Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

§ 1. М. А. Айзерман [1] поставил следующую задачу.

Допустим, что система автоматического регулирования описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + f(x_k) \\ \frac{dx_s}{dt} &= a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n \qquad (s = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где a_{sj} — постоянные. Наряду с системой (1.1) рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + hx_k, \qquad \frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n$$

и допустим, что все корни ее характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части при всех значениях h, лежащих в интервале

$$\alpha < h < \beta \tag{1.2}$$

Требуется узнать, будет ли при любом выборе однозначной и непрерывной функции $f(x_k)$, обращающейся в нуль при $x_k = 0$ и удовлетворяющей при всех значениях $x_k \neq 0$ неравенствам

$$\alpha x_k^2 < x_k f(x_k) < \beta x_k^2 \tag{1.3}$$

состояние равновесия $x_1 = \cdots = x_n = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Для системы второго порядка указанной задачей занимался Н. П. Еругин [2, 3], который, однако, не дал полного ее решения. В настоящей заметке также рассматривается задача М. А. Айзермана для систем второго порядка и показывается, что в этом случае ответ всегда получается положительный. Этот результат получается в предположении, которое, вероятно, имел также в виду и М. А. Айзерман, что система (1.1) при любых начальных значениях величин x_s имеет единственное решение.

§ 2. Рассмотрим сначала систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + cy \tag{2.1}$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = hx + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + cy$$

имеет вид:

$$\rho^2 - (h + c)\rho + hc - ab = 0$$

Корни этого уравнения будут иметь отрицательные вещественные части при всех значениях h, удовлетворяющих условиям

$$h + c \leqslant 0, \qquad hc - ab \geqslant 0$$

со знаками неравенства. Поэтому, полагая $f(x) = x\,h(x)$ $(x \neq 0)$, будем по условию задачи иметь

$$h(x) + c < 0, \qquad h(x)\,c - ab > 0 \qquad (x \neq 0) \tag{2.2}$$

Мы будем, кроме того, предполагать, что при $|x| > \xi$, где ξ достаточно большое число, выполняется неравенство

$$h(x)\,c - ab > \varepsilon \qquad (|x| > \xi) \tag{2.3}$$

где ε положительное число, которое может быть сколь угодно малым.

Рассмотрим функцию

$$2V = 2c\int_0^x f(x)\,dx + (c^2 - ab)\,x^2 - 2acxy + a^2y^2 \equiv$$

$$\equiv 2\int_0^x [h(x)c - ab]\,x\,dx + (cx - ay)^2$$

На основании (2.2) эта функция определенно-положительна.

Составляя производную этой функции по t в силу уравнений (2.1), найдем

$$\frac{dV}{dt} = -abcx^2 + c\,f^2(x) + (c^2 - ab)\,x\,f(x)$$

Полученное выражение, обращаясь в нуль при $x = 0$, при $x \neq 0$ может принимать только отрицательные значения при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (2.2). Действительно, при условии (2.2) и при $x \neq 0$ будем иметь

$$\frac{dV}{dt} = (h + c)\,(ch - ab)\,x^2 < 0 \tag{2.4}$$

что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (2.2), V будет являться для уравнений (2.1) функцией Ляпунова. Отсюда немедленно вытекает устойчивость равновесия $x = y = 0$. Легко видеть, что при этом устойчивость будет асимптотической, несмотря на то, что функция V является не знакоопределенной, а только знакопостоянной. Действительно, dV/dt обращается в нуль только при $x = 0$ и, следовательно, интегральные кривые во всех точках, не лежащих на оси y, пересекают семейство замкнутых кривых $V = \text{const}$ снаружи во внутрь. Но то же самое будет, очевидно, иметь место и в точках, лежащих на оси y, так как при $x = 0$, как это следует из уравнений (2.1), $dx/dt \neq 0$. Разница будет лишь в том, что на оси y интегральные кривые, входя внутрь кривых $V = \text{const}$, будут при этом их касаться.

Итак, при любом выборе функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (2.2), равновесие $x = y = 0$ асимптотически устойчиво. И это будет иметь место, каковы бы ни были начальные значения величин x и y, так как, учитывая (2.3), можно показать, что кривые $V(x, y) = c$ замкнуты при любом c. Это можно также показать и не обращаясь к геометрической интерпретации.

