

ПРИБЛИЖЕННОЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ
 МАСС ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

К. К. Федяевский

(Москва)

Как известно, присоединенные массы прямоугольных пластин конечного размаха определяются экспериментально, главным образом методом колебаний. На основании большого количества опытных данных была предложена эмпирическая зависимость между объемом присоединенной массы K_2 прямоугольной пластины конечного размаха, объемом присоединенной массы той же пластины, вычисленным без учета конечности размаха, и удлинением пластины [1]

$$\mu = \frac{K_2}{1/4 \pi b^2 l} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left(1 - 0.425 \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) \quad (1)$$

где $\lambda = l/b$ — удлинение пластины, b — хорда пластины, l — размах пластины.

Настоящая заметка посвящена приближенному теоретическому определению зависимости коэффициента μ от удлинения пластины.

Как известно, распределение скорости на поверхности пластины бесконечного размаха, обтекаемой без циркуляции:

$$v_x = V \left(\cos \alpha \pm \sin \alpha \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} \right) \quad (2)$$

Здесь знак минус соответствует скорости сверху, а знак плюс скорости снизу пластины.

Очевидно, что распределение вихревой интенсивности (фиг. 1) для бесциркуляционного обтекания пластины можно представить в виде

$$\gamma_n(x) = -2V \sin \alpha \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} \quad (3)$$

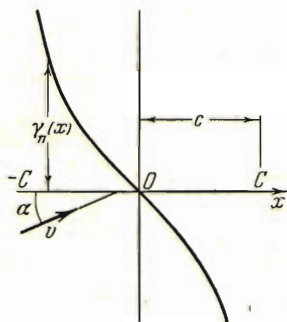
Определим положение сосредоточенных вихрей с циркуляцией:

$$\Gamma = \int_0^c \gamma_n(x) dx = -2V \sin \alpha \int_0^c \frac{x dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = -2V \sin \alpha c \quad (4)$$

дающих момент относительно начала координат, равный

$$\int_0^c \gamma_n(x) x dx = -2V \sin \alpha \int_0^c \frac{x^2 dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = -\frac{\pi}{2} V \sin \alpha c^2 \quad (5)$$

Дели (5) на (4), получаем, что сосредоточенные вихри должны лежать на расстояниях $\pm 1/4 \pi c$ от начала координат.



Фиг. 1

Теперь определим точки, в которых скорости, индуцированные сосредоточенными вихрями, будут равны скоростям, индуцированным распределением (3). Принимая начало координат в месте расположения переднего сосредоточенного вихря, (фиг. 2) можно написать

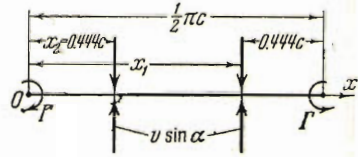
$$\frac{\Gamma}{2\pi x} + \frac{\Gamma}{2\pi(\frac{1}{2}\pi c - x)} = V \sin \alpha \quad (6)$$

Подставляя сюда $\Gamma = 2V \sin \alpha c$, получим квадратное уравнение, решения которого дает

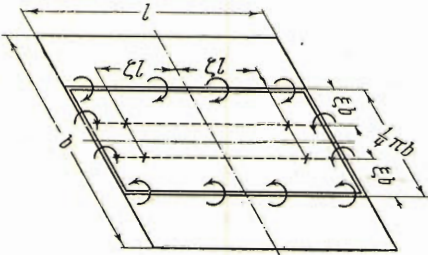
$$x = \frac{1}{4} \pi c \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} \pi c\right)^2 - \frac{1}{2} c^2}$$

При этом для ближайшей к переднему вихрю точке $x_2 = 0.444 c$.

Переходя к пластине конечного размаха, заменим пластину замкнутым сосредоточенным вихрем прямоугольной формы. Две стороны этого прямоугольника расположим вдоль размаха пластины на расстоянии $\frac{1}{4}\pi c = \frac{1}{8}\pi b$ от поперечной оси пластины, а две другие стороны по торцам пластины (фиг. 3). Расчетные линии, на которых будут выбираться точки, где удовлетворяются граничные условия, расположим вдоль размаха на расстояниях $\xi b = 0.222 b$ от переднего и заднего вихрей по направлению внутрь пластины. Таким образом, расположение сосредоточенных вихрей и расчетных линий по хорде остается таким же, как у крыла бесконечного размаха.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для определения циркуляции Γ можно написать уравнение, выражающее соблюдение основного граничного условия в какой-нибудь точке расчетной линии:

$$v_1 + v_2 = V \sin \alpha \quad (7)$$

где v_1 — скорость, индуцированная вихрями, расположенными вдоль размаха пластины, v_2 — скорость, индуцированная вихрями, расположенными вдоль торцов пластины.

При этом, поскольку расположение замкнутого вихря симметрично как относительно продольной, так и относительно поперечной оси пластины, граничное условие будет удовлетворяться сразу в четырех точках пластины.

