Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ КВАДРАТИЧНОГО КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

А. М. Кац

(Ленинград)

Пусть $f(t)$ есть решение некоторого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, стремящееся к нулю при $t \to \infty$. Если $f(t)$ представляет переходный процесс в какой-либо системе регулирования, то квадратичным критерием качества называют значение интеграла

$$J = \int_0^\infty [f(t)]^2 \, dt \tag{1}$$

Если $F(p)$ есть операционное изображение $f(t)$, то, как известно,

$$\int_0^\infty [f(t)]^2 \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \left| \frac{F(p)}{p} \right|^2 dp = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{F(p) F(-p)}{p^2} \, dp \tag{2}$$

Функция $F(p)$ может быть представлена в виде

$$F(p) = \frac{pP(p)}{Q(p)} \tag{3}$$

где $P(p)$ и $Q(p)$ — полиномы, причем

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n \tag{4}$$

а $P(p)$ имеет степень не выше $n-1$.

Обозначим

$$P(p) P(-p) = g_0 p^{2n-2} + g_1 p^{2n-4} + \cdots + g_{n-2} p^2 + g_{n-1} \tag{5}$$

Тогда

$$J = \sum_{r=0}^{n-1} g_r A_{2(n-r-1)} \tag{6}$$

где

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{p^{2k}}{Q(p) Q(-p)} \, dp \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1) \tag{7}$$

Так как при $p \to \infty$ подинтегральная функция стремится к нулю как $p^{-2(n-k)}$, то можно, не изменяя величины интеграла, замкнуть контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в левой полуплоскости. Полученный замкнутый контур назовем Г.

Корни $Q(p)$, которые мы обозначим через p_s $(s=1, \ldots, n)$, все лежат в левой полуплоскости. Полюсами подинтегральной функции, лежащими в левой полуплоскости, т. е. внутри Г, будут точки $p = p_s$, и интересующий нас интеграл равен сумме вычетов относительно этих полюсов:

$$A_{2k} = \sum_{s=1}^{n} \frac{p_s^{2k}}{Q'(p_s)\,Q(-p_s)} \tag{8}$$

Таким образом, A_{2k} есть симметрическая функция от всех корней p_s. Этот результат был получен различными способами в работах [1-3].

Покажем простой путь вычисления A_{2k}. Заметим, что

$$A_{2k+1} = \sum_{s=1}^{n} \frac{p_s^{2k+1}}{Q'(p_s)\,Q(-p_s)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{p^{2k+1}}{Q(p)\,Q(-p)}\,dp = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant k \leqslant n-2) \\ (-1)^n / 2a_0^2 & (k = n-1) \end{cases} \tag{9}$$

так как интеграл по мнимой оси вследствие нечетности подинтегральной функции при всех k равен нулю, а интеграл по полуокружности бесконечно большого радиуса равен нулю при $k \leqslant n-2$ и $(-1)^n \pi i / a_0^2$ при $k = n-1$.

Вместе с тем, так как $Q(p_s) = 0$, то

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{p_s^{\,l}\,Q(p_s)}{Q'(p_s)\,Q(-p_s)} = \sum_{m=0}^{n} a_m \sum_{s=1}^{n} \frac{p_s^{\,n-m+l}}{Q'(p_s)\,Q(-p_s)} = 0 \tag{10}$$

Полагая в этом равенстве последовательно $l = n-1,\ n-2, \ldots, 1, 0$ и пользуясь формулами (8) и (9), получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 A_{2(n-1)} + a_3 A_{2(n-2)} + a_5 A_{2(n-3)} + \cdots &= \frac{(-1)^{n-1}}{2a_0} \\ a_0 A_{2(n-1)} + a_2 A_{2(n-2)} + a_4 A_{2(n-3)} + \cdots &= 0 \\ a_1 A_{2(n-2)} + a_3 A_{2(n-3)} + \cdots &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots + a_{n-2} A_2 + a_n A_0 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Решение этой системы выражается формулами вида

$$A_{2k} = \frac{(-1)^{n-1}}{2a_0}\,\frac{D_{1,\,n-k}}{D} \tag{12}$$

где D — определитель системы (11), а $D_{1,\,n-k}$ — алгебраическое дополнение элемента первой строки $(n-k)$-го столбца этого определителя.

Подставляя выражение (12) в формулу (6), получаем окончательно

$$J = \frac{(-1)^{n-1}}{2a_0}\,\frac{G}{D} \tag{13}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$G = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \tag{15}$$

Определитель D тождественен с последним определителем Гурвица, составленным для полинома $Q(p)$. Определитель G получается из D путем замены элементов первой строки величинами $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$.

Если определители G и D — высокого порядка, то удобнее не раскрывать их в общем виде, а сперва подставлять в них числовые значения коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$ и $g_0, \ldots, g_{n-1}$. Затем определитель D легко вычисляется по способу, указанному в работе [4]. С небольшим изменением этот способ оказывается пригодным и для вычисления определителя G.

Вычтем из элементов второй строки соответствующие элементы первой строки, умноженные на a_0 / g_0, а из элементов остальных четных строк — соответствующие элементы предыдущих нечетных строк, умноженные на a_0 / a_1. Обозначая

$$\begin{aligned} g_1' &= a_2 - \frac{a_0}{g_0} a_1, \qquad g_2' = a_4 - \frac{a_0}{g_0} g_2, \ldots \\ a_2' &= a_2 - \frac{a_0}{a_1} a_3, \qquad a_4' = a_4 - \frac{a_0}{a_1} a_5, \ldots \end{aligned} \tag{16}$$

будем иметь

$$G = g_0 \begin{vmatrix} g_1' & g_2' & g_3' & \ldots & g_{n-1}' \\ a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2' & a_4' & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} \tag{17}$$

Полученный определитель $(n-1)$-го порядка имеет такую же структуру, как исходный определитель n-го порядка, поэтому его можно вновь преобразовать подобным же образом. Повторив эту операцию всего $n-1$ раз, получим числовое значение G. Вычисления нетрудно уложить в табличную форму.

Поступила 18 X 1951

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. А. Колебания. Т. I. ГТТИ. 1949.
2. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. ГТТИ. 1950.
3. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р. и др. Теория следящих систем. Издательство иностранной литературы. 1951.
4. Кац А. М. и Чекмарев А. И. О вычислении определителей Гурвица. Инженерный сборник. 1952. Т. XII.