Действительно, при $|x| > \xi$ мы можем, на основании (2.3), писать (знак плюс перед ξ берется при $x > \xi$ и знак минус — при $x < -\xi$)

$$2V = 2\int_0^{\pm\xi} [h(x)c - ab]\,x\,dx + 2\int_{\pm\xi}^x [h(x)c - ab]\,x\,dx +$$

$$+ (cx - ay)^2 > \frac{\varepsilon}{2}(x^2 - \xi^2) + (cx - ay)^2 \tag{2.5}$$

Пусть $x(t)$, $y(t)$ — произвольное решение уравнений (2.1). На основании (2.4) $V(x(t),\ y(t)) \leqslant V_0 = V(x(t_0),\ y(t_0))$. Но так как при достаточно больших x выполняется (2.5), то отсюда следует, что при всех $t \geqslant t_0$ рассматриваемое решение остается внутри круга достаточно большого радиуса с центром в начале координат. Но тогда это решение с неограниченным возрастанием t либо стремится к какому-нибудь периодическому решению $x^*(t)$, $y^*(t)$, либо к единственной особой точке $x = y = 0$. Но первый из этих случаев невозможен. Действительно, функция $V(x^*(t),\ y^*(t))$ отлична от постоянной, так как в силу (2.4) ее производная может обратиться тождественно в нуль только если $x^*(t) \equiv 0$, а последнее невозможно, так как в уравнениях (2.1) величина $a \neq 0$. Но если функция $V(x^*(t),\ y^*(t))$ отлична от постоянной, то, будучи периодической, она вопреки (2.4) не может обладать знакопостоянной производной. Таким образом система (2.1) не имеет периодических решений и, следовательно, решение $x(t)$, $y(t)$ при $t \to \infty$ стремится к нулю.

Мы предположили, что $a \neq 0$. Но полученный результат остается справедливым и при $a = 0$, как в этом легко убедиться непосредственным интегрированием системы (2.1), которая при $a = 0$ распадается на два отдельных уравнения.

Таким образом, для уравнений (2.1) ответ на вопрос, поставленный М. А. Айзерманом, всегда получается утвердительный.

§ 3. Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + f(y), \qquad \frac{dy}{dt} = bx + cy \tag{3.1}$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет теперь вид:

$$\rho^2 - (a + c)\rho + ac - bh = 0$$

Следовательно, для того чтобы корни этого уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a + c < 0, \qquad ac - bh > 0$$

Полагая $f(y) = yh(y)$, будем, следовательно, иметь

$$ac - bh(y) > 0 \tag{3.2}$$

Кроме того, предположим, что при достаточно больших значениях $|y|$ выполняется неравенство $ac - bh(y) > \varepsilon$.

В частности, если $b = 0$, то функция $f(y)$ ничем не ограничена. Но при $b = 0$, как это следует из (3.2), должно быть $a < 0$, $c < 0$ и непосредственное интегрирование системы (3.1) показывает, что равновесие асимптотически устойчиво при любом начальном возмущении и при любом выборе функции $f(y)$.

Допустим, что $b \neq 0$, и рассмотрим функцию

$$2V = -2b\int_0^y f(y)\,dy + b^2x^2 - 2abxy + a(a + c)y^2$$

На основании (3.3) имеем

$$2V = (bx - ay)^2$$

и, следовательно, функция V определенно-положительная. Составляя ее производную в силу уравнений (3.1), получим

$$\frac{dV}{dt} = ac(a + c)y^2 - b(a + c)yf(y)$$

Полагая $f(y) = hy$, где $h = h(y)$ удовлетворяет условию (3.2), получим

$$\frac{dV}{dt} = (a + c)(ac - bh)y^2 < 0$$

Отсюда, так же как и в предыдущем параграфе, заключаем, что если в уравнениях (3.1) функция $f(y)$ удовлетворяет условию (3.3), то равновесие будет асимптотически устойчиво при любом начальном возмущении. К такому же результату для уравнений (3.1) пришел и Н. П. Еругин.

Итак, для системы (3.1) ответ на вопрос М. А. Айзермана тоже получается всегда утвердительный.

§ 4. Во всех наших рассуждениях не исключалась возможность, что кривая $z = f(x)$ касается при $x = 0$ одной из прямых $z = \alpha x$ и $z = \beta x$. В этом случае характеристическое уравнение будет иметь корни с вещественной частью, равной нулю. Следовательно, линеаризированная система будет находиться на границе области устойчивости. Так как при этом нелинейная система будет по доказанному устойчива, то по Н. Н. Баутину эта граница всегда является «безопасной».

В заключение заметим, что предположение о дифференцируемости функции $f(x)$ не делалось и, следовательно, кривая $z = f(x)$ может не иметь в начале координат определенной касательной.

Поступила 8 II 1952

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем. Успехи математических наук. 1949. Т. IV. Вып. 4.
2. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.
3. Еругин Н. П. Качественное исследование интегральных кривых дифференциальных уравнений. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 6.