

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
 О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН, БЛИЗКИХ К ПРЯМОУГОЛЬНЫМ

П. В. Цыдзик

(Москва)

Метод малого параметра, изложенный выше в заметке П. М. Риза (стр. 345), применительно к решению волнового уравнения для области, близкой к данной, нетрудно распространить на случай уравнения с бигармоническим оператором для областей, имеющих форму параллелограмма и трапеции, при различных граничных условиях. Для этого необходимо лишь знать точное или приближенное решение той же задачи для прямоугольной области.

Рассмотрим в качестве примера собственные колебания однородной пластины постоянной толщины, имеющей форму параллелограмма и опертой по всему контуру. Расположение координатных осей  $x, y$  и соответствующие обозначения для пластины показаны на фиг. 1.

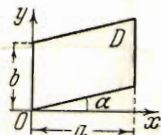
Дифференциальное уравнение колебаний пластины имеет вид:

$$\Delta \Delta u(x, y) - \lambda u(x, y) = 0 \quad (1)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Введем новые переменные

$$\xi = x, \quad \eta = y - \varepsilon x \quad (\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha) \quad (2)$$



Фиг. 1

в которых заданная область  $D$  принимает форму прямоугольника  $D'$  (фиг. 2).

Уравнение (1) в новых переменных принимает вид:

$$\Delta \Delta u(\xi, \eta) - \lambda u(\xi, \eta) = \varepsilon L_1 - \varepsilon^2 L_2 + \varepsilon^3 L_3 - \varepsilon^4 L_4 \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= 4 \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 4 \frac{\partial^4 u}{\partial \xi \partial \eta^3}, & L_3 &= 4 \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \\ L_2 &= 6 \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4}, & L_4 &= \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} \end{aligned} \quad (4)$$

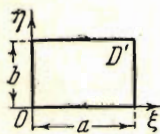
Решение уравнения (3) ищем в виде

$$u_{mn} = u_{mn}^{(0)} + \varepsilon u_{mn}^{(1)} + \varepsilon^2 u_{mn}^{(2)} + \dots, \quad \lambda_{mn} = \lambda_{mn}^{(0)} + \varepsilon \lambda_{mn}^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_{mn}^{(2)} + \dots$$

Подставляя это в (3), после преобразований получим бесконечную систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u_{mn}^{(0)} - \lambda_{mn}^{(0)} u_{mn}^{(0)} &= 0 \\ \Delta \Delta u_{mn}^{(1)} - \lambda_{mn}^{(0)} u_{mn}^{(1)} &= L_1(u_{mn}^{(0)}) + \lambda_{mn}^{(1)} u_{mn}^{(0)} \\ \Delta \Delta u_{mn}^{(2)} - \lambda_{mn}^{(0)} u_{mn}^{(2)} &= L_1(u_{mn}^{(1)}) - L_2(u_{mn}^{(0)}) + \lambda_{mn}^{(1)} u_{mn}^{(1)} + \lambda_{mn}^{(2)} u_{mn}^{(0)} \end{aligned} \quad (6)$$

Первое уравнение этой системы представляет собой уравнение колебаний для прямоугольной пластины, решение которого для случая опертой границы, нормиро-



Фиг. 2

Таблица 1

1-й тон	2-й тон	3-й тон	4-й тон
$\lambda_{11} = 395/a^4$ $\Phi_{11} = 3.17$ $A_{11} = 1$ $A_{22} = -0.00963$ $A_{24} = -0.00058$ $A_{26} = -0.00019$ $A_{42} = -0.00058$ $A_{44} = -0.00009$ $A_{46} = -0.00004$ $A_{62} = -0.00019$ $A_{64} = -0.00004$ $A_{66} = -0.00001$	$\lambda_{12} = 2428/a^4$ $\Phi_{12} = 7.85$ $A_{12} = 1$ $A_{21} = 0$ $A_{23} = -0.09020$ $A_{25} = -0.00126$ $A_{41} = +0.00219$ $A_{43} = -0.00173$ $A_{45} = -0.00025$ $A_{61} = +0.00028$ $A_{63} = -0.00033$ $A_{65} = -0.00007$	$\lambda_{21} = 2428/a^4$ $\Phi_{21} = 7.85$ $A_{21} = 1$ $A_{12} = 0$ $A_{14} = +0.00219$ $A_{16} = +0.00028$ $A_{32} = -0.09020$ $A_{34} = -0.00173$ $A_{36} = -0.00033$ $A_{52} = -0.00126$ $A_{54} = -0.00025$ $A_{56} = -0.00007$	$\lambda_{22} = 6188/a^4$ $\Phi_{22} = 12.5$ $A_{22} = 1$ $A_{11} = +0.02850$ $A_{13} = +0.11540$ $A_{15} = +0.00269$ $A_{31} = +0.11540$ $A_{33} = -0.02880$ $A_{35} = -0.00274$ $A_{51} = +0.00269$ $A_{53} = -0.00274$ $A_{55} = -0.00048$

ванное к единичной норме, как известно, имеет следующий вид:

$$u_{mn}^{(0)} = \frac{2}{Vab} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}$$

$$\lambda_{mn}^{(0)} = \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (7)$$

Решение второго уравнения системы (6) ищем в виде ряда по собственным функциям колеблющейся прямоугольной пластины:

$$u_{mn}^{(1)} = \sum_{p=1}^r \sum_{q=1}^s A_{pq} u_{pq}^{(0)} \quad \left( \begin{matrix} p \neq m \\ q \neq n \end{matrix} \right) \quad (8)$$

