Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

ТЕОРЕМЫ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Н. П. Еругин

(Ленинград)

В заметке излагаются некоторые новые формулировки теорем о неустойчивости движения, построенные А. М. Ляпуновым [1] и Н. Г. Четаевым [2] при помощи функций V с незнакоопределенной производной dV / dt. Эти формулировки могут оказаться более удобными в некоторых случаях, как нам кажется.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $f_k(x_1, \ldots, x_n, t)$ — непрерывные функции при $t \geqslant T$:

$$|x_k| < A \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad f_k(0, \ldots, 0, t) = 0 \tag{2}$$

Условимся обозначать совокупность $(x_1, \ldots, x_n)$ через x. Функцию $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ будем писать далее в виде $\varphi(t, x)$. Запись $x \leqslant H$ будет означать, что ни одно из чисел $|x_1|, \ldots, |x_n|$ не превосходит некоторого числа H и если хоть одно из них более H, то будем записывать $H < x$. В дальнейшем будем считать $H < A$.

Очевидное решение $x = 0$ называем по Ляпунову невозмущенным движением. Под $V'(t, x_1, \ldots, x_n)$ будем понимать

$$V' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k(x_1, \ldots, x_n, t) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Теорема 1. Пусть найдена функция $V(t, x)$, удовлетворяющая следующим условиям.

При как угодно малом $\varepsilon > 0$ в области $x \leqslant \varepsilon$ существует точка x° такая, что для движения, проходящего через эту точку в момент $t = T$, имеем

$$(a) \qquad V(T, x^\circ) > 0$$

$$(б) \qquad \int_T^{T_1} V' dt \geqslant a(x^\circ) > 0 \qquad \text{при } T_1 > T$$

$$(в) \qquad |V| \leqslant L(H, x^\circ) \qquad \text{при } t = T_1 \text{ и при } x \leqslant H$$

$$(г) \qquad L(H, x^\circ) \leqslant a(x^\circ)$$

Тогда невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво [1].

Доказательство. Если для указанных выше движений, выходящих из точек x°, найдется такое $\tau \leqslant T_1$, что $x(\tau) \geqslant H$, то неустойчивость движения $x = 0$ доказана.

Предположим теперь, что при $T \leqslant t \leqslant T_1$ для этих движений $x < H$.

---

[1] Заметим, что T_1 в неравенствах (б) и (в) может зависеть от x°.

Предположим, что теорема не верна, т. е. предположим, что движение $x = 0$ устойчивое.

Тогда всякое движение, проходящее через точку $x = x^\circ$ в момент $t = T$, где $x^\circ < \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малое, определено при всех[4] $t > T$ и обладает свойством $x \leqslant H$ при $t \geqslant T$.

По предположению среди этих движений имеется и такое, для которого выполнены неравенства (*а*) — (*г*). Но это невозможно, так как из

$$V - V_0 = \int\limits_T^{T_1} V'\,dt \geqslant a\,(x^\circ) > 0$$

имеем $V > V_0 + a\,(x^\circ) > 0$, а это противоречит неравенствам (*а*), (*в*) и (*г*).

Следовательно, невозможно чтобы было $x\,(t) \leqslant H$ при $t \geqslant T$, т. е. найдется такое $t_1 > T$, что $x\,(t_1) > H$, и мы имеем, следовательно, неустойчивость. Все теоремы о неустойчивости Ляпунова и других авторов, выведенные по второй методе Ляпунова, являются частным случаем этой теоремы.

Замечание. Если формулировать свойство устойчивости полнее, то надо сказать: невозмущенное движение $x = 0$ называется устойчивым, если по всякому $\delta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что все движения, проходящие в момент $t = T$ через любую точку $x^\circ \leqslant \varepsilon$, будут определены при всех $t \geqslant T$ и при всех этих значениях t имеем $x\,(t) \leqslant \delta$. Таким образом, в случае устойчивости невозмущенного движения $x = 0$ возмущенные движения, начинающиеся вблизи точки $x = 0$, обладают двумя свойствами — они определены при всех $t \geqslant T$ и удовлетворяют неравенству $x\,(t) < \delta$. Ляпунов в своем определении не подчеркнул первого свойства возмущенных движений, начинающихся вблизи точки $x = 0$, но, конечно, имел это в виду. Нигде при доказательствах теорем устойчивости и неустойчивости он это также не отмечал. Правда, переходя ко второй методе, Ляпунов в нескольких словах остановился на этом. Так как у Ляпунова правые части дифференциальных уравнений обеспечивают не только существование, но и единственность решений в некоторой окрестности начала координат, то отсюда следует возможность продолжения движения на все значения $t \geqslant T$, если известно, что движение остается в некоторой окрестности начала координат (внутренней относительно той области A, где правые части системы определены, непрерывны и разлагаются в ряд по положительным степеням неизвестных переменных).