Обозначив через z координату расчетной точки по размаху и положив $\zeta = z/l$, можно записать выражение для скоростей v_1 и v_2 в следующем виде:

$$\frac{v_1}{V} = \frac{\Gamma}{4\pi V b} \left\{ \frac{1}{\xi} \left[\frac{(\frac{1}{2} + \zeta) \lambda}{\sqrt{\xi^2 + (\frac{1}{2} + \zeta)^2 \lambda^2}} + \frac{(\frac{1}{2} - \zeta) \lambda}{\sqrt{\xi^2 + (\frac{1}{2} - \zeta)^2 \lambda^2}} \right] + \right. \quad (8)$$

$$\left. + \frac{1}{\frac{1}{4}\pi - \xi} \left[\frac{(\frac{1}{2} + \zeta) \lambda}{\sqrt{(\frac{1}{4}\pi - \xi)^2 + (\frac{1}{2} + \zeta)^2 \lambda^2}} + \frac{(\frac{1}{2} - \zeta) \lambda}{\sqrt{(\frac{1}{4}\pi - \xi)^2 + (\frac{1}{2} - \zeta)^2 \lambda^2}} \right] \right\} = \frac{\Gamma}{4\pi V b} A(\lambda, \xi, \zeta)$$

$$\frac{v_2}{V} = \frac{\Gamma}{4\pi V b} \left\{ \frac{1}{(\frac{1}{2} + \zeta) \lambda} \left[\frac{\frac{1}{4}\pi - \xi}{\sqrt{(\frac{1}{4}\pi - \xi)^2 + (\frac{1}{2} + \zeta)^2 \lambda^2}} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (\frac{1}{2} + \zeta)^2 \lambda^2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\frac{1}{2} - \zeta) \lambda} \left[\frac{\frac{1}{4}\pi - \xi}{\sqrt{(\frac{1}{4}\pi - \xi)^2 + (\frac{1}{2} - \zeta)^2 \lambda^2}} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (\frac{1}{2} - \zeta)^2 \lambda^2}} \right] \right\} = \frac{\Gamma}{4\pi V b} B(\lambda, \xi, \zeta) \quad (9)$$

Подставляя в (7) значения величин v_1/V и v_2/V согласно выражениям (8) и (9), будем иметь

$$\Gamma = \frac{4\pi V b \sin \alpha}{A(\lambda, \xi, \zeta) + B(\lambda, \xi, \zeta)} \quad (10)$$

Продольный момент, действующий на пластину при наличии угла атаки, можно записать через циркуляцию Γ следующим образом:

$$M_z = \rho \Gamma V \cos \alpha l \frac{1}{4} \pi b = \frac{4\pi^{1/4} \pi b^2 l^{1/2} \rho V^2 \sin 2\alpha}{A(\lambda, \xi, \zeta) + B(\lambda, \xi, \zeta)} \quad (11)$$

С другой стороны, этот же момент можно записать в общем виде как

$$M_z = K_2 \frac{1}{2} \rho V^2 \sin 2\alpha \quad (12)$$

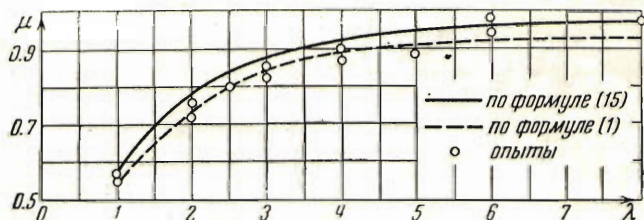
Приравнивая (11) и (12), получим окончательное выражение для коэффициента:

$$\mu = \frac{K_2}{1/4 \pi b^2 l} = \frac{4\pi}{A(\lambda, \xi, \zeta) + B(\lambda, \xi, \zeta)} \quad (13)$$

Приводим результаты вычислений значений μ по формуле (13) при $\xi = 0.222$ и $\zeta = 0.3535$ ($z = 0.707 l/2$):

$\lambda = 1$	2	3	4	6	8
$\mu = 0.57$	0.786	0.88	0.925	0.961	0.976

По этим данным зависимость $\mu = \mu(\lambda)$ на фиг. 4 показана сплошной линией, пунктирной линией дана кривая по эмпирической формуле (1), точками — экспери-



Фиг. 4

менты из работы И. С. Римана и Р. Л. Крепс [1], совпадение получается достаточно удовлетворительное.

Таким образом, можно предполагать, что при расположении расчетных точек на расстоянии $0.707 l/2$ от продольной оси или в угловых координатах при $\varphi = 1/4 \pi$ и $\varphi = 3/4 \pi$ один замкнутый сосредоточенный вихрь, показанный на фиг. 3, дает потенциальное обтекание пластины конечного размаха с точностью, достаточной для определения суммарных характеристик.

Как известно [2], потенциал замкнутой вихревой нити, расположенной в плоскости пластины, совпадает с потенциалом двойного слоя постоянной интенсивности, расположенного в той же плоскости внутри вихревой нити.

По полученным значениям коэффициента μ можно подсчитать присоединенный момент инерции относительно оси x , пользуясь гипотезой плоских сечений

$$\lambda_{xx} = \int_{-1/2}^{1/2} \mu \frac{\pi b^2}{4} z^2 dz = \mu \frac{\pi}{48} b^2 l^3$$

Результаты подсчетов дают удовлетворительные совпадения с экспериментом при достаточно больших удлинениях.

Поступила 23 V 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Рима н И. С. и Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы. Труды ЦАГИ. 1947. № 635.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. ГИТТЛ. 1950.