Подставив (8) во второе уравнение (6) и умножив его на  $u_{pq}^{(0)} d\xi d\eta$ , после проинтегрирования по области  $D$  получим

$$A_{pq} = \frac{C_{mn}^{(pq)}}{\lambda_{pq}^{(1)} - \lambda_{mn}^{(0)}} \quad (9)$$

Здесь

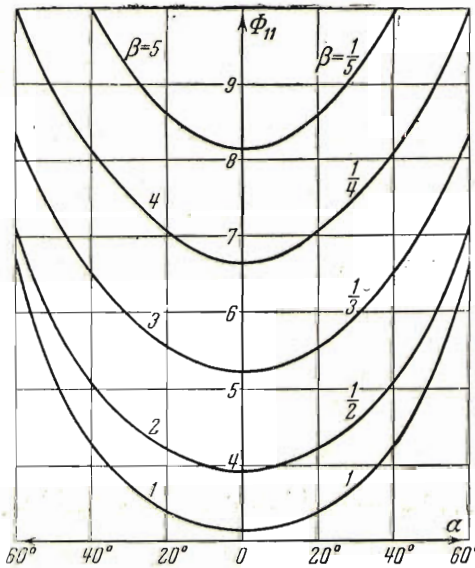
$$C_{mn}^{(pq)} = -\frac{64\pi^4 mnpq (b^2 m^2 + a^2 n^2)}{a^3 b^3 (p^2 - m^2)(q^2 - n^2)}$$

$$\lambda_{pq}^{(1)} = \pi^4 \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)^2 \quad (10)$$

причем в формулах (10) числа  $m + p$  и  $n + q$  нечетные.

Используя условие ортогональности правых частей первых двух уравнений системы (6) к собственной функции  $u_{mn}^{(0)}$ , определим  $\lambda_{mn}^{(1)}$  и  $\lambda_{mn}^{(2)}$ ; в результате получим

$$\lambda_{mn}^{(1)} = 0, \quad \lambda_{mn}^{(2)} = - \sum_{p=1}^r \sum_{q=1}^s A_{pq} C_{pq}^{(mn)} + \frac{6\pi^4 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{2\pi^4 n^4}{b^4} \quad (11)$$



Фиг. 3

где

$$C_{pq}^{(mn)} = - \frac{64\pi^2 pq mn (b^2 p^2 + a^2 q^2)}{a^3 b^3 (m^2 - p^2) (n^2 - q^2)} \quad (12)$$

В формулах (11) и (12) числа  $m + p$  и  $n + q$  нечетные.

Аналогично можно найти решения последующих уравнений системы (6), однако полученное приближение дает удовлетворительные результаты для рассмотренных ниже конкретных примеров.

В табл. 1 приведены значения характеристических чисел  $\lambda$ , частотных и амплитудных коэффициентов и узловые линии для первых четырех тонов колебаний пластины, для которой  $a/b = 1$  и  $\varepsilon = 0.1$ . Амплитудные коэффициенты  $A_{ij}$ , приведенные в таблице, равны  $\varepsilon A_{pq}$ , где  $i, j = p, q$ ; кроме первых единичных коэффициентов.

Для построения узловых линий были найдены корни уравнения

$$u_{mn}^{(0)} + \varepsilon u_{mn}^{(1)} = 0 \quad (13)$$

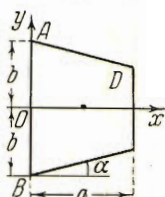
которые затем пересчитаны к старым переменным  $xy$  по формулам (2). При этом для функции  $u_{mn}^{(1)}$  с достаточной точностью брались несколько слагаемых с наибольшими коэффициентами  $A_{pq}$  из решения (8).

На фиг. 3 изображена зависимость  $\Phi_{11} = \Phi_{11}(\alpha, \beta)$  частотных коэффициентов  $\Phi_{11}$  основного тона колебаний от конфигурации пластины при различных значениях  $\beta$  отношения сторон пластины:

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_{11}^{(0)} + \varepsilon^2 \lambda_{11}^{(2)}}, \quad \beta = \frac{b \cos \alpha}{a}$$

Частота колебаний  $f$  в  $\text{сек}^{-1}$  определяется по формуле

$$f = \Phi \sqrt{\frac{D}{MF}} \quad (14)$$



Фиг. 4

где  $D$  — цилиндрическая жесткость пластины в  $\text{кг см}$ ,  $F$  — площадь пластины в  $\text{см}^2$ ,  $M$  — масса пластины в  $\text{кг см}^{-1} \text{сек}^2$ ,  $\Phi$  — частотный коэффициент.

Во всех случаях при определении  $\lambda_{mn}^{(2)}$  в двойной сумме формулы (11) вычислялись девять слагаемых, причем большинством из них также можно было бы пренебречь по их малости.

Все расчеты можно выполнять на обычной логарифмической линейке.

Для пластин, имеющих форму равнобедренной трапеции, ход решения тот же, что и для пластин, имеющих форму параллелограмма. В этом случае переход к новым переменным делается уравнениями:

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{by}{(b - \varepsilon x)} \quad (15)$$

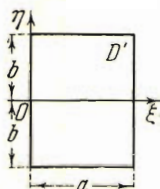
В новых переменных заданная область также принимает форму прямоугольника (фиг. 4 и 5). Преобразование вида (15) приводит к цели также для неравнобедренной трапеции, для которой ось  $x$  следует расположить так, чтобы выполнялось равенство (фиг. 4)

$$\frac{AO}{BO} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (16)$$

где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — тангенсы углов наклона сторон трапеции к оси  $x$  и  $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot 2$ .

В случае граничных условий другого вида также возможно найти решение, если в качестве решения для прямоугольной пластины взять приближенное решение, полученное методом Галеркина или Рунта.

Поступила 3 I 1952



Фиг. 5