В самом деле, пусть имеем движение, начавшееся в точке x° в момент $t = T$, определенное в промежутке $T \leqslant t \leqslant T + \delta$, где δ известным образом определяется из теоремы существования. При $t = T + \delta$ мы имеем определенные значения x. Если x принадлежит D, где область D вместе с границами погружена в область A, то решение можно продолжить на промежуток $T + \delta \leqslant t \leqslant T + 2\delta$.

Именно в силу единственности и то движение, которое рассматривается, продолжимо на этот промежуток. Это позволяет распространить движение на все значения $t \geqslant T$, если известно, что оно остается в области D.

Но если правые части уравнений движений лишь непрерывны в области A, то такое рассуждение не является достаточным для оправдания возможности продолжения движения на все $t \geqslant T$, если известно, что движение остается в области D погруженной вместе с границами в A.

В самом деле, если известно, что движение в момент $t = T$ проходит через точку x°, принадлежащую D, то отсюда в случае, когда правые части дифференциальных уравнений предполагаются лишь непрерывными, нельзя утверждать, что оно определено в промежутке $T \leqslant t \leqslant T + \delta$, где δ определяется известным образом теоремой существования. Действительно, теорема существования утверждает лишь существование хотя бы одного решения, которое будет непрерывным и определенным в промежутке $T \leqslant t \leqslant T + \delta$, но эта теорема не утверждает, что и всякое решение, проходящее через точку x° в момент $t = T$, будет определенным и непрерывным в этом же промежутке.

Может быть, среди функций, доставляющих решение, имеется, например, функция

$$x = c \sin \frac{1}{1-t}$$

которая при $t = 0$ обращается в $x = c \sin 1$, а при $t \to 1$ не имеет предела и, следовательно, не определена в точке $t = 1$; эта функция есть общее решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = (1-t)^2 \operatorname{ctg} (1-t)^{-1} x$$

и, следовательно, возмущенные движения обладают свойством $x(t) < \delta$, но не определены[1] при $t = 1$.

Но для оправдания возможности продолжения движений (остающихся в области D) на все значения $t \geqslant T$ при тех предположениях, которые сделаны относительно системы (1), можно воспользоваться, например, указанной нами теоремой [4].

Вообще движение $x = x(t)$ можно называть непрерывно продолжимым на значения $t > \tau$, если оно определено и непрерывно при $t < \tau$ и при $t \to \tau$ имеем $x(t) \to x^\circ$, где x° — конечная точка и в окрестности точки (τ, x°) правые части системы дифференциальных уравнений непрерывны.

Таким образом, вторую методу Ляпунова можно применять и к системе, не удовлетворяющей условиям единственности.

Теорема 2. Пусть найдена функция $V(t, x)$, удовлетворяющая следующим условиям.

При как угодно малом $\varepsilon > 0$ в области $x \leqslant \varepsilon$ существует точка x° такая, что для движения, проходящего через эту точку в момент $t = T$, имеем

$$(a) \qquad \int_T^{T_1} V' \, dt \geqslant a(x^\circ) > a > 0 \qquad \text{при} \quad T_1 > T$$

где постоянная a не зависит от x°.

(б) $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел.

Тогда невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво.

Действительно, условие (в) предыдущей теоремы теперь выполнено при как угодно малом $L(H, x^\circ)$, если H возьмем достаточно малым (в силу условия (σ) рассматриваемой теоремы). Следовательно, условие (г) теоремы 1 будет выполнено и притом без знака равенства. Неравенства $L > V > V_0 + a > 0$ будем также иметь, так как $V_0 \to 0$ при $x^\circ \to 0$. Эти неравенства будут снова противоречивыми, откуда и следует теорема.

