Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В. М. Старжинский

(Москва)

А. М. Ляпунов [1] и Н. Г. Четаев [2] при исследовании устойчивости неустановившихся движений рассматривали знакоопределенные квадратичные формы с постоянными коэффициентами, полная производная по времени от которых, взятая в силу дифференциальных уравнений возмущенного движения, представляла знакоопределенную функцию противоположного знака. Этот прием был применен в статьях Ш. Нугмановой [3] и М. А. Айзермана. [4] В настоящей статье используется второй метод Ляпунова для получения достаточных условий устойчивости по Ляпунову механической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$

где функции $p(t)$ и $q(t)$ — непрерывные и вещественные для всех значений t, не меньших некоторого предела. Заменим уравнение (1) системой

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -q(t)x - p(t)y$$

Зададимся определенно положительной квадратичной формой

$$V = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2xy + Cy^2) \qquad (A > 0, \ AC > 1)$$

Производная от V в силу исходной системы уравнений имеет вид:

$$\frac{dV}{dt} = -q(t)x^2 - [p(t) + Cq(t) - A]xy - [Cp(t) - 1]y^2$$

и будет определенно отрицательна в смысле Ляпунова, если

$$q(t) \geqslant m > 0$$

$$[p(t)]^2 - 2Cp(t)q(t) + C^2[q(t)]^2 - 2Ap(t) - 2(AC-2)q(t) + A^2 + \varepsilon C^2 \leqslant 0 \qquad (\varepsilon > 0)$$

Рассмотрим ε-параболу:

$$p^2 - 2Cpq + C^2q^2 - 2Ap - 2(AC-2)q + A^2 + \varepsilon C^2 = 0$$

Вершина ε-параболы находится в точке

$$p_0 = \frac{C^3 + A + 2C}{(1+C^2)^2} + \frac{\varepsilon C^3}{4(AC-1)}, \qquad q_0 = \frac{C^2(AC-1)}{(1+C^2)^2} + \frac{\varepsilon C^2}{4(AC-1)}$$

а ось симметрии наклонена к оси p под углом $\alpha = \operatorname{arc\,ctg} C$.

Рассматриваемая ε-парабола касается прямой $q = 0.25\ \varepsilon C^2(AC-1)^{-1}$ в точке $p = A + 0.25\,\varepsilon C^3(AC-1)^{-1}$ и прямой $p = C^{-1} + 0.25\,\varepsilon C^3(AC-1)^{-1}$ в точке $q = (AC-1)C^{-2} + 0.25\,\varepsilon C^2(AC-1)^{-1}$.

Условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости будут выполнены, если точка с координатами $(p(t), q(t))$ не выйдет, начиная с некоторого момента времени, из ε-параболы.

Допустим, функции $p(t)$ и $q(t)$ таковы, что с некоторого момента времени:

$$0 < l \leqslant p(t) \leqslant L, \qquad 0 < m \leqslant q(t) \leqslant M \tag{2}$$

Прямоугольник $(l, L; m, M)$ будет находиться внутри или на границе ε-параболы, если

$$l^2 - 2(A + mC)\, l + (A - mC)^2 + 4m + \varepsilon C^2 \leqslant 0 \tag{3}$$

$$L^2 - 2(A + mC)\, L + (A - mC)^2 + 4m + \varepsilon C^2 \leqslant 0 \tag{4}$$

$$l^2 - 2(A + MC)\, l + (A - MC)^2 + 4M + \varepsilon C^2 \leqslant 0 \tag{5}$$

Найдем точки пересечения ε-параболы с прямой $q = Q$:

$$p_{1,2} = A + QC \mp \sqrt{4Q(AC - 1) - \varepsilon C^2} \tag{6}$$

Будем предполагать, что положительные числа A и C выбраны таким образом, что $A > C^{-1} + 0.25\,\varepsilon C m^{-1}$. Тогда, разрешая неравенства (3) — (5) относительно l и L, получим соответственно

$$A + mC - \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2} \leqslant l \tag{7}$$

$$L \leqslant A + mC + \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2} \tag{8}$$

$$A + MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2} \leqslant l \tag{9}$$

а) Выберем числа A и C таким образом, чтобы

$$mC - \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2} \leqslant MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2}$$

или

$$4(AC - 1) \leqslant C\left[\sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2} + \sqrt{4m(AC - 1) - \varepsilon C^2}\right]$$

