Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБЛАСТИ, БЛИЗКОЙ К ДАННОЙ

П. М. Риз

(Москва)

1. Рассмотрим решение краевой задачи, определяемой волновым уравнением

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \tag{1.1}$$

и граничным условием

$$u = 0 \tag{1.2}$$

для области D, близкой к области D_0, причем для последней решение краевой задачи считается известным. Заметим, что граничное условие (1.2) может быть заменено и более общим

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

Введем переменные, мало отличающиеся от x и y:

$$\xi = x + \varepsilon f_1(x, y), \qquad \eta = y + \varepsilon f_2(x, y) \tag{1.3}$$

выбираемые так, чтобы области D в координатах xy соответствовала область D_0 в переменных ξ, η.

Будем пользоваться обозначениями

$$x = \xi + \varepsilon\psi_1(\xi, \eta, \varepsilon), \qquad y = \eta + \varepsilon\psi_2(\xi, \eta, \varepsilon) \tag{1.4}$$

Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\nabla^2 u + \lambda u - \varepsilon L_1(u, \psi_1, \psi_2) - \varepsilon^2 L_2(u, \psi_1, \psi_2) = 0 \tag{1.5}$$

где L_1 и L_2 — дифференциальные операторы, линейные относительно u.

Уравнение (1.5) исследуем обычным методом возмущений. Разлагая функции ψ_1 и ψ_2 в степенные ряды по ε, получим

$$\nabla^2 u + \lambda u - \varepsilon M_1(u) - \varepsilon^2 M_2(u) - \varepsilon^3 M_3(u) = 0 \tag{1.6}$$

Операторы M_i также линейны относительно u. Решение ищем в виде степенных рядов по параметру ε:

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \cdots, \qquad \lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon^2\lambda^{(2)} + \cdots \tag{1.7}$$

Подставляя в равенство (1.6), приходим к следующей совокупности уравнений:

$$\begin{gathered}\nabla^2 u^{(0)} + \lambda^{(0)} u^{(0)} = 0 \\ \nabla^2 u^{(1)} + \lambda^{(0)} u^{(1)} = M_1[u^{(0)}] - \lambda^{(1)} u^{(0)} \\ \nabla^2 u^{(2)} + \lambda^{(0)} u^{(2)} = M_1[u^{(1)}] + M_2[u^{(0)}] - \lambda^{(2)} u^{(0)} - \lambda^{(1)} u^{(1)}\end{gathered} \tag{1.8}$$

Уравнения (1.8), кроме первого из них, могут быть истолкованы как уравнения вынужденных колебаний при наличии резонанса, так как параметр $\lambda^{(0)}$ есть собственное значение однородного уравнения. Необходимым и достаточным условием существования ограниченных решений уравнений (1.8) является условие ортогональности их правых частей к собственной функции $u^{(0)}$.

Этим требованием определяются величины $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, ... Имеем

$$\lambda^{(1)} = \iint_{D_0} M_1 [u^{(0)}]\, u^{(0)}\, d\xi d\eta \quad \text{и т. д.} \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) имеет место при следующей нормировке собственных функций:

$$\iint_{D_0} [u^{(0)}]^2\, d\xi d\eta = 1 \tag{1.10}$$

Далее будем иметь

$$\lambda^{(2)} = \iint_{D_0} M_1 [u^{(1)}]\, u^{(0)}\, d\xi d\eta + \iint_{D_0} M_2 [u^{(0)}]\, u^{(0)}\, d\xi d\eta - \lambda^{(1)} \tag{1.11}$$

Дадим асимптотическую оценку точности получающихся формул для частот при малых значениях ε.

Для этого оборвем разложения (1.7) на квадратичных членах и введем обозначения

$$v = u - u^{(0)} - \varepsilon u^{(1)} - \varepsilon^2 u^{(2)}, \qquad \mu = \lambda - \lambda^{(0)} - \varepsilon\lambda^{(1)} - \varepsilon^2\lambda^{(2)} \tag{1.12}$$

Возвращаясь к старым переменным x и y и, следовательно, к области D, получим уравнение

$$\nabla^2 v + \lambda v = O_3(x, y) + \mu\,(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)}) \tag{1.13}$$

где $O_3(x, y)$ есть величина третьего порядка малости относительно ε.