Теорема 3. Пусть найдена функция $V(t, x)$, удовлетворяющая следующим условиям.

При как угодно малом $\varepsilon > 0$ в области $x \leqslant \varepsilon$ существует точка x° такая, что для движения, проходящего через эту точку в момент $t = T$, имеем

$$(a) \qquad \int_T^{t_k} V' \, dt \to \infty \qquad \text{при } t_1, t_2, \ldots \to \infty$$

$$(б) \qquad |V| \leqslant L \qquad \text{при } x < H \text{ и } t \geqslant T$$

Тогда невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво. Доказательство очевидно.

Лемма. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

[1] Это и показывает независимость свойств $x(t)$ быть продолжимым на промежуток $t > 0$ и удовлетворять неравенствам $x(t) \leqslant \delta$.

где $f_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывные функции в области $[V(t)]$, определяемой непрерывной функцией $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ неравенством

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$$

с границей $V(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Предположим [1]

$$V' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k + \frac{\partial V}{\partial t} > 0$$

в окрестности граничных точек области $[V(t)]$.

Тогда непрерывное движение $x(t)$, начавшись в области $[V(t)]$ в момент $t = T$, не выходит из области $[V(t)]$ при всех $t > T$, пока оно существует.

Доказательство. Предположим, что движение $x(t)$, начавшись в области $[V(t)]$, падает в конечную точку границы области $[V(T_1)]$.

Тогда для t имеется промежуток значений $T_1 - \delta \leqslant t < T_1$ $(\delta > 0)$, при которых было $V' > 0$ и $V(T_1 - \delta, x(T_1 - \delta)) > 0$.

Из неравенства

$$V(T_1, x(T_1)) - V(T_1 - \delta, x(T_1 - \delta)) = \int_{T_1-\delta}^{T_1} V'\,dt > 0$$

имеем

$$V(T_1, x(T_1)) > V(T_1 - \delta, x(T_1 - \delta)) > 0$$

Отсюда следует, что движение $x(t)$, начавшись в области $[V(t)]$, не может выйти на границу этой области. Лемма доказана.

Теорема 3. Если области $[V(t)]$ в пространстве $[x]$ равномерно ограничены при $t \to \infty$ или известно, что непрерывное движение $x(t)$ системы (3) ограничено, то движение $x(t)$, начавшись в момент $t = T$ в области $V(T)$, непрерывно продолжимо для всех $t > T$, если в окрестности граничных точек области $[V(t)]$ имеем $V' > 0$.

Доказательство. Так как правые части системы (3) — непрерывные функции в области $[V(t)]$ и движение $x(t)$, начавшись в области $[V(t)]$, не может выйти на границу этой области, то при $t \to t_0$ (конечное) движение $x(t)$ либо стремится к точке x, принадлежащей области $[V(t_0)]$, либо $x(t) \to \infty$ (см. [4]). Но так как по сделанному предположению $x(t)$ не может стремиться к бесконечности, то $x(t) \to x$, принадлежащему области $[V(t_0)]$, при $t \to t_0$.

Отсюда следует, что движение $x(t)$ непрерывно продолжимо для всех $t > T$.

Отсюда непосредственно получается следующая теорема.

Теорема 4. Если область $[V(t)]$ стягивается при $t \to \infty$ к точке a и в окрестности граничных точек этой области $V' > 0$, то непрерывное движение $x(t)$ системы (3), начавшись в области $[V(t)]$ в момент $t = T$, непрерывно продолжимо для всех $t > T$ и при этом обязательно $x(t) \to a$ при $t \to \infty$.

Пример 1. Дана система

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi(x, y, t)}{t^{-1} - x^2 - y^2}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\psi(x, y, t)}{t^{-1} - x^2 - y^2} \tag{4}$$

где φ и ψ — функции, непрерывные при всех значениях x, y и $t > 0$, и удовлетворяют условию

$$2t^3(x\varphi + y\psi) < t(x^2 + y^2) - 1 \qquad \text{при} \qquad x^2 + y^2 < \frac{1}{t} \tag{5}$$

Пусть

$$V = \frac{1}{t} - x^2 - y^2$$

[1] На границе же области $[V(t)]$ производная V' может обращаться и в нуль.

