$

которое является изображением от (2.3) ввиду соответствующих условий. Таким образом, вводя обозначения

$$\Phi^{(1)}(p) = \tfrac{1}{2}\,[\mathbf{P}^{(5)}(p)\,(\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})\,(\Gamma^{(1)})^{-1}\,(e^{\Gamma^{(1)} l_2} - e^{-\Gamma^{(1)} l_2}) + \mathbf{P}^{(4)}(p)\,(e^{\Gamma^{(1)} l_2} + e^{-\Gamma^{(1)} l_2})] \tag{2.12}$$

$$\Phi^{(2)}(p) = \tfrac{1}{2}\,[\mathbf{P}^{(5)}(p)\,(\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})\,(e^{\Gamma^{(1)} l_2} + e^{-\Gamma^{(1)} l_2})\,(\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})^{-1} + \mathbf{P}^{(4)}(p)\,(e^{\Gamma^{(1)} l_2} - e^{-\Gamma^{(1)} l_2})\,\Gamma^{(1)}\,(\mathbf{G}^{(1)} + p\mathbf{C}^{(1)})^{-1}]$$

получаем

$$\Phi^{(1)}(p)\,\bar{\mathbf{u}}^{(2)}(l_2, p) = \mathbf{q}^{(1)}(p) - \Phi^{(2)}(p)\,\bar{\mathbf{i}}^{(2)}(l_2, p)$$

Следовательно, мы требуемые матрицы найдем в следующем виде:

$$\mathbf{q}(p) = \left\| \begin{matrix} \mathbf{q}^{(1)}(p) \\ \mathbf{q}^{(2)}(p) \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{P}^{(1)}(p) = [\Phi^{(1)}(p),\ \mathbf{P}^{(7)}(p)], \quad \mathbf{P}^{(2)}(p) = [\Phi^{(2)}(p),\ \mathbf{P}^{(8)}(p)] \tag{2.13}$$

Полученным решением (2.7) можно воспользоваться также при $k = 1$ и $m = 0$, т. е. для одного провода, состоящего из двух участков с различными параметрами (фиг. 2). При этом решение задачи, т. е. значения напряжения и силы тока, получаем для участка B. Аналогично рассматривается задача, когда $l_1 > l$, т. е. вторая группа проводов длиннее первой, причем все провода исходят из одной и той же передающей станции.

Фиг. 2

Заметим, что ввиду сложности решений применить известные формулы обратного преобразования Лапласа удается лишь в весьма частных случаях.

Поступила 6 XI 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма Н. А. и Мышкис А. Д. Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 4. Стр. 495—500.
2. Диткин В. А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ. 1951. Стр. 81.
3. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. ГИТТЛ. 1949. Стр. 201—204.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГИТТЛ. 1950. Т. III. Ч. 2. Стр. 339.
5. Риекстыньш Э. Я. Об условиях расщепления обобщенной системы телеграфных уравнений. Ученые записки Латвийского госуниверситета. 1952. № 6.