Возведя последнее неравенство в квадрат, получим

$$8(AC - 1)^2 - 2(M + m)(AC - 1)C^2 + \varepsilon C^4 \leqslant$$

$$\leqslant C^2\sqrt{16Mm(AC - 1)^2 - 4(M + m)(AC - 1)\varepsilon C^2 + \varepsilon^2 C^4}$$

Это неравенство можно возводить в квадрат при условии непротиворечивости неравенств (8) и (9), откуда следует

$$16(AC - 1)^2 - 8(M + m)(AC - 1)C^2 + (M - m)^2 C^4 + 4\varepsilon C^4 \leqslant 0$$

что может быть записано в виде

$$A = \frac{1}{C} + \left[M + m + 2(2\varkappa - 1)\sqrt{Mm - \varepsilon}\right]\frac{C}{4} \qquad (0 \leqslant \varkappa \leqslant 1) \tag{10}$$

Тогда

$$A + MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2} = \frac{1}{C} + \left[f(\varkappa, M) + \frac{\varepsilon}{M}\right]\frac{C}{4}$$

где

$$f(\varkappa, Q) = \left[2\sqrt{Q} - \sqrt{(M + m) + 2(2\varkappa - 1)\sqrt{Mm - \varepsilon} - \frac{\varepsilon}{Q}}\right]^2$$

Наименьшее значение левой части неравенства (9) достигается при $\varkappa = 1$[1] $C = 2\,[f(1, M) + \varepsilon M^{-1}]^{-1/2}$ и составляет

$$\left[A + MC - \sqrt{4M(AC - 1) - \varepsilon C^2}\right]_{\text{наим}} = \frac{1}{2}\sqrt{f(1, M) + \varepsilon M^{-1}} + \frac{f(1, M)}{2\sqrt{f(1, M) + \varepsilon M^{-1}}}$$

При достаточно малом ε эта величина сколь угодно близка к $\sqrt{M}-\sqrt{m}$.

б) Выберем числа A и C таким образом, чтобы

$$MC-\sqrt{4M(AC-1)-\varepsilon C^2}\leqslant mC-\sqrt{4m(AC-1)-\varepsilon C^2}$$

Поступая аналогично (а), придем к неравенству

$$16(AC-1)^2-8(M+m)(AC-1)C^2+(M-m)^2C^4+4\varepsilon C^4\geqslant 0$$

Разрешая его относительно A, получим

$$AC-1\leqslant\left[M+m-2\sqrt{Mm-\varepsilon}\right]\frac{C^2}{4},\quad \left[M+m+2\sqrt{Mm-\varepsilon}\right]\frac{C^2}{4}\leqslant AC-1$$

Положив $\varepsilon=0$, можно убедиться в том, что первое из двух последних неравенств является лишним. Таким образом, мы получаем для A выражение (10), но при условии $\varkappa\geqslant 1$. Тогда

$$A+mC-\sqrt{4m(AC-1)-\varepsilon C^2}=\frac{1}{C}+\left[f(\varkappa,m)+\frac{\varepsilon}{m}\right]\frac{C}{4}$$

Наименьшее значение левой части неравенства (7) достигается при $\varkappa=1$, $C=2\left[f(1,m)+\varepsilon m^{-1}\right]^{-1/2}$ и составляет

$$\left[A+mC-\sqrt{4m(AC-1)-\varepsilon C^2}\right]_{\text{наим}}=\frac{1}{2}\sqrt{f(1,m)+\varepsilon m^{-1}}+\frac{f(1,m)}{2\sqrt{f(1,m)+\varepsilon m^{-1}}}$$

При достаточно малом ε эта величина сколь угодно близка к $\sqrt{M}-\sqrt{m}$.

Вычислим правую часть неравенства (8), подставив A из выражения (10):

$$A+mC+\sqrt{4m(AC-1)-\varepsilon C^2}=$$

$$=\frac{1}{C}+\left\{\left[2\sqrt{m}+\sqrt{M+m+2(2\varkappa-1)\sqrt{Mm-\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{m}}\right]^2+\frac{\varepsilon}{m}\right\}\frac{C}{4}$$

При $\varkappa=1$ и $C=2\left[f(1,M)+\varepsilon M^{-1}\right]^{-1/2}$ или $C=2\left[f(1,m)+\varepsilon m^{-1}\right]^{-1/2}$ эта величина при достаточно малом ε сколько угодно близка к

$$\frac{M+2\sqrt{Mm}+5m}{\sqrt{M}-\sqrt{m}}$$

Таким образом, достаточное условие асимптотической устойчивости по Ляпунову механической системы, описываемой уравнением (1), где функции $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют условиям (2), а число L условию

$$L<\frac{M+2\sqrt{Mm}+5m}{\sqrt{M}-\sqrt{m}}\tag{11}$$

есть

$$l>\sqrt{M}-\sqrt{m}\tag{12}$$

Для устойчивости неравенства (11) и (12) могут выполняться и со знаком равенства.