Так как λ есть собственное значение краевой задачи для области D, то правая часть уравнения (1.13) должна быть ортогональна к собственной функции u. Отсюда получим

$$\mu = \left(\iint_D O_3(x, y)\, u\, dx\, dy\right) : \left(\iint_D \{u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)}\}\, u\, dx\, dy\right) \tag{1.14}$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_D u^{(0)}\, u\, dx\, dy = 1$$

то отсюда следует, что

$$\mu \to 0, \qquad \frac{\mu}{\varepsilon^3} \to C \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 \qquad (C = \text{const})$$

2. Рассмотрим область D, близкую к прямоугольнику, ограниченную линиями

$$x = 0, \qquad x = a, \qquad y = \varepsilon f(x), \qquad y = b + \varepsilon f(x) \tag{2.1}$$

Введем переменные

$$\xi = x, \qquad \eta = y - \varepsilon f(x) \tag{2.2}$$

В координатной плоскости ξ, η области D будет соответствовать прямоугольник D_0, ограниченный прямыми

$$\xi = 0, \qquad \xi = a, \qquad \eta = 0, \qquad \eta = b$$

Уравнение (1.1) примет в новых переменных вид:

$$\nabla^2 u + \lambda u - \varepsilon \left[f''(\xi) \frac{\partial u}{\partial \eta} + 2f'(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} \right] + \varepsilon^2 [f'(\xi)] \frac{\partial^2 u}{\partial \eta} = 0 \qquad (2.3)$$

Откуда

$$\nabla^2 u^{(1)} + \lambda^{(0)} u^{(1)} = f'' \frac{du^{(0)}}{\partial \eta} + 2f' \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi \, \partial \eta} - \lambda^{(1)} u^{(0)} \qquad (2.4)$$

$$\nabla^2 u^{(2)} + \lambda^{(0)} u^{(2)} = f'' \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} + 2f' \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \xi \, \partial \eta} - (f')^2 \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \eta^2} - \lambda^{(1)} u^{(1)} - \lambda^2 u^{(0)} \qquad (2.5)$$

Номера форм колебаний и собственных значений для области D_0 будем отмечать индексами p, q. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} u_{pq}{}^{(0)} &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{p\pi\xi}{a} \sin \frac{q\pi\eta}{b}, \qquad && \lambda_{pq}{}^{(0)} = \pi^2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \\ u_{pq} &= \sum_m \sum_n \frac{C_{pqmn}}{\lambda_{pq}{}^{(0)} - \lambda_{mn}{}^{(0)}} \quad \begin{pmatrix} m \neq p \\ n \neq q \end{pmatrix}, && \lambda_{pq}{}^{(1)} = 0 \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{pq\,mn} &= \iint_D \left[f'' \frac{\partial u_{pq}{}^{(0)}}{\partial \eta} + 2f' \frac{\partial^2 u_{pq}{}^{(0)}}{\partial \xi \, \partial \eta} \right] u_{mn}{}^{(0)} \, d\xi \, d\eta \\ \lambda_{pq}{}^{(2)} &= \iint_{D_0} [f']^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} u_0 \, d\xi \, d\eta - \iint_{D_0} \left\{ f'' \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} + 2f' \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \xi \, \partial \eta} \right\} u^{(0)} d\xi \, d\eta \end{aligned} \qquad (2.7)$$