Тогда имеем

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1 - t(x^2+y^2) + 2t^3(x\varphi + y\psi)}{t^2[1-(x^2+y^2)t]}$$

В силу (5) в области $[V(t)]$ имеем $V' > 0$.

Согласно теореме 4 движение $x(t)$, начавшись в момент $t = T$ в области $x^2 + y^2 < T^{-1}$, будет обладать свойством: $x(t)$ непрерывно продолжимо для всех $t > T$ и $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 5. Пусть найдена функция $V(t, x)$, удовлетворяющая следующим условиям.

(*а*) Неравенство $V(t, x) > 0$ при всяком $t \geqslant T$ определяет в пространстве $[x]$ область $[V(t)]$, на границу которой $V(t, x) = 0$ попадает и точка покоя $x = 0$.

(*б*) Производная $V' > 0$ в окрестности точек границы[1] области $[V(t)]$.

При каком угодно малом $\varepsilon > 0$ для x из области $[V(t)]$ и $x \leqslant \varepsilon$ найдется такая точка x°, что для движений, проходящих через эту точку, имеем

(*в*) $\int\limits_T^{T_1} V'dt \geqslant a(x^\circ) > 0$ при $T_1 > T$

(*г*) $|V| \leqslant L(x^\circ, H)$ при $t = T_1$, $x \leqslant H$ и x в области $[V(T_1)]$

(*д*) $a(x^\circ) \geqslant L(x^\circ, H)$

Тогда невозмущенное движение неустойчиво.

Здесь условие (*б*) обеспечивает выполнение условия (*г*) теоремы, что x находится в области $[V(T_1)]$. В остальном теорема и ее доказательство совпадают с теоремой 1.

Теорема 6. Пусть найдена функция $V(t, x)$, удовлетворяющая следующим условиям.

(*а*) Неравенство $V(t, x) > 0$ при всяком $t \geqslant T$ определяет в пространстве $[x]$ область $[V(t)]$, на границу которой $V(t, x) = 0$ попадает и точка покоя $x = 0$.

(*б*) Функция $W(t, x)$ определяет при всяком $t \geqslant T$ область $W(t, x) > 0$ с границей $W(t, x) = 0$, содержащей точку покоя $x = 0$. Область $[W(t)]$ содержится в области $[V(t)]$.

При как угодно малом $\varepsilon > 0$ для x из области $[W(t)]$, $x \leqslant \varepsilon$, найдется такая точка x°, что для движений, проходящих через эту точку, имеем

(*в*) $\int\limits_T^{T_1} V'\,dt \geqslant a(x^\circ) > 0$ при $T_1 > T$

(*г*) $|V| \leqslant L(x^\circ, H)$ при $t = T_1$, $x \leqslant H$ и x в $[W(t)]$

(*д*) $a(x^\circ) \geqslant L(x^\circ, H)$

(*е*) Движения, проходящие через указанные выше точки x°, не выходят из области $[W(t)]$.

Тогда невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство теоремы такое же, как и доказательство предыдущей теоремы.

---

[1] Условие (*б*) можно заменить другим, которое обеспечивает невозможность выхода точек движений, проходящих через указанные ниже точки x°, из области $[V(t)]$ через границу области. Например, если

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \alpha(t)V, \qquad \int\limits_T^t \alpha(t)\,dt < \infty$$

или выполнены условия К. П. Персидского [3].

Пример 2. Дана система

$$\frac{dx}{dt} = 2x\alpha(t) + \varphi(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = y\alpha(t) - \psi(x, y, t) \tag{6}$$

где

$$\alpha(t) \geqslant 0, \qquad \int_T^t \alpha(t)\,dt \to \infty \quad \text{при } t \to \infty \tag{7}$$

и непрерывные функции φ и ψ удовлетворяют условию

$$\varphi(x, y, t) + 2y\psi(x, y, t) \geqslant 0, \qquad \varphi(0, 0, t) = \psi(0, 0, t) = 0 \tag{8}$$