Граница снизу для l не может быть уменьшена, если для установления достаточных условий устойчивости используется знакоопределенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами и на функции $p(t)$ и $q(t)$ не накладывается никаких иных условий, кроме (2) и (11).

Рассмотрим случаи когда одна из функций в уравнении (1) постоянна.

1°. Пусть $p(t)\equiv P$, $0<m\leqslant q(t)\leqslant M$; тогда условие (12) принимает вид

$$P>\sqrt{M}-\sqrt{m}\tag{13}$$

Если ограничиться устойчивостью, то можно рассматривать $p(t) \equiv P$, $0 \leqslant (q)(t) \leqslant M$; тогда условие неположительности dV/dt, будучи разрешено относительно $q(t)$, даст

$$\frac{(A+P)C-2-2\sqrt{(AC-1)(PC-1)}}{C^2} \leqslant q(t) \leqslant \frac{(A+P)C-2+2\sqrt{(AC-1)(PC-1)}}{C^2}$$

Левая часть неравенства обращается в нуль только при $A = P$, и тогда наибольшая величина правой части неравенства достигается при $C = 2/P$ и равна P^2. Отсюда заключаем, что при $P \geqslant \sqrt{M}$ выполнены условия теоремы Ляпунова об устойчивости.

2°. Пусть $q(t) \equiv Q > 0$, $l \leqslant p(t) \leqslant L$; тогда условие (12) принимает ви

$$l > 0 \tag{14}$$

При $q(t) \equiv Q$ выбранное нами значение C неограниченно возрастает при сколь угодно малом ε, в чем можно убедиться непосредственно. При $q(t) \equiv Q > 0$ условие определенной отрицательности dV/dt может быть записано в виде [см. (6)]

$$A + QC - \sqrt{4Q(AC-1) - \varepsilon C^2} \leqslant p(t) \leqslant A + QC + \sqrt{4Q(AC-1) - \varepsilon C^2}$$

Покажем, что при любом $Q > 0$ левая часть неравенства может быть сделана сколь угодно малой, а правая часть неравенства сколь угодно большой (при одних и тех же $C > 0$, $A > C^{-1} + 0.25\,\varepsilon C Q^{-1}$). Положим $A = QC$, тогда

$$A + QC \mp \sqrt{4Q(AC-1) - \varepsilon C^2} = 2QC\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{1}{QC^2} - \frac{\varepsilon}{4Q^2}}\right]$$

Таким образом, при достаточно большом C и достаточно малом ε производная dV/dt определенно отрицательна при любой ограниченной сверху и снизу положительной функции $p(t)$ и при любом $Q > 0$.

В качестве примера, иллюстрирующего первый частный случай, положим [4, 5]

$$p(t) \equiv a, \quad q(t) = 1 + q\cos\frac{2t}{\mu}, \quad 0 < q < 1$$

Здесь $m = 1 - q$, $M = 1 + q$ и условие (13) дает для асимптотической устойчивости

$$a > \sqrt{1+q} - \sqrt{1-q} \tag{15}$$

При этом область устойчивости на плоскости (a, q) больше области, указанной в [4], в частности, при q, стремящемся к единице, граница для a стремится не к бесконечности, а к $\sqrt{2}$.