В частном случае, когда $f(x) = x$, т. е. область D — параллелограмм, имеем

$$C_{pq\,mn} = \begin{cases} 0, & \text{если одно из чисел } m+p \text{ или } n+q \text{ четное} \\ \dfrac{16mn}{\pi^2 ab \sqrt{ab} \, (m^2 - p^2)(n^2 - q^2)}, & \text{если числа } m+p \text{ и } n+q \text{ нечетные} \end{cases}$$

$$\lambda_{pq}{}^{(2)} = -\frac{p^2\pi}{a^2} + \sum_m \sum_n \frac{\pi^2 mn}{ab} \frac{C_{pq\,mn} \, C_{mn\,pq}}{\lambda_{mn}{}^{(0)} - \lambda_{pq}{}^{(0)}} \qquad \begin{pmatrix} m \neq p \\ n \neq q \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

где $C_{mn\,pq}$ определяется тем же выражением, что и $C_{pq\,mn}$, если в последнем заменить m на p и n на q и наоборот.

3. Рассмотрим область, близкую к кругу. Уравнение контура этой области в полярных координатах r, φ возьмем в виде

$$r [1 + \varepsilon f(\varphi)] = a \qquad (3.1)$$

В новых переменных ρ и α

$$\rho = r (1 + \varepsilon f), \qquad \varphi = \alpha \qquad (3.2)$$

области D будет соответствовать круг радиуса a.

Уравнение (1.1) примет в этом случае следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho^2 (1 + \varepsilon f)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho (1 + \varepsilon f) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{\rho \varepsilon f'}{1 + \varepsilon f} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\} + \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \, \partial \varphi} \frac{\rho \varepsilon f'}{1 + \varepsilon f} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\rho \varepsilon f'}{1 + \varepsilon f} \right\} \frac{\rho \varepsilon f'}{1 + \varepsilon f} + \lambda \rho^2 (1 + \varepsilon f)^2 u = 0 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

В дальнейших вычислениях примем

$$f(\alpha) = f(\varphi) + \sin k\varphi \qquad (k \text{ — целое число}) \qquad (3.4)$$

Область D назовем «зубчатой» областью. Ограничимся задачей определения первой собственной функции (соответствующей низшей собственной частоте) с точностью до ε. Положим

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}, \qquad \lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} \tag{3.5}$$

Тогда имеем

$$\nabla^2 u^{(0)} + \lambda^{(0)} u^{(0)} = 0 \tag{3.6}$$

Отсюда

$$u^{(0)} = C_0 J^{(0)}(\lambda^{(0)}\rho) \tag{3.7}$$

Здесь C_0 определяется условием нормировки, $\lambda^{(0)}$ — первый корень уравнения $J_0(\lambda a) = 0$, а

$$\nabla^2 u^{(1)} + \lambda^{(0)} u^{(1)} = 2f(\varphi)\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}f''(\varphi)\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\rho} - \lambda^{(1)} u^{(0)} \tag{3.8}$$

Обычным путем находим, что $\lambda^{(1)} = 0$, и с учетом равенства (3.4) получаем

$$\nabla^2 u^{(1)} + \lambda^{(0)} u^{(1)} = \left\{\frac{2+k^2}{\rho}\lambda^{(0)} J_1(\lambda^{(0)}\rho) - 2\lambda^{(0)} J_0(\lambda^{(0)}\rho)\right\}\sin k\varphi \tag{3.9}$$

Далее

$$u^{(1)} = \sum_{m=2}^{\infty} C_m J_0(\lambda_m^{(0)}\rho)\sin k\varphi \tag{3.10}$$

где $\lambda_m^{(0)}$ — m-й корень уравнения

$$J_0(\lambda^{(0)} a) = 0$$

$$C_m = \frac{C_0\lambda^{(0)}}{(\lambda^{(0)2} - \lambda_m^{(0)2})\pi}\int_0^a (2+k^2) J_1(\lambda^{(0)}\rho) J_0(\lambda_m^{(0)}\rho)\, d\rho \tag{3.11}$$

Полученный результат говорит о том, что безузловые формы колебаний зубчатой области получаются наложением безузловой формы колебаний круговой области и добавочной формы с m узловыми диаметрами, где m — число зубцов.

Поступила 8 IV 1950