Берем $V = x - y^2$. Область $[V(t)]$ есть внутренность параболы $x = y^2$. В этой области $V > 0$;

$$\frac{dV}{dt} = 2(x - y^2)\alpha(t) + \varphi + 2y\psi$$

Если x и y взяты из области $[V(t)]$, то в силу (8) имеем

$$\frac{dV}{dt} \geqslant 2V\alpha(t) \geqslant 0$$

Пусть начальная точка (x_0, y_0) взята внутри параболы $x = y^2$, $V_0 = x_0 - y_0^2$. Тогда

$$\frac{dV}{dt} \geqslant 2V_0\alpha(t) \geqslant 0 \qquad \text{при } t > T$$

$$\int_T^{T_1} \frac{dV}{dt}\,dt \geqslant 2V_0 \int_T^{T_1} \alpha(t)\,dt \to \infty \qquad \text{при } T_1 \to \infty$$

Так как $|V|$ ограничено при $|x| \leqslant H$ и $|y| \leqslant H$, то по теореме 3 невозмущенное движение неустойчиво.

Пример 3. Дана система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [2\sqrt{x \mp y^2} + 2y^2]\cos t + \varphi(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} &= \pm y\cos t + \psi(x, y, t) \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\varphi + 2y\psi \geqslant 0, \qquad \varphi(0, 0, t) = \psi(0, 0, t) = 0 \tag{10}$$

Берем $V = x \mp y^2$. Имеем

$$\frac{dV}{dt} = 2\sqrt{V}\cos t + \varphi + 2y\psi \geqslant 2\sqrt{V}\cos t$$

Отсюда, беря $V_0 > 0$, получим

$$\sqrt{V} - \sqrt{V_0} \geqslant \int_0^t \cos t\,dt = \sin t, \qquad V \geqslant V_0 + \sin^2 t + 2\sqrt{V_0}\sin t$$

Отсюда при $t = {}^1/_2\,\pi$ имеем

$$V - V_0 = \int_0^{{}^1/_2\pi} V'\,dt \geqslant 1$$

Так как функция $V = x \mp y^2$ имеет бесконечно малый высший предел, то по теореме 2 невозмущенное движение неустойчиво.

Когда в системе взято $\sqrt{x - y^2}$, то, очевидно, система рассматривается вообще в области, ограниченной параболой $x = y^2$.

Пример 4. Дана система

$$\frac{dx}{dt} = x\alpha(t) + \varphi(x, y, t), \qquad \frac{dy}{dt} = y\alpha(t) + \psi(x, y, t)$$

где

$$\varphi(0, 0, t) = \psi(0, 0, t) = 0, \quad x\varphi + y\psi \geqslant 0, \quad \int_0^t \alpha(t)\, dt \to \infty \quad \text{при } t \to \infty$$

Например, пусть $\alpha(t) = 1 + 2\sin t$. Возьмем

$$V = x^2 + y^2, \qquad \frac{dV}{dt} = 2\alpha(t)V + 2x\varphi + 2y\psi$$

Следовательно,

$$\frac{dV}{dt} \geqslant 2\alpha(t)V$$

и, так как $V > 0$, то

$$V \geqslant V_0 \exp \int_0^t 2\alpha(t)\, dt, \qquad V_0 = V(0)$$

Отсюда получаем

$$V - V_0 = V_0 \left\{ \exp\left(\int_0^t 2\alpha(t)\, dt \right) - 1 \right\} \to \infty \qquad \text{при } t \to \infty$$

И по теореме 2 и по теореме 3 видим, что невозмущенное движение неустойчиво.

В этом примере, как и в предыдущем, производная dV/dt может быть и знакопеременной.

Замечание. В этом примере можно взять и $\alpha(t) = e^t(\cos t + \sin t)$, тогда

$$\int_0^{(4k+1)\pi/2} \alpha(t)\, dt = e^{(4k+1)\pi/2} \to \infty \quad \text{при } k \to \infty, \text{ или } \alpha = \beta t^{\beta-1} \sin t^\gamma + t^{\beta+\gamma-1} \cos t^\gamma$$

$$\int \alpha\, dt = t^\beta \sin t^\gamma \qquad \text{при } 0 < \beta < \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \gamma < \tfrac{1}{2}$$

Поступила 13 II 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946.
3. Персидский К. П. Ко второй методе Ляпунова. Известия АН Казахской ССР. 1947. № 42.
4. Еругин Н. П. О продолжении решений дифференциальных уравнений. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 1.