Покажем, что граница для a может быть уменьшена для некоторых значений параметров системы, если за функцию Ляпунова примем определенно-положительную форму, явно зависящую от времени. Положим

$$V = x^2 + \frac{y^2}{q(t)}, \qquad 0 < q(t) \leqslant M$$

Производная от V в силу исходной системы уравнений имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{q(t)}\left[\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} + 2p(t)\right]y^2$$

и будет неположительна, если

$$2p(t) \geqslant -\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} \tag{16}$$

Рассматриваемая функция Ляпунова связана с нормированной энергией E системы, а именно: $V = 2E / q(t)$. Покажем, что условие ограниченности сверху для функции $q(t)$ может быть в некоторых случаях снято. Замена независимого переменного

$$\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{q(\xi)}\, d\xi$$

приводит уравнение (1) к виду:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + p^*(\tau)\frac{dx}{d\tau} + x = 0, \qquad p^*(\tau) = \left[\frac{p(t)}{\sqrt{q(t)}} + \frac{\dot q(t)}{2q(t)\sqrt{q(t)}}\right]_{t=t(\tau)}$$

Если

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{q(\xi)}\, d\xi$$

сходится, то для устойчивости достаточно ограниченности $p^*(\tau)$, поскольку бесконечный промежуток $[t_0, \infty]$ на оси t переходит в конечный отрезок $[0, J]$ на оси τ. Если же $J = \infty$, то в силу (14) достаточными условиями асимптотической устойчивости являются

$$0 < l' \leqslant p^*(\tau) \leqslant L'$$

а для устойчивости достаточно, чтобы

$$p(t) + \frac{\dot q(t)}{2q(t)} \geqslant 0, \qquad \frac{p(t)}{\sqrt{q(t)}} + \frac{\dot q(t)}{2q(t)\sqrt{q(t)}} \leqslant L'$$

Первое из двух последних неравенств совпадает с (16).

Достаточное условие устойчивости (16) для рассматриваемого нами примера запишется в виде

$$a \geqslant \frac{q}{\mu} \frac{\sin(2t/\mu)}{1 + q\cos(2t/\mu)}$$

что приводит после определения наибольшей величины правой части неравенства к условию

$$a \geqslant \frac{q}{\mu\sqrt{1-q^2}} \tag{17}$$

Сравнивая неравенства (15) и (17) получим, что граница снизу для a, доставляемая неравенством (17), меньше границы снизу для a, доставляемой неравенством (15) только для

$$\mu > \frac{q}{\sqrt{1-q^2}\,(\sqrt{1+q} - \sqrt{1-q})} > 1$$

Вернемся к общему случаю при условии

$$L > \frac{M + 2\sqrt{Mm} + 5m}{\sqrt{M} - \sqrt{m}} \tag{18}$$

и проведем вычисления для устойчивости (т. е. при $\varepsilon = 0$). Заметим, что $\varkappa = 1$ соответствует тому, что неравенства (3) и (5) выполняются со знаком равенства

Тогда, вычитая из равенства (5) равенство (3), получим

$$l^* = \frac{M+m}{2} C - A + \frac{2}{C}$$

Из соотношения (10) при $\varkappa = 1$ и $\varepsilon = 0$

$$A = \frac{1}{C} + \frac{(\sqrt{M} + \sqrt{m})^2}{4} C$$

следовательно,

$$l^* = \frac{(\sqrt{M} - \sqrt{m})^2}{4} C + \frac{1}{C} \tag{19}$$

Вычитая из неравенства (8) равенство (7) и подставляя выражение для A, получим

$$L \leqslant \frac{1}{C} + \frac{M + 6\sqrt{Mm} + 9m}{4} C$$

Пусть

$$L = \frac{M + 2\sqrt{Mm} + 5m}{\sqrt{M} - \sqrt{m}} + \Delta L$$

Тогда, если последнее неравенство выполняется со знаком равенства, получаем квадратное уравнение для C:

$$\frac{M + 6\sqrt{Mm} + 9m}{4} C^2 - \left(\frac{M + 2\sqrt{Mm} + 5m}{\sqrt{M} - \sqrt{m}} + \Delta L\right) C + 1 = 0 \tag{20}$$

Легко проверить, что при $\Delta L = 0$ больший корень уравнения (20) равен $2 / \sqrt{M} - \sqrt{m}$, что дает по формуле (19) $l^* = \sqrt{M} - \sqrt{m}$. При $\Delta L > 0$ граница снизу для l получается из формулы (19), куда вместо C надлежит подставить больший корень уравнения (20). Таким образом, при условиях (2) и (18) достаточное условие устойчивости принимает вид:

$$l \geqslant l^*$$

Поступила 26 XII 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946.
3. Нугманова Ш. Об устойчивости периодических движений. ДАН СССР. 1944. Т. XLII. № 5.
4. Айзерман М. А. Достаточное условие устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 3.
5. Андронов А. А. и Леонтович М. А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. Журнал Русского физико-химического общества. Серия физическая. 1927. Т. IX. Вып